

# Aplikace matematiky

---

Miroslav Šisler

Über ein Iterationsverfahren für die Lösung spezieller linearer Gleichungssysteme mit einer zyklischen Matrix

*Aplikace matematiky*, Vol. 23 (1978), No. 4, 295–299

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103754>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1978

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER EIN ITERATIONSVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG  
SPEZIELLER LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME  
MIT EINER ZYKLISCHEN MATRIX

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen 16. Februar 1977)

In der Arbeit [2] wird ein gewisses Iterationsverfahren für die Lösung eines Gleichungssystems der Form

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

untersucht. Es handelt sich um den Fall, wenn die  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{B}$  folgende Eigenschaften besitzt:

a) die Blockmatrix  $\mathbf{B}$  wird auf die Form  $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$  zerlegt, wobei  $\mathbf{L}$  bzw.  $\mathbf{U}$  eine untere bzw. obere verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist und die Diagonallöcke Nullmatrizen sind;

b) der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbf{R}$  ist durch die direkte Summe der Unterräume  $v_1, \dots, v_m$  ( $m \leq n$ ) gebildet, wobei diese Zerlegung des Vektorraumes  $\mathbf{R}$  der Zerlegung der Matrix  $\mathbf{B}$  in Blöcke entspricht und die Matrizen  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  folgende Bedingungen erfüllen:

$$\mathbf{L}v_i \subset v_{i+1}, \quad \mathbf{U}v_i \subset v_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m$$

und  $v_i = 0$  für  $i < 1$  und  $i > m$ .

Das Iterationsverfahren definieren die Beziehungen

$$(2) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_v + \mathbf{P}(\alpha, \beta) \mathbf{b},$$

$$(3) \quad \mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1} [(\alpha - 1) \mathbf{E} + (\beta + 1) \mathbf{L} + \mathbf{U}],$$

$$(4) \quad \mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{L})^{-1},$$

wo,  $\alpha, \beta$  reelle, von Null verschiedene Parameter sind.

Es handelt sich also um ein Gleichungssystem mit einer 2-zyklischen Matrix. Wir werden in der ganzen Arbeit voraussetzen, dass für die Eigenwerte  $\mu_i$  der Matrix  $\mathbf{B}$

die Ungleichungen  $\mu_i^2 < 0, i = 1, \dots, n$  gelten; diese Bedingung ist z.B. im Falle einer schiefsymmetrischen Matrix  $\mathbf{B}$  erfüllt.

Man bezeichnet  $M = \max_i \sqrt{|\mu_i^2|}, m = \min_i \sqrt{|\mu_i^2|}, i = 1, \dots, n$ . Es gilt dann  $-M^2 \leq \mu_i^2 \leq -m^2, i = 1, \dots, n$ . Man kann leicht beweisen, dass für  $\beta = -1$ , wenn die untersuchte Methode in das gewöhnliche Oberrelaxationsverfahren übergeht, nimmt der Spektralradius  $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, -1))$  der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, -1)$  für  $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 + M^2)}]$  seinen Minimalwert  $-[1 - \sqrt{(1 + M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 + M^2)}]$  an. Es ist also  $1 < \alpha$  (falls  $0 < M < 1$  ist, gilt offensichtlich  $1 < \alpha < 1,21$ ).

In der Arbeit befassen wir uns mit dem Bereich  $\Omega$  von Parametern  $[\alpha, \beta]$  für die das untersuchte Iterationsverfahren zumindestens so schnell, wie das Oberrelaxationsverfahren, konvergiert;  $\Omega$  enthält also solche Punkte  $[\alpha, \beta]$ , für die  $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leq -[1 - \sqrt{(1 + M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 + M^2)}]$  gilt. Wir beschränken uns dabei nur auf die Punkte mit  $\alpha > 0$ .

