Libuše Grygarová

Asymptotische Berührung von zwei konvexen Mengen in (bestimmter) Richtung

*Aplikace matematiky*, Vol. 24 (1979), No. 1, 32–47

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103777`

# ASYMPTOTISCHE BERÜHRUNG VON ZWEI KONVEXEN MENGEN IN (BESTIMMTER) RICHTUNG

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen 29. März 1977)

Der Begriff der Berührung von konvexen Mengen ist vom Standpunkt der Theorie der konvexen Optimierung ein Begriff von fundamentaler Bedeutung. Neben dem üblichen Begriff der Berührung im Punkt der fraglichen Mengen, der in der Literatur ausreichend analysiert wurde (z. B. [1]), ist der Begriff der asymptotischen Berührung von konvexen Mengen von wichtiger Bedeutung. Eine solche asymptotische Berührung kommt z. B. dann in Frage, wo es um ein endliches Infimum einer konvexen Zielfunktion über einer konvexen Menge geht, wobei das entsprechende Minimierungsproblem unlösbar ist. In der Arbeit [2] sind einige Kriterien für die Berührung von konvexen Mengen in ihrem gemeinsamen Punkt angeführt, woraus dann einige Optimalitätskriterien für eine Minimierungsaufgabe in der konvexen Optimierung leicht abzuleiten sind.

Das Ziel der vorgelegten Arbeit liegt in der Aufstellung einer geeigneten Definition der asymptotischen Berührung in Richtung für zwei konvexe abgeschlossene Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ und in seiner erschöpfende geometrische Charakteristik. Eine solche geometrische Untersuchung scheint in dem Sinne wertvoll zu sein, dass ihre entsprechende Ergebnisse zu einfachen Kriterien für asymptotische Berührung von konvexen Mengen führen mögen, die z. B. sehr ähnlich denjeniger in der Arbeit [2] angegebenen kriterien für eine Punktberührung sind.

Es zeigt sich, dass der Begriff des Recesionskegels einer konvexer Menge und einige seiner Eigenschaften (siehe z. B. [3], [4], [5]) bei der fraglichen geometrischen Untersuchung mit Vorteil angenutzt werden kann. Der Recesionskegel im Punkt ${}_0\boldsymbol{x}$ einer konvexen Menge $\boldsymbol{M}$ ist folgendermassen definiert:

$$\boldsymbol{M}_R({}_0\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{M} |\ {}_0\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - {}_0\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{M},\ t \geqq 0\}\ .$$

Wir beschränken uns weiter nur auf abgeschlossene nichtleere konvexe Menge $\boldsymbol{M}$.

Eigenschaft 1: Sind ${}_1\boldsymbol{x}, {}_2\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ beliebige Punkte, so unterscheiden sich die Kegel $\boldsymbol{M}_R({}_1\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{M}_R({}_2\boldsymbol{x})$ höchstens durch eine Translation;

Eigenschaft 2: Für einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ stellt die Menge $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x})$ einen abgeschlossenen konvexen Kegel (mit einem Scheitel im Punkt $\boldsymbol{x}$), dar;

Eigenschaft 3: Sind ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ abgeschlossene konvexe Mengen und ${}_0\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M}$ beliebig, so gilt ${}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x}) \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x}) = ({}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M})_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x})$.

Definiert man (siehe z. B. [5])

$$\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}_n | \ \|\boldsymbol{v}\| = 1, \ {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}({}_0\boldsymbol{x}), \ t \geqq 0\},$$

dann nennt man die Menge

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}t, \ \boldsymbol{v} \in \mathfrak{A}, \ t \geqq 0\}$$

der der Menge $\boldsymbol{M}$ zugehörige Recesionskegel. Es ist klar, dass sich der Kegel $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ von jedem Recesionskegel $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$, höchstens durch eine Translation unterscheidet, wobei der Koordinatenurpsrung $\boldsymbol{o}$ in $\boldsymbol{E}_n$ ein Scheitel von $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ ist. Daher hat auch der Kegel $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ die oben angeführten Eigenschaften 2 und 3.

**Definition 1.** *Es seien ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M} \neq \emptyset$ konvexe, abgeschlossene Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ mit ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$ und*

$$(1.1) \qquad p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \ t \geqq 0\}, \quad \|\boldsymbol{v}\| = 1$$

*Halbgerade in $\boldsymbol{E}_n$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $t' \geqq 0$ und $\varepsilon > 0$ die $\varepsilon$-Umgebung*

$$(1.2) \qquad O(p'; \varepsilon) \equiv \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \varrho(\boldsymbol{x}, p') \equiv \min_{\boldsymbol{y} \in p'} \{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\} < \varepsilon\}$$

*der Halbgeraden*

$$(1.3) \qquad p' = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \ t \geqq t'\}$$

*Punkte aus ${}_1\boldsymbol{M}$ sowie aus ${}_2\boldsymbol{M}$ enthält. Man sagt dann, dass die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ sich in Richtung $\boldsymbol{v}$ asymptotisch berühren (oder, dass sie in Richtung $\boldsymbol{v}$ eine asymptotische Berührung besitzen).*

Vereinbarung. Die Symbole ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ sollen stets nichtleere, konvexe und abgeschlossene Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ mit der Eigenschaft ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$ darstellen, die sich asymptotisch in Richtung $\boldsymbol{v}$ im Sinne der obigen Definition 1 berühren.

**Satz 1.** *Ist ${}_i\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ der, der Menge ${}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$ zugehörige, Recesionskegel und $\boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$, so gilt für den Vektor $\boldsymbol{v}$ aus* (1.1)

$$(1.4) \qquad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}.$$

Beweis. Es sei ${}_1\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$ beliebig und definieren wir die Halbgerade

$$(1.5) \qquad p({}_1\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \boldsymbol{x} = {}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\tau, \ \tau \geqq 0\},$$

die parallel mit der Halbgeraden $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ aus (1.1) ist und dieselbe Orientation besitzt. Wählt man $\tau' > 0$ und $\varepsilon \in (0, \tau')$ beliebig, so gilt $\mathbf{x}' \equiv {}_1\mathbf{x} + \mathbf{v}\tau' \in p({}_1\mathbf{x}; \mathbf{v})$, $\mathbf{x}' \neq {}_1\mathbf{x}$ und für $\varepsilon$-Umgebung $O(\mathbf{x}'; \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \varepsilon\}$ von $\mathbf{x}'$ ist ${}_1\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \setminus \bar{O}(\mathbf{x}'; \varepsilon)$. Der Projektionskegel

$$(1.6)_a \qquad \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \mathbf{x} = {}_1\mathbf{x} + u(\mathbf{y} - {}_1\mathbf{x}),\ \mathbf{y} \in O(\mathbf{x}'; \varepsilon),\ u \geqq 0\}$$

der konvexer Menge $O(\mathbf{x}'; \varepsilon)$ von dem Punkt ${}_1\mathbf{x}$ ist offenbar ein $n$-dimensionaler konvexer Kegel in $\mathbf{E}_n$ mit dem einzigen Scheitel im Punkt ${}_1\mathbf{x}$, dessen Abschliessung durch

$$\bar{\mathbf{P}}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \|\mathbf{x} - {}_1\mathbf{x}\| - \sqrt{\left(\frac{(\tau')^2}{(\tau')^2 - \varepsilon^2}\right)}(\mathbf{v}, \mathbf{x} - {}_1\mathbf{x}) \leqq 0\right\}$$

und das Innere durch

$$(1.6)_b \qquad \operatorname{int} \bar{\mathbf{P}}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\} =$$

$$= \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \|\mathbf{x} - {}_1\mathbf{x}\| - \sqrt{\left(\frac{(\tau')^2}{(\tau')^2 - \varepsilon^2}\right)}(\mathbf{v}, \mathbf{x} - {}_1\mathbf{x}) < 0\right\}$$

beschrieben ist. Da der Durchschnitt der Halbgeraden $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ mit der konvexen Menge $\operatorname{int} \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x})$ eine offene Halbgerade ist (die eine Teilmenge von $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ darstellt), so gibt es einen Punkt $\mathbf{x}^*$ der Halbgeraden $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ in der Weise, dass

$$(1.7) \quad \mathbf{x}^* = {}_0\mathbf{x} + t^*\mathbf{v}\,, \quad t^* > 0\,, \quad \mathbf{x}^* \in \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\}\,, \quad \varrho({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) > \tau' + 2\varepsilon$$

gilt. Für die Halbgerade

$$(1.8) \qquad p^* = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \mathbf{x} = {}_0\mathbf{x} + \mathbf{v}t,\ t \geqq t^*\}$$

gilt dann $p^* \subset \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\}$ und daher gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ in der Weise, dass die $\varepsilon_1$-Umgebung von $\mathbf{x}^*$ die Eigenschaft $O(\mathbf{x}^*; \varepsilon_1) \subset \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\}$ hat. Wählt man $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$, so gilt ebenfalls $O(\mathbf{x}^*; \varepsilon_0) \subset \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\}$. Für einen jeden Punkt $\mathbf{y} \in O(\mathbf{x}^*; \varepsilon)$ gilt dann

$$p_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}t,\ t \geqq 0\} \subset \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\}\,.$$

Bezeichnet man mit $O(p^*; \varepsilon_0)$ die $\varepsilon_0$-Umgebung der Halbgeraden $p^*$ aus (1.8), so gilt offenbar

$$(1.9) \qquad O(p^*; \varepsilon_0) = \bigcup_{\mathbf{y} \in O(\mathbf{x}^*;\varepsilon_0)} p_{\mathbf{y}} \subset \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\}\,.$$

Für den Abstand $\varrho(\mathbf{x}_t, {}_1\mathbf{x})$ eines beliebigen Punktes $\mathbf{x}_t$ der Halbgeraden $p^*$ von dem Punkt ${}_1\mathbf{x}$ erhält man

$$\varrho^2(\mathbf{x}_t, {}_1\mathbf{x}) = ({}_0\mathbf{x} + \mathbf{v}t - {}_1\mathbf{x},\ {}_0\mathbf{x} + \mathbf{v}t - {}_1\mathbf{x}) =$$

$$= (\mathbf{x}^* + \mathbf{v}(t - t^*) - {}_1\mathbf{x},\ \mathbf{x}^* + \mathbf{v}(t - t^*) - {}_1\mathbf{x}) =$$

$$= (\mathbf{x}^* - {}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}^* - {}_1\mathbf{x}) + 2(t - t^*)(\mathbf{v}, \mathbf{x}^* - {}_1\mathbf{x}) + (t - t^*)^2 (\mathbf{v}, \mathbf{v}) =$$
$$= \|\mathbf{x}^* - {}_1\mathbf{x}\|^2 + 2(t - t^*)(\mathbf{v}, \mathbf{x}^* - {}_1\mathbf{x}) + (t - t^*)^2 .$$

Da anderseits nach $(1.6)_b$ $(\mathbf{v}, \mathbf{x} - {}_1\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x}) \setminus \{{}_1\mathbf{x}\}$ (und daher nach (1.7) auch für $\mathbf{x}^*$) gilt, ergibt sich daraus $\varrho^2(\mathbf{x}_t, {}_1\mathbf{x}) \geqq \|\mathbf{x}^* - {}_1\mathbf{x}\|^2$, $t \geqq t^*$. Nach (1.7) folgt daraus

$$\varrho(\mathbf{x}_t, {}_1\mathbf{x}) \geqq \varrho(\mathbf{x}^*, {}_1\mathbf{x}) > \tau' + 2\varepsilon , \quad t \geqq t^* .$$

Für den Abstand der Umgebung $O(p^*; \varepsilon_0)$ von dem Punkt ${}_1\mathbf{x}$ erhält man dann

$$\varrho({}_1\mathbf{x}, O(p^*; \varepsilon_0)) > \tau' + 2\varepsilon - \varepsilon_0 \geqq \tau' + \varepsilon . \tag{1.10}$$

Die Hypersphäre

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \|\mathbf{x} - {}_1\mathbf{x}\| \leqq \tau' + \varepsilon\}$$

hat offenbar die Eigenschaft

$$O(\mathbf{x}'; \varepsilon) \subset \boldsymbol{\Omega} \tag*{$(1.11)_a$}$$

und nach (1.10) ist

$$O(p^*; \varepsilon_0) \not\subset \boldsymbol{\Omega} . \tag*{$(1.11)_b$}$$

Nach der Voraussetzung des Satzes enthält die Umgebung $O(p^*; \varepsilon_0)$ Punkte der Menge ${}_1\mathbf{M}$. Sei $\mathbf{x}^{**} \in O(p^*; \varepsilon_0) \cap {}_1\mathbf{M}$ beliebig gewählt. Da ${}_1\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M}$ und ${}_1\mathbf{M}$ konvex ist, so gilt

$$u({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}^{**}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = {}_1\mathbf{x} + t(\mathbf{x}^{**} - {}_1\mathbf{x}),\ t \in \langle 0, 1\rangle\} \subset {}_1\mathbf{M} . \tag{1.12}$$

Aus (1.9) folgt weiter $\mathbf{x}^{**} \in \mathbf{P}_{O(\mathbf{x}';\varepsilon)}({}_1\mathbf{x})$, $\mathbf{x}^{**} \neq {}_1\mathbf{x}$. Nach $(1.6)_a$ folgt daraus die Existenz eines Punktes $\mathbf{y}^* \in O(\mathbf{x}'; \varepsilon)$ und einer Zahl $u^* > 0$ derart, dass

$$\mathbf{x}^{**} = {}_1\mathbf{x} + u^*(\mathbf{y}^* - {}_1\mathbf{x})$$

gilt. Da nach $(1.11)_{a,b}$

$$\varrho(\mathbf{x}^{**}, {}_1\mathbf{x}) > \tau' + \varepsilon , \quad \varrho(\mathbf{y}^*, {}_1\mathbf{x}) < \tau' + \varepsilon$$

gilt, folgt daraus

$$\tau' + \varepsilon < \|\mathbf{x}^{**} - {}_1\mathbf{x}\| = u^*\|\mathbf{y}^* - {}_1\mathbf{x}\| < u^*(\tau' + \varepsilon)$$

und daher $u^* > 1$. Der Punkt

$$\mathbf{y}^* = {}_1\mathbf{x} + \frac{1}{u^*}(\mathbf{x}^{**} - {}_1\mathbf{x}) \quad \left(0 < \frac{1}{u^*} < 1\right)$$