Von dem Satz 1 der Arbeit [1] folgt sofort für  $p = 2, h = k = 1$  folgender Satz:

**Satz 1.** *Es sei  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ . Falls  $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$  ist und falls die Zahl  $\mu$  die Beziehung*

$$(5) \quad (1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = \mu^2(1 + \beta - \lambda\beta)$$

*erfüllt, ist  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$ . Falls umgekehrt  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{B}$  ist, dann ist jede Wurzel  $\lambda$  der quadratischen Gleichung (5) ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$ .*

In der Arbeit [2] wurde der Fall, wenn  $0 < \mu_i^2$  für  $i = 1, \dots, n$  ist, untersucht; es wurden die Sätze 2, 3, 4 (siehe [2]) bewiesen, die die konkrete Form des Gebietes  $\Omega$  und die approximative Lage der optimalen Parameter  $[\alpha_{opt}, \beta_{opt}]$  betreffen. Für den bereits untersuchten Fall von  $\mu_i^2 < 0, i = 1, \dots, n$  gelten analogische Sätze. Da die Beweise ganz analogisch sind, führen wir sie da nicht an.

**Satz 2.** *Es sei*

$$\begin{aligned} b_1(\alpha) &= [-4\alpha^2 \sqrt{(1 + M^2)} + 4\alpha(1 + \sqrt{(1 + M^2)}) - (1 + \sqrt{(1 + M^2)})^2 \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{(1 + M^2)}]/2M^2(1 + \sqrt{(1 + M^2)}), \\ b_2(\alpha) &= [-4\alpha^2 + 4\alpha(1 + \sqrt{(1 + M^2)}) - (1 + \sqrt{(1 + M^2)})^2(1 + M^2)] : \\ &\quad : 2M^2(1 + \sqrt{(1 + M^2)}), \\ b_3(\alpha) &= [-(1 - \alpha)^2/m^2] + [\alpha^2(1 - \sqrt{(1 + M^2)})^2/m^2(1 + \sqrt{(1 + M^2)})^2] - 1. \end{aligned}$$

*Dann ist  $[\alpha, \beta] \in \Omega$  genau dann, wenn zugleich*

$$(6) \quad \beta \geq b_1(\alpha), \quad \beta \geq b_2(\alpha), \quad \beta \leq b_3(\alpha)$$

ist, wobei  $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) = -[1 - \sqrt{(1 + M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 + M^2)}]$  für die Grenzpunkte der Menge  $\Omega$  in Kraft ist.

Von dem Satz 2 folgt der folgende Satz, welcher die Form des Gebietes  $\Omega$  in Abhängigkeit von der Zahl  $m$  beschreibt. Es gilt dabei folgende Bezeichnung:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 + M^2)}), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 + M^2)})\sqrt[4]{(1 + M^2)},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 + M^2)})\sqrt{(1 + M^2)}.$$

**Satz 3. I.** Es sei  $m^2 \leq -1 + \sqrt{(1 + M^2)}$ . Dann enthält die Menge  $\Omega$  den einzigen Punkt  $[\alpha_1, -1]$ .

II. Es sei

$$(7) \quad -1 + \sqrt{(1 + M^2)} < m^2 \leq 2(1 + \sqrt{(1 + M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 + M^2)^3}) :$$

$$: [-2 + \sqrt{(1 + M^2)} + \sqrt[4]{(1 + M^2)^3}].$$

Dann enthält  $\Omega$  genau die Punkte  $[\alpha, \beta]$ , für die gleichzeitig die Ungleichungen

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad b_1(\alpha) \leq \beta \leq b_3(\alpha)$$

gelten, wobei  $\alpha_2$  eine einzige, im Intervall  $(\alpha_1, \alpha_3)$  liegende, Wurzel der Gleichung  $b_1(\alpha) = b_3(\alpha)$  ist; (dabei gilt  $\alpha_2 = \alpha_3$  im Falle der Gleichheit in der Formel (7)).