stellt dann aber einen inneren Punkt der Strecke $u({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}^{**})$ dar und nach (1.12) ist $\mathbf{y}^* \in {}_1\mathbf{M}$. Es gilt daher $\mathbf{y}^* \in {}_1\mathbf{M} \cap O(\mathbf{x}'; \varepsilon)$. Da $O(\mathbf{x}'; \varepsilon)$ eine in $\mathbf{E}_n$ offene Menge ist, so stellt der Durchschnitt $O(\boldsymbol{x}'; \varepsilon) \cap u({}_1\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{**})$ eine offene Strecke dar, die wegen (1.12) zu ${}_1\boldsymbol{M}$ gehört. Wegen der beliebigen Wahl von $\varepsilon > 0$ ergibt sich daraus, dass jede $\varepsilon$-Umgebung $O(\boldsymbol{x}'; \varepsilon)$ von $\boldsymbol{x}'$ mindestens einen Punkt der Menge ${}_1\boldsymbol{M}$, der verschieden von Punkt $\boldsymbol{x}'$ ist, enthält. Der Punkt $\boldsymbol{x}'$ ist daher ein Häufungspunkt von ${}_1\boldsymbol{M}$. Wegen ${}_1\boldsymbol{M} = {}_1\overline{\boldsymbol{M}}$, folgt daraus $\boldsymbol{x}' \in {}_1\boldsymbol{M}$ und da $\boldsymbol{x}'$ ein beliebiger Punkt der Halbgeraden $p({}_1\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{x}' \neq {}_1\boldsymbol{x}$, und ${}_1\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$ war, folgt daraus $p({}_1\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \subset {}_1\boldsymbol{M}$. Nach der Definition des Recesionskegels gilt dann $p({}_1\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \subset {}_1\boldsymbol{M}_R({}_1\boldsymbol{x})$ und daher $\boldsymbol{v} \in {}_1\boldsymbol{M}_R \cap \boldsymbol{Q}$. Es ist klar, dass wir im Falle, wo statt ${}_1\boldsymbol{M}$ die Menge ${}_2\boldsymbol{M}$ betrachtet wird, zu dem Ergebniss $\boldsymbol{v} \in {}_2\boldsymbol{M}_R \cap \boldsymbol{Q}$ gelangen. Hiemit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Aus dem obigen Satz ergibt sich, dass jede der Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ mindestens eine Halbgerade enthält und daher eine in $\boldsymbol{E}_n$ unbeschränkte Menge darstellt.

**Satz 2.** *Es sei $\boldsymbol{L}_{d_i}$ die lineare Hülle von ${}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$. Dann existiert eine trennende Hyperebene $\boldsymbol{R}$ der Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$ und ${}_2\boldsymbol{M}$ und es gilt für $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$ aus* (1.1)

$$p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap \boldsymbol{R})\,. \tag{1.13}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Inklusion $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2})$. Im Falle $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \not\subset \boldsymbol{L}_{d_1}$ würde es eine Zahl $t' \geqq 0$ in der Weise geben, dass für die Halbgerade

$$p' = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n |\, \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t,\ t \geqq t'\} \subset p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$$

gelten $p' \cap \boldsymbol{L}_{d_1} = \emptyset$ würde. Daraus und aus der Konvexität der Mengen $p'$ und $\boldsymbol{L}_{d_1}$ folgt die Existenz einer trennenden Hyperebene $\boldsymbol{R}'$ der Mengen $p'$ und $\boldsymbol{L}_{d_1}$. Bezeichnen wir mit ${}_1\overline{\boldsymbol{H}}'$, ${}_2\overline{\boldsymbol{H}}'$ die abgeschlossenen Halbräume, die der Hyperebene $\boldsymbol{R}'$ angehören und setzen wir o.B.d.A. $\boldsymbol{L}_{d_1} \subset {}_1\overline{\boldsymbol{H}}'$, $p' \subset {}_2\overline{\boldsymbol{H}}'$ voraus. Im Falle $\dim \boldsymbol{L}_{d_1} = d_1 = n - 1$, kann man $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{L}_{d_1}$ wählen und es gilt $p' \subset {}_2\boldsymbol{H}'$. Im Falle $d_1 < n - 1$, kann man diejenige Hyperebene $\boldsymbol{R}'$ wählen, die die Eigenschaft $\boldsymbol{L}_{d_1} \subset \boldsymbol{R}'$ hat und parallel zu $p'$ ist, wobei $p' \not\subset \boldsymbol{R}'$ gilt[1]). Es gilt daher wiederum $p' \subset {}_2\boldsymbol{H}'$. Da ${}_2\boldsymbol{H}'$ ein offener Halbraum, der die abgeschlossene Halbgerade $p'$ enthält, ist, so gibt es eine $\varepsilon$-Umgebung $O(p'; \varepsilon)$ von $p'$ mit $O(p'; \varepsilon) \subset {}_2\boldsymbol{H}'$. Aus der Voraussetzung des Satzes folgt aber, dass die Umgebung $O(p'; \varepsilon)$ Punkte der Menge ${}_1\boldsymbol{M}$ enthält und daher ist ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{H}' \neq \emptyset$, was mit dem obigen Ansatz ${}_1\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{L}_{d_1} \subset {}_1\overline{\boldsymbol{H}}'$ einen Widerspruch gibt. Da für die Menge $\boldsymbol{L}_{d_2}$ eine ähnliche Überlegung gilt, ist hiemit die Inklusion

$$p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2}) \tag{1.14}$$

bewiesen worden.

---

[1]) Aus der Eigenschaft $p' \cap \boldsymbol{L}_{d_1} = \emptyset$ folgt die Existenz einer Zahl $a > 0$ und der Punkte $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{L}_{d_1}$, $\boldsymbol{y}' \in p'$ mit $\varrho(\boldsymbol{L}_{d_1}, p') = \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'\| = a > 0$. Die Hyperebene $\boldsymbol{R}'$ wird dann durch $\boldsymbol{R}' = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{x}') = 0\}$ beschrieben.

Aus dem Ansatz ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$ ergibt sich die Existenz einer trennenden Hyperebene $\boldsymbol{R}$. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{H}^+, \boldsymbol{H}^-$ die ihr zugehörigen offenen Halbräume und setzen

$$(1.15) \qquad {}_1\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^+ , \quad {}_2\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^-$$

voraus. Es existiere nun ein Punkt $\boldsymbol{x}' \equiv {}_0\boldsymbol{x} + t'\boldsymbol{v} \in p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$, $(t' \geqq 0)$ mit $\boldsymbol{x}' \notin \boldsymbol{R}$. O.B.d.A. kann man $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{H}^+$ voraussetzen. Falls für die Halbgerade

$$p' = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}, \ t \geqq t'\}$$

die Inklusion

$$(1.16) \qquad p' \subset \boldsymbol{H}^+$$

gelten würde, so gebe es eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ mit $O(p'; \varepsilon_0) \subset \boldsymbol{H}^+$. Nach Voraussetzung des Satzes enthält aber jede $\varepsilon$-Umgebung der Halbgeraden $p'$ – und daher auch die Umgebung $O(p'; \varepsilon_0)$ – Punkte von ${}_1\boldsymbol{M}$ sowie ${}_2\boldsymbol{M}$, was im Widerspruch mit (1.15) steht. Es gilt daher $p' \not\subset \boldsymbol{H}^+$ und da der Anfangspunkt $\boldsymbol{x}'$ der Halbgeraden $p'$ die Eigenschaft $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{H}^+$ hat, so gibt es einen Punkt $\boldsymbol{x}^* \in p'$ in derart, dass $\boldsymbol{x}^* = {}_0\boldsymbol{x} + t^*\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}$ gilt und für alle $t'' > t^*$ die Halbgerade

$$p'' = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \ t \geqq t''\} \subset p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$$

die Eigenschaft $p'' \subset \boldsymbol{H}^-$ besitzt. Diese Inklusion führt aber zum Widerspruch auf ähnliche Weise, wie es für die Inklusion (1.16) der Fall war. Es gibt daher keinen Punkt $\boldsymbol{x}' \in p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$ mit $\boldsymbol{x}' \notin \boldsymbol{R}$. Daraus folgt $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \subset \boldsymbol{R}$ und mit Hinsicht zu (1.14) die Behauptung des Satzes.

**Satz 3.** *Falls ${}_i\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ der der Menge ${}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$ zugehörige Recesionskegel ist, so gilt:*

1. *Die Menge ${}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ stellt einen konvexen Kegel in $\boldsymbol{E}_n$ mit $1 \leqq \dim({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}) \leqq \dim(\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap \boldsymbol{R})$ dar;*
2. *Die Menge*

$$(1.17) \qquad \boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n | \ \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}, \ t \geqq 0, \ \boldsymbol{w} \in (\boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})\}$$

*ist ein konvexer Kegel in $\boldsymbol{E}_n$ mit einem Scheitel in ${}_0\boldsymbol{x}$, der sich von dem Kegel ${}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ nur bis auf eine Translation unterscheidet, und es gilt für ihn*

$$\boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x}) \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap \boldsymbol{R}) .$$

Beweis. Da ${}_i\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ $(i = 1, 2)$ konvexe Kegel mit gemeinsamen Scheitel $\boldsymbol{o}$ sind, so stellt auch ${}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ einen konvexen Kegel mit $\boldsymbol{o}$ als Scheitel dar. Nach Satz 1 ist $\boldsymbol{v} \in (\boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})$ und daher

$$(1.18) \qquad \dim({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}) \geqq 1 .$$

Wählen wir $\boldsymbol{w} \in (\boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})$ und ${}_i\boldsymbol{y} \in {}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$ beliebig. Die parallelen Halbgeraden

$$p_i \equiv \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n |\ \boldsymbol{x} = {}_i\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{w},\ t \geqq 0\}$$

haben dann die Eigenschaft

$$p_i \subset {}_i\boldsymbol{M} \quad (i = 1, 2)\,. \tag{1.19}$$

Wir betrachten eine trennende Hyperebene $\boldsymbol{R}$ der Menge ${}_1\boldsymbol{M}$ und ${}_2\boldsymbol{M}$ mit den ihr zugehörigen offenen Halbräumen $\boldsymbol{H}^+$, $\boldsymbol{H}^-$ und wir setzen wie im Satz 2 ${}_1\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^+$, ${}_2\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^-$ voraus. Wir zeigen zuerst, dass die Halbgerade $p_2$ parallel zu $\boldsymbol{R}$ ist (bzw. liegt in $\boldsymbol{R}$). Wäre es nicht der Fall, so müsste – wegen $p_2 \subset {}_2\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^-$ – die Inklusion $p_2 \setminus \{{}_2\boldsymbol{y}\} \subset \boldsymbol{H}^-$ gelten. Bei beliebiger Wahl ${}_1\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$ betrachten wir die Halbgerade

$$p({}_1\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n |\ \boldsymbol{x} = {}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}t,\ t \geqq 0\}$$

(die parallel zu $p_2$ mit derselben Orientation ist) und einen Punkt ${}_2\boldsymbol{x} \in p({}_1\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w})$ mit ${}_2\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^-$. Wegen ${}_1\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{w} \in {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ ist, gilt $p({}_1\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}) \subset {}_1\boldsymbol{M} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^+$, was ein Widerspruch ist. Die Halbgerade $p_2$ ist daher parallel zu $\boldsymbol{R}$ (bzw. liegt in $\boldsymbol{R}$). Für die Halbgerade $p_1$, die parallel zu der Halbgeraden $p_2$ ist, gilt dieselbe Behauptung. Daraus folgt wegen ${}_0\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ (nach (1.13))

$$p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n |\ \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w},\ t \geqq 0\} \subset \boldsymbol{R}\,. \tag{1.20}$$

Da $\boldsymbol{w} \in (\boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})$ beliebig gewählt wurde, folgt aus (1.20) und aus der Definitionsgleichung (1.17)

$$\boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{R}\,. \tag{1.21}$$

Unter dem Ansatz $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}) \not\subset \boldsymbol{L}_{d_1}$ betrachten wir die obige Halbgerade $p_1$, die nach (1.19) die Eigenschaft $p_1 \subset {}_1\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{L}_{d_1}$ hat. Dann wäre $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}) \cap \boldsymbol{L}_{d_1} = \emptyset$, was im Widerspruch mit (1.13) steht. Es ist klar, dass auch in ähnlicher Weise die Inklusion $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}) \subset \boldsymbol{L}_{d_2}$ bewiesen werden kann. Es gilt daher $p({}_0\boldsymbol{x}; \boldsymbol{w}) \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2})$ für jedes $\boldsymbol{w} \in (\boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})$, was nach (1.17) und (1.21) zu

$$\boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x}) \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap \boldsymbol{R}) \tag{1.22}$$

führt. Aus (1.17) folgt unmittelbar, dass die Menge $\boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x})$ einen konvexen Kegel in $\boldsymbol{E}_n$ mit einem Scheitel ${}_0\boldsymbol{x}$ (der sich von dem Kegel ${}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ höchstens bis auf eine Translation, durch die der Punkt $\boldsymbol{o}$ in den Punkt ${}_0\boldsymbol{x}$ überführt wird unterscheidet) darstellt. Es gilt daher

$$\dim ({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}) = \dim \boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x}) \leqq \dim (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap \boldsymbol{R})$$

und (mit Hinsicht auf (1.18) und (1.22)) somit die Behauptung des Satzes 3.

Bemerkung 2. Bezeichnet man mit $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$ die lineare Hülle des Kegels $\mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x})$ aus (1.17), so ist nach Satz 3

$$\mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x}) \subset \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}) \subset (\mathbf{L}_{d_1} \cap \mathbf{L}_{d_2} \cap \mathbf{R})$$

und daher

$$1 \leqq d = \dim \mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x}) \leqq n - 1 .$$

Bemerkung 3. Durch die Sätze 1, 2, 3 haben wir diejenigen Richtungen $\mathbf{v}$, die bei der asymptotischen Berührung im Sinne der Definition 1 in Frage kommen, geometrisch charakterisiert. Der folgende Satz soll die Lage des Anfangspunktes ${}_0\mathbf{x}$ einer Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ mit der Eigenschaft aus der Definition 1 näher charakterisieren.

**Satz 4.** *Es sei $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$ die lineare Hülle des Kegels $\mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x})$ aus (1.17), $\mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ der zu $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$ duale lineare Unterraum mit $\{{}_0\mathbf{x}\} = \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}) \cap \mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x})$. Bezeichnet man mit ${}_i\mathbf{M}^*$ die Projektion der Menge ${}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ in den linearen Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ in Richtung des linearen Unterraumes $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$, so gilt:*

a) ${}_i\mathbf{M}^*$ $(i = 1, 2)$ *sind nichtleere, konvexe Menge in $\mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ mit der Eigenschaft* ${}_1\mathbf{M}^* \cap {}_2\mathbf{M}^* = \emptyset$;

b) ${}_0\mathbf{x} \in {}_1\overline{\mathbf{M}}^* \cap {}_2\overline{\mathbf{M}}^*$.

Beweis. Die Mengen ${}_i\mathbf{M}^*$ $(i = 1, 2)$ sind folgendermassen definiert:

$$(1.23) \qquad {}_i\mathbf{M}^* = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \{\mathbf{x}\} = \mathbf{L}_d(\mathbf{y}) \cap \mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}),\ \mathbf{y} \in {}_i\mathbf{M}\}\ ^{2)} \quad (i = 1, 2) .$$

Die Eigenschaft, dass die Mengen ${}_i\mathbf{M}^*$ $(i = 1, 2)$ nichtleer und konvex sind, ist eine in der konvexen Analysis bekannte Tatsache[3]). Den Beweis der Eigenschaft ${}_1\mathbf{M}^* \cap {}_2\mathbf{M}^* = \emptyset$ wollen wir indirekt führen, d. h. wir setzen die Existenz eines Punktes $\mathbf{x}^* \in {}_1\mathbf{M}^* \cap {}_2\mathbf{M}^*$ voraus. Nach (1.23) gibt es dann Punkte ${}_i\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ mit

$$\mathbf{L}_d({}_1\mathbf{x}) \cap \mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}) = \mathbf{L}_d({}_2\mathbf{x}) \cap \mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}^*\} .$$

Da die lineare Unterräume $\mathbf{L}_d({}_1\mathbf{x})$, $\mathbf{L}_d({}_2\mathbf{x})$ parallel sind (bzw. zusammenfallen), folgt daraus dann

$$(1.24) \qquad \mathbf{L}_d({}_1\mathbf{x}) = \mathbf{L}_d({}_2\mathbf{x}) .$$

Wir definieren nun die Mengen

$$(1.25) \quad \mathbf{C}_d({}_i\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = {}_i\mathbf{x} + t\mathbf{w},\ t \geqq 0,\ \mathbf{w} \in (\mathbf{Q} \cap {}_1\mathbf{M}_\mathbf{R} \cap {}_2\mathbf{M}_\mathbf{R})\} \quad (i = 1, 2)$$

die sich von dem Kegel $\mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x})$ aus (1.17) höchstens durch eine Translation unterscheiden. Offenbar gilt $\dim \mathbf{C}_d({}_i\mathbf{x}) = \dim \mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x}) = d$ $(i = 1, 2)$ und aus (1.24)

---

[2]) Die Menge $\mathbf{L}_d(\mathbf{y})$ stellt einen mit $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$ parallelem Unterraum, mit $\dim \mathbf{L}_d(\mathbf{y}) = \dim \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}) = d$, $\mathbf{y} \in \mathbf{L}_d(\mathbf{y})$ dar.

[3]) Siehe z. B. [3].

folgt dann (was leicht zu beweisen ist), dass auch $\dim(\mathbf{C}_d({}_1\mathbf{x}) \cap \mathbf{C}_d({}_2\mathbf{x})) = d$ gilt. Somit ist

$$\mathbf{C}_d({}_1\mathbf{x}) \cap \mathbf{C}_d({}_2\mathbf{x}) \neq \emptyset . \tag{1.26}$$

Da für den Recesionskegel ${}_i\mathbf{M}_R({}_i\mathbf{x})$ der Menge ${}_i\mathbf{M}$ in ihrem Punkt ${}_i\mathbf{x}$ die Beschreibung

$${}_i\mathbf{M}_R({}_i\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \mathbf{x} = {}_i\mathbf{x} + t\mathbf{w},\ t \geqq 0,\ \mathbf{w} \in (\mathbf{Q} \cap {}_i\mathbf{M}_R)\} \quad (i = 1, 2)$$

gilt, und da ${}_i\mathbf{M}_R({}_i\mathbf{x}) \subset {}_i\mathbf{M}$ ist, so folgt daraus und aus (1.25)

$$\mathbf{C}_d({}_i\mathbf{x}) \subset {}_i\mathbf{M}_R({}_i\mathbf{x}) \subset {}_i\mathbf{M} \quad (i = 1, 2) . \tag{1.27}$$

Aus (1.26) und (1.27) folgt ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$, was im Widerspruch mit der Voraussetzung ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$ des Satzes steht. Es gibt also keinen Punkt $\mathbf{x}^*$ mit $\mathbf{x}^* \in$ $\in {}_1\mathbf{M}^* \cap {}_2\mathbf{M}^*$ und daher ${}_1\mathbf{M}^* \cap {}_2\mathbf{M}^* = \emptyset$. Hiemit haben wir die Behauptung a) des Satzes bewiesen.

Wählen wir $\varepsilon > 0$ beliebig und betrachten wir die $\varepsilon$-Umgebung $O({}_0\mathbf{x}; \varepsilon)$ von ${}_0\mathbf{x}$ und zugleich die $\varepsilon$-Umgebung $O(p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}); \varepsilon)$ der Halbgeraden $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ aus (1.1). Nach Definition 1 ist $O(p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}); \varepsilon) \cap {}_i\mathbf{M} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$. Wählen wir

$${}_i\mathbf{y} \in O(p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}); \varepsilon) \cap {}_i\mathbf{M} \quad (i = 1, 2) \tag{1.28}$$

beliebig und betrachten wir die linearen Unterräume $\mathbf{L}_d({}_i\mathbf{y})$ $(i = 1, 2)$. Bezeichnen wir weiter

$$\{{}_i\mathbf{y}^*\} \equiv \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{y}) \cap \mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2) , \tag{1.29}$$

so gilt nach (1.23)

$${}_i\mathbf{y}^* \in {}_i\mathbf{M}^* \quad (i = 1, 2) . \tag{1.30}$$

Für den Abstand der Punkte ${}_i\mathbf{y}$ von der Halbgeraden $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ gilt dann nach (1.28)

$$\varrho(p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}), {}_i\mathbf{y}) < \varepsilon$$

und wegen ${}_i\mathbf{y} \in \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{y})$, $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) \subset \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$ folgt daraus

$$\varrho(\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}), \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{y})) \leqq \varrho(p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}), {}_i\mathbf{y}) < \varepsilon \quad (i = 1, 2) .$$

Da zugleich (nach (1.29))

$$\varrho(\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}), \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{y})) = \varrho({}_0\mathbf{x}, {}_i\mathbf{y}^*)$$

ist, so ist auch $\varrho({}_0\mathbf{x}, {}_i\mathbf{y}^*) < \varepsilon$ und daher ${}_i\mathbf{y}^* \in O({}_0\mathbf{x}; \varepsilon)$ $(i = 1, 2)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt daraus nach (1.30), dass der Punkt ${}_0\mathbf{x}$ ein Häufungspunkt beider Mengen ${}_i\mathbf{M}^*$ $(i = 1, 2)$ ist und daher ist ${}_0\mathbf{x} \in {}_1\overline{\mathbf{M}}^* \cap {}_2\overline{\mathbf{M}}^*$. Hiemit ist der Beweis des Satzes 4 beendet worden.

Bemerkung 4. Die Menge ${}_1\overline{\boldsymbol{M}}^* \cap {}_2\overline{\boldsymbol{M}}^*$ ist eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge in $\boldsymbol{E}_n$ für die – nach Behauptung a) des Satzes 4 – $0 \leqq \dim ({}_1\overline{\boldsymbol{M}}^* \cap \cap {}_2\overline{\boldsymbol{M}}^*) \leqq n - d - 1$ gilt.

**Satz 5.** *Es sei $C_d({}_0\boldsymbol{x})$ der konvexe Kegel aus (1.17), $\boldsymbol{L}_d({}_0\boldsymbol{x})$ seine lineare Hülle, $\boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{x})$ der mit $\boldsymbol{L}_d({}_0\boldsymbol{x})$ parallele (bzw. zusammenfallende) lineare Unterraum mit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{x})$, $\dim \boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{x}) = \dim \boldsymbol{L}_d({}_0\boldsymbol{x}) = d$ und*

$$
{}_i\mathfrak{M} = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in {}_i\boldsymbol{M}} \boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, 2)\,. \tag{1.31}
$$

*Es sei*

$$
p({}_0\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{v}') = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n |\ \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x}' + t\boldsymbol{v}',\ t \geqq 0,\ \|\boldsymbol{v}'\| = 1\}
$$

*eine beliebige Halbgerade mit den Eigenschaften aus Definition 1. Dann gilt:*

a) $\boldsymbol{v}' \in (\boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_R \cap {}_2\boldsymbol{M}_R)$;

b) ${}_1\mathfrak{M}, {}_2\mathfrak{M}$ *sind konvexe Mengen in* $\boldsymbol{E}_n$ *mit der Eigenschaft* ${}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} = \emptyset$, ${}_1\overline{\mathfrak{M}} \cap {}_2\overline{\mathfrak{M}} \neq \emptyset$, ${}_i\boldsymbol{M} \subset {}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$;

c) ${}_0\boldsymbol{x}' \in {}_1\overline{\mathfrak{M}} \cap {}_2\overline{\mathfrak{M}}$.

Beweis. Die Behauptung a) folgt unmittelbar aus der vorausgesetzten Eigenschaft den Halbgeraden $p({}_0\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{v}')$ und aus dem Satz 1.

Um die Konvexität der Menge ${}_1\mathfrak{M}$ zu beweisen, betrachten wir beliebige Punkte ${}_i\boldsymbol{y} \in {}_1\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$. Nach (1.31) gibt es dann Punkte ${}_i\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$ in der Weise, dass ${}_i\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}_d({}_i\boldsymbol{x})$ gilt und daher ist $\boldsymbol{L}_d({}_i\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L}_d({}_i\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$. Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{y} = {}_1\lambda\, {}_1\boldsymbol{y} + {}_2\lambda\, {}_2\boldsymbol{y}$ $({}_1\lambda + {}_2\lambda = 1,\ {}_1\lambda, {}_2\lambda \geqq 0)$, für den offenbar $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L}_d({}_1\lambda\, {}_1\boldsymbol{y} + {}_2\lambda\, {}_2\boldsymbol{y})$ gilt. Da offenbar

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_d({}_1\lambda\, {}_1\boldsymbol{y} + {}_2\lambda\, {}_2\boldsymbol{y}) &= {}_1\lambda\, \boldsymbol{L}_d({}_1\boldsymbol{y}) + {}_2\lambda\, \boldsymbol{L}_d({}_2\boldsymbol{y}) = \\
&= {}_1\lambda\, \boldsymbol{L}_d({}_1\boldsymbol{x}) + {}_2\lambda\, \boldsymbol{L}_d({}_2\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_d({}_1\lambda\, {}_1\boldsymbol{x} + {}_2\lambda\, {}_2\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

gilt, ergibt sich daraus $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}_d({}_1\lambda\, {}_1\boldsymbol{x} + {}_2\lambda\, {}_2\boldsymbol{x})$. Wegen der Konvexität der Menge ${}_1\boldsymbol{M}$ ist ${}_1\lambda\, {}_1\boldsymbol{x} + {}_2\lambda\, {}_2\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$ und daher (nach (1.31)) $\boldsymbol{y} \in {}_1\mathfrak{M}$, womit die Konvexität ${}_1\mathfrak{M}$ bewiesen ist. Dieselbe Behauptung betrifft offenbar die Menge ${}_2\mathfrak{M}$.

Unter dem Ansatz ${}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$ wählen wir $\boldsymbol{y} \in {}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M}$ beliebig. Nach (1.31) gibt es dann Punkte ${}_i\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$ mit $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}_d({}_i\boldsymbol{x})$ und es gilt daher $\boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L}_d({}_i\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$. Definiert man nun konvexe Kegel $\boldsymbol{C}_d({}_i\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2)$ nach (1.17), so liegen beide in demselben $d$-dimensionalen linearen Unterraum $\boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{y})$ und sie unterscheiden sich voneinander höchstens durch eine Translation. Da $\dim \boldsymbol{C}_d({}_1\boldsymbol{x}) = \dim \boldsymbol{C}_d({}_2\boldsymbol{x}) = \dim \boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{y}) = d$ ist, ergibt sich daraus $\boldsymbol{C}_d({}_1\boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{C}_d({}_2\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$ und daraus weiter (nach (1.27)) ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} \neq \emptyset$. Dies ist aber ein Widerspruch mit der Voraussetzung ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$ aus unserer Vereinbarung. Somit haben wir indirekt gezeigt, dass ${}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} = \emptyset$ ist.

Es sei nun $\mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}')$ der lineare duale Unterraum zu $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$ mit ${}_0\mathbf{x}' \in \mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}')$. Falls ${}_i^{\backprime}\mathbf{M}^*$ die Projektion der Menge ${}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ in $\mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}')$ in Richtung des Unterraumes $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x})$ bedeutet, dann gilt nach (1.31) und (1.23)

$$\mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}') \cap {}_i\mathfrak{M} = \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M}} \left(\mathbf{L}_{n-d}({}_0\mathbf{x}') \cap \mathbf{L}_d(\mathbf{x})\right) = {}_i^{\backprime}\mathbf{M}^*$$

und daher auch

$$(1.32) \qquad {}_i^{\backprime}\mathbf{M}^* \subset {}_i\mathfrak{M} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Da nach Satz 4 ${}_0\mathbf{x}' \in {}_1^{\backprime}\mathbf{M}^* \cap {}_2^{\backprime}\mathbf{M}^*$ ist, folgt daraus und aus (1.32) ${}_0\mathbf{x}' \in {}_1\overline{\mathfrak{M}} \cap {}_2\overline{\mathfrak{M}}$ und daher ${}_1\overline{\mathfrak{M}} \cap {}_2\overline{\mathfrak{M}} \neq \emptyset$. Die Inklusion ${}_i\mathbf{M} \subset {}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ ergibt sich unmittelbar aus (1.31). Hiemit ist der Satz 5 vollständig bewiesen.

**Satz 6.** *Sind* ${}_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ *die Mengen aus* (1.31), *so ist die Menge* ${}_0\mathfrak{M} = {}_1\overline{\mathfrak{M}} \cap {}_2\overline{\mathfrak{M}}$ *eine abgeschlossene, konvexe Menge in* $\mathbf{E}_n$ *mit*

$$(1.33) \qquad d^0 \equiv \dim {}_0\mathfrak{M} \geqq d = \dim\left({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R\right)$$

*und jede Halbgerade*

$$(1.34) \qquad p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}') = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = {}_0\mathbf{x}' + t\mathbf{v}',\ t \geqq 0,\ \|\mathbf{v}'\| = 1\right\}$$

*mit*

$$(1.35) \qquad {}_0\mathbf{x}' \in {}_0\mathfrak{M}\,, \quad \mathbf{v}' \in \text{rel. int}\left({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R\right)$$

*hat die Eigenschaft aus der Definition* 1.

Beweis. Nach dem obigen Satz 5 ist ${}_0\mathfrak{M}$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge in $\mathbf{E}_n$. Wir wählen ${}_0\mathbf{x}' \in {}_0\mathfrak{M}$ beliebig. Da (nach Satz 5) ${}_1\mathfrak{M} \cap {}_2\mathfrak{M} = \emptyset$ gilt, so ist ${}_0\mathbf{x}'$ ein Häufungspunkt von ${}_1\mathfrak{M}$ und ${}_2\mathfrak{M}$. Für ein jedes $\varepsilon > 0$ hat die $\varepsilon$-Umgebung $O({}_0\mathbf{x}'; \varepsilon)$ von ${}_0\mathbf{x}'$ die Eigenschaft, dass es Punkte ${}_i\mathbf{y}$ mit

$${}_i\mathbf{y} \in {}_i\mathfrak{M} \cap O({}_0\mathbf{x}'; \varepsilon) \quad (i = 1, 2)$$

gibt. Nach (1.31) gibt es dann Punkte ${}_i\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M}$ derart, dass ${}_i\mathbf{y} \in \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x})$ gilt, wobei

$$(1.36) \qquad \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}) \subset {}_i\mathfrak{M} \quad (i = 1, 2)$$

ist. Somit ist auch

$$(1.37) \qquad \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}) \cap O({}_0\mathbf{x}'; \varepsilon) \neq \emptyset \quad (i = 1, 2)\,.$$

Da $\mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ ein linearer Unterraum, der mit $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}')$ parallel ist und dieselbe Dimension $d$ besitzt, folgt aus (1.37) die Inklusion

$$(1.38) \qquad \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}) \subset O(\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}'); \varepsilon) \quad (i = 1, 2)$$

$(O(\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}'); \varepsilon)$ ist die $\varepsilon$-Umgebung von $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}'))$. Wegen der beliebigen Wahl von $\varepsilon > 0$ folgt daraus und aus (1.36), dass jeder Punkt des Unterraumes $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}')$ ein Häufungspunkt von ${}_1\mathfrak{M}$ und ${}_2\mathfrak{M}$ ist. Es gilt daher

$$\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}') \subset ({}_1\overline{\mathfrak{M}} \cap {}_2\overline{\mathfrak{M}}) = {}_0\mathfrak{M}\,, \tag{1.39}$$

woraus sich die Ungleichung (1.33) ergibt.

Es sei nun ${}_0\mathbf{x}'$ und $\mathbf{v}'$ mit der Eigenschaft (1.35) beliebig gewählt. Nach der obigen Betrachtungen gibt es dann Punkte ${}_i\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ mit der Eigenschaft (1.38), woraus die Ungleichung

$$\varrho(\mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}), \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}')) < \varepsilon \quad (i = 1, 2)$$

für den Abstand der Unterräume $\mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x})$, $\mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}')$ $(i = 1, 2)$ folgt. Somit gibt es Punkte

$$ {}_i\mathbf{x}' \in \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \varrho({}_i\mathbf{x}', {}_0\mathbf{x}') = \varrho(\mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x}), \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}')) < \varepsilon \quad (i = 1, 2)\,. \tag{1.40}$$

Wegen $\mathbf{v}' \in \text{rel. int}\,({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$ ist

$$ {}_0\mathbf{x}' + \mathbf{v}' \in \mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x}') \subset \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}') \tag{1.41}$$

und aus (1.40) folgt dann

$$ {}_i\mathbf{x}' \in O(p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}'); \varepsilon) \quad (i = 1, 2) \tag{1.42}$$

(wobei $O(p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}'); \varepsilon)$ die $\varepsilon$-Umgebung der Halbgeraden $p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}')$ aus (1.34) bedeutet). Für die Halbgeraden

$$ {}_ip' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \mathbf{x} = {}_i\mathbf{x}' + t\mathbf{v}',\ t \geqq 0\} \quad (i = 1, 2)$$

gilt dann nach (1.42)

$$ {}_ip' \subset O(p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}'); \varepsilon) \quad (i = 1, 2)\,. \tag{1.43}$$

Wegen ${}_0\mathbf{x}' + \mathbf{v}' \in \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}')$ (nach (1.41)) gilt auch ${}_i\mathbf{x}' + \mathbf{v}' \in \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x})$ und da auch ${}_i\mathbf{x}' \in \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x})$ (nach (1.40)) gilt, muss auch ${}_ip' \subset \mathbf{L}_d({}_i\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ sein. Da $\mathbf{v}' \in \text{rel. int}$ $({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$ ist, so ist ${}_i\mathbf{x} + \mathbf{v}' \in \text{rel. int}\,\mathbf{C}_d({}_i\mathbf{x})$ und daraus folgt dann (wie sich leicht beweisen lässt), dass die Durchschnitte ${}_ip' \cap \mathbf{C}_d({}_i\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ unbeschränkte Mengen sind. Somit existieren Halbgeraden ${}_ip''$ mit ${}_ip'' \subset {}_ip'$, ${}_ip'' \subset \mathbf{C}_d({}_i\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$, woraus dann nach (1.27)

$$ {}_ip'' \subset {}_i\mathbf{M} \quad (i = 1, 2) \tag{1.44}$$

folgt. Wählt man nun $t' \geqq 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig und betrachtet man die $\varepsilon$-Umgebung $O(p'; \varepsilon)$ der Halbgeraden

$$p' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n |\ \mathbf{x} = {}_0\mathbf{x}' + t\mathbf{v}',\ t \geqq t'\}\,,$$

so ist offenbar $p' \subset p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}')$, $O(p'; \varepsilon) \subset O(p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}'); \varepsilon)$. Daraus und aus (1.43), (1.44) ergibt sich, dass die Umgebung $O(p'; \varepsilon)$ der Halbgeraden $p'$ Punkte der Menge ${}_1\mathbf{M}$ sowie der Menge ${}_2\mathbf{M}$ enthält. Da die Zahlen $t' \geqq 0$, $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurden, folgt daraus nach Definition 1, dass die Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}'; \mathbf{v}')$ aus (1.34) die Eigenschaft aus der Definition 1 besitzt. Hiemit ist der Satz 6 bewiesen worden.

Bemerkung 5. Würde man in den Voraussetzungen des Satzes 6 die Voraussetzung $\mathbf{v}' \in \text{rel. int}\,({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$ durch die Voraussetzung $\mathbf{v}' \in ({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$ ersetzen, so wird die Behauptung des Satzes 6 allgemein nicht gelten, wie es das folgende Beispiel 1 zeigt.

Beispiel 1. Betrachten wir in $\mathbf{E}_n$ die konvexen, abgeschlossenen, dreidimensionalen Mengen

$$\begin{aligned} {}_1\mathbf{M} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid \quad zx \geqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}\,, \\ {}_2\mathbf{M} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid -zx \geqq 1,\ x \leqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}\,. \end{aligned}$$

Offenbar ist

$$\begin{aligned} {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} &= \emptyset\,, \\ {}_1\mathbf{M}_R &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}\,, \\ {}_2\mathbf{M}_R &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x \leqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}\,, \\ {}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}\,, \\ \mathbf{Q} \cap {}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_3 \mid v_1 = 0,\ v_2^2 + v_3^2 = 1,\ v_2 \geqq 0,\ v_3 \geqq 0\}\,. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\mathbf{v} \in \text{rel. int}\,({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$ hat hier die Form $v_1 = 0$, $v_2 > 0$, $v_3 > 0$, $v_2^2 + v_3^2 = 1$. Definiert man ${}_0\mathbf{x} = \mathbf{o}$, so ist in unserem Fall

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_d({}_0\mathbf{x}) = \mathbf{C}_d(\mathbf{o}) &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0,\ y = v_2 t,\ z = v_3 t,\ t \geqq 0, \\ &\qquad \mathbf{v} \in (\mathbf{Q} \cap {}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)\}\,, \\ \mathbf{L}_d({}_0\mathbf{x}) = \mathbf{L}_2(\mathbf{o}) &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0\}\,, \\ {}_1\mathfrak{M} = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x > 0\}\,, &\quad {}_2\mathfrak{M} = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x < 0\}\,, \\ {}_0\mathfrak{M} = {}_1\overline{\mathfrak{M}} \cap {}_2\overline{\mathfrak{M}} &= \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0\} = \mathbf{L}_2(\mathbf{o})\,. \end{aligned}$$

Die einzigen Vektoren $\mathbf{v} \in (\mathbf{Q} \cap {}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$ mit $\mathbf{v} \notin \text{rel. int}\,(\mathbf{Q} \cap {}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$ sind die Vektoren ${}_1\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, ${}_2\mathbf{v} = (0, 0, 1)$.

In der Richtung des Vektors ${}_1\mathbf{v}$ gibt es keine asymptotische Berührung der Mengen ${}_1\mathbf{M}$ und ${}_2\mathbf{M}$, da für keinen Punkt einer genügend kleiner $\varepsilon$-Umgebung $O(p'; \varepsilon)$ der Halbgeraden

$$p' \subset p \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}' + {}_1\mathbf{v}t,\ t \geqq 0\}\,, \quad \mathbf{x}' \in \mathbf{L}_2(\mathbf{o})$$

weder die Bedingung $zx \geqq 1$ noch $-zx \geqq 1$ erfüllt ist und daher gilt $O(p'; \varepsilon) \cap {}_1\boldsymbol{M} = \emptyset$, $O(p'; \varepsilon) \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$.

In der Richtung des Vektors ${}_2\boldsymbol{v}$ haben die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$ und ${}_2\boldsymbol{M}$ eine asymptotische Berührung, da *z. B.* die Halbgerade

$$p(\mathbf{o}; {}_2\boldsymbol{v}) = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{E}_3 \mid x = y = 0,\ z = t,\ t \geqq 0\}$$

die Eigenschaft aus der Definition 1 hat. Es ist aber nicht war, dass für einen beliebig gewählten Punkt $\boldsymbol{x}'' \in {}_0\mathfrak{M} = \boldsymbol{L}_2(\mathbf{o})$ die Halbgerade $p(\boldsymbol{x}''; {}_2\boldsymbol{v})$ die Eigenschaft aus der Definition 1 besitzt. Z. B. für die Wahl $x'' = 0$, $y'' = -1$, $z'' = 0$ besitzt die Halbgerade $p(\boldsymbol{x}''; {}_2\boldsymbol{v})$ die eben genannte Eigenschaft nicht.

Bemerkung 6. Nach Satz 2 und 6 gilt für jede Halbgerade $p({}_0\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{v}')$ aus (1.34) im Falle ${}_0\boldsymbol{x}' \in {}_0\mathfrak{M}$, $\boldsymbol{v}' \in \text{rel. int}\,({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})$, $\|\boldsymbol{v}'\| = 1$

$$p({}_0\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{v}') \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap \boldsymbol{R})\,.$$

Nach Satz 3 gilt weiter

$$\boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x}') = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{x} = {}_0\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{w}t,\ t \geqq 0,\ \boldsymbol{w} \in (\boldsymbol{Q} \cap {}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}})\} \subset$$
$$\subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap \boldsymbol{R})\,.$$

Bezeichnet man mit $R$ die Menge aller trennenden Hyperebenen der Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ mit $\bigcap\limits_{R} \boldsymbol{R}$ ihren Durchschnitt, so gilt offenbar

$$\boldsymbol{C}_d({}_0\boldsymbol{x}') \subset \boldsymbol{L}_d({}_0\boldsymbol{x}') \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap (\bigcap_{R} \boldsymbol{R}))\,.$$

Da ${}_0\boldsymbol{x}' \in {}_0\mathfrak{M}$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus

$$\bigcup_{\boldsymbol{x} \in {}_0\mathfrak{M}} \boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{x}) \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap (\bigcap_{R} \boldsymbol{R}))\,. \tag{1.45}$$

Da nach (1.39) $\bigcup\limits_{\boldsymbol{x} \in {}_0\mathfrak{M}} \boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{x}) = {}_0\mathfrak{M}$ ist, so folgt daraus und aus (1.45)

$${}_0\mathfrak{M} \subset (\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap (\bigcap_{R} \boldsymbol{R}))\,,$$

woraus dann mit Hinsicht auf (1.33)

$$d = \dim\,({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}) \leqq d^0 = \dim\,{}_0\mathfrak{M} \leqq \dim\,(\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap (\bigcap_{R} \boldsymbol{R}))$$

folgt.

Das folgende Beispiel 2 zeigt, dass es Fälle gibt, für die

$$d^0 < \dim\,(\boldsymbol{L}_{d_1} \cap \boldsymbol{L}_{d_2} \cap (\bigcap_{R} \boldsymbol{R}))$$

gilt.

Beispiel 2. Durch

$$ {}_1\mathbf{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \middle| \, z \geqq |\mathrm{tg}\sqrt{(x^2 + y^2)}|,\ x^2 + y^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right\}, $$

$$ {}_2\mathbf{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \middle| \, x \geqq \frac{\pi}{2}\right\} $$

sind offenbar in $\mathbf{E}_3$ zwei konvexe, abgeschlossene Mengen der Dimension 3 beschrieben, die die Eigenschaft ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$ haben. Für diese Mengen berechnet man

$$ {}_1\mathbf{M}_\mathbf{R} = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 |\, x = y = 0,\ z \geqq 0\}, \quad {}_2\mathbf{M}_\mathbf{R} = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 |\, x \geqq 0\}. $$

Daraus folgt ${}_1\mathbf{M}_\mathbf{R} \cap {}_2\mathbf{M}_\mathbf{R} = {}_1\mathbf{M}_\mathbf{R}$, $\dim ({}_1\mathbf{M}_\mathbf{R} \cap {}_2\mathbf{M}_\mathbf{R}) = 1$. Die Halbgerade

$$ p = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \middle| \, x = \frac{\pi}{2},\ y = 0,\ z = t,\ t \geqq 0\right\} $$

besitzt offenbar die Eigenschaften aus der Definition 1 und daher berühren sich die Mengen ${}_1\mathbf{M}$ und ${}_2\mathbf{M}$ asymptotisch in Richtung $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Für die Menge ${}_0\mathfrak{M}$ gilt

$$ {}_0\mathfrak{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 \middle| \, x = \frac{\pi}{2},\ y = 0,\ z = t,\ t \in (-\infty, \infty)\right\} $$

und daher $\dim {}_0\mathfrak{M} = d^0 = 1$. Die Hyperebene $\mathbf{R} = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_3 |\, x = \pi/2\}$ ist offenbar die einzige trennende Hyperebene der Mengen ${}_1\mathbf{M}$ und ${}_2\mathbf{M}$. Da $\dim {}_1\mathbf{M} = \dim {}_2\mathbf{M} = 3$ ist, so ist $\mathbf{L}_{d_1} = \mathbf{L}_{d_2} = \mathbf{E}_3$ und es gilt daher

$$ \dim (\mathbf{L}_{d_1} \cap \mathbf{L}_{d_2} \cap (\bigcap_R \mathbf{R})) = \dim (\mathbf{E}_3 \cap \mathbf{E}_3 \cap \mathbf{R}) = \dim \mathbf{R} = 2. $$

Es ist also in unserem Fall

$$ d^0 = 1 < 2 = \dim (\mathbf{L}_{d_1} \cap \mathbf{L}_{d_2} \cap (\bigcap_R \mathbf{R})). $$

*Literatur*


[1] *В. Г. Болтянский:* Метод шатров в теории экстремальных задач. Успехи математических наук. Москва 1975, т. XXX, вып. 3 (183).

[2] *L. Grygarová:* Über Punktberührung von konvexen Mengen. Apl. mat. 6 (1978), 453—466.

[3] *R. T. Rockafellar:* Convex analysis. Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1972.

[4] *J. Stoer, Ch. Witzgall:* Convexity and Optimization in Finite Dimension I. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[5] *L. Grygarová:* Sphärische Abbildung konvexer abgeschlossenen Mengen in $\mathbf{E}_n$ und ihre charakteristische Eigenschaften. Apl. mat. 2 (1978), 115—131.

## Souhrn

## ASYMPTOTICKÝ DOTYK DVOU KONVEXNÍCH MNOŽIN V DANÉM SMĚRU

LIBUŠE GRYGAROVÁ

Práce je příspěvkem k teorii konvexních množin v $\mathbf{E}_n$ a zabývá se pojmem asymptotického styku dvou konvexních uzavřených množin v určitém směru $\mathbf{v}$. Tento pojem zavedený definicí 1 vyžaduje existenci určité polopřímky $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ s předepsanými vlastnostmi. Hlavním cílem práce je podat vyčerpávající geometrickou charakteristiku polohy všech takovýchto polopřímek a to co do směrů $\mathbf{v}$, tak i co do polohy jejich počátečních bodů ${}_0\mathbf{x}$. Výsledky tohoto rozboru se opírají především o vlastnosti recisivních kuželů dané dvojice konvexních množin.



*Anschrift des Verfassers:* RNDr. *Libuše Grygarová,* CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.