III. Es sei

$$(8) \quad 2(1 - \sqrt{(1 + M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 + M^2)^3})/[-2 + \sqrt{(1 + M^2)} +$$

$$+ \sqrt[4]{(1 + M^2)^3}] < m^2 \leq M^2.$$

Dann enthält  $\Omega$  genau die Punkte  $[\alpha, \beta]$ , welche die folgende Ungleichungen erfüllen:

$$\text{für } \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_3 \text{ ist } b_1(\alpha) \leq \beta \leq b_3(\alpha),$$

$$\text{für } \alpha_3 \leq \alpha \leq \alpha_4 \text{ ist } b_2(\alpha) \leq \beta \leq b_3(\alpha);$$

dabei  $\alpha_4$  die einzige, im Intervall  $(\alpha_3, \alpha_5)$  liegende, Wurzel der Gleichung  $b_2(\alpha) = b_3(\alpha)$  bezeichnet (es gilt dabei  $\alpha_4 = \alpha_5$  im Falle der Gleichheit in der Formel (8)).

Die Gestalt der Menge  $\Omega$  für den Fall III mit der scharfen Ungleichung in der Beziehung (8) ist von Abb. 1. sichtbar. Bemerke man, dass die Gerade  $B_1$  ähnlicherweise wie in der Arbeit [2] den Graphen der Funktion  $\beta = B_1(\alpha) = 2\alpha(1 - \sqrt{(1 + M^2)})/M^2$  darstellt (offensichtlich ist  $B_1(\alpha_1) = -1$  für jede Zahl  $M$ ). Die Gerade  $B_1$  ist ferner eine Tangente der Graphen der Funktionen  $b_1, b_2$  mit den Berührungspunkten  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_5$ .

Der Satz 4 gibt eine praktisch anwendbare Approximation des optimalen Parameterpaares  $[\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}]$  an, für welches das untersuchte Iterationsverfahren am schnellsten konvergiert (d.h. wenn  $\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) = \min_{\substack{\alpha > 0 \\ \beta \neq 0}} \varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta))$  ist).

**Satz 4.** Es sei  $-1 + \sqrt{(1 + M^2)} < m^2 \leq M^2$  und

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= (1 + \sqrt{(1 + M^2)})(1 + m^2)/[1 + \sqrt{(1 + M^2)} + m^2], \\ \beta_0 &= -2(1 + m^2)/[1 + \sqrt{(1 + M^2)} + m^2]. \end{aligned}$$

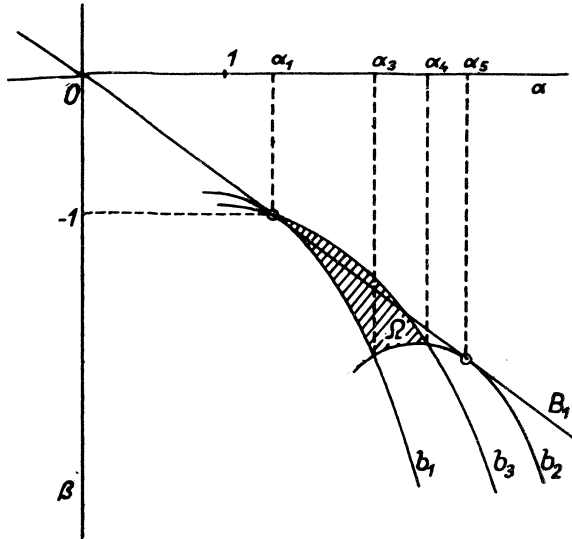


Abb. 1

Dann liegt der Punkt  $[\alpha_0, \beta_0]$  im Inneren des Gebietes  $\Omega$  und es gibt

$$(10) \quad \begin{aligned} \varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) &\leq \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = \min_{[\alpha, \beta] \in B_1} \varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) = \\ &= \sqrt{[m^2(M^2 - m^2)](1 + \sqrt{(1 + M^2)})^2 (1 + m^2)} < \\ &< -[1 - \sqrt{(1 + M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 + M^2)}], \end{aligned}$$

wobei für  $m^2 = M^2$  die Gleichheiten

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) = \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = 0$$

gelten und für  $m^2 = -1 + \sqrt{(1 + M^2)}$   $\alpha_0 = \alpha_1, \beta_0 = -1$ ,

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = \varrho(\mathbf{T}(\alpha_1, -1)) = -[1 - \sqrt{(1 + M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 + M^2)}]$$

erfüllt ist.

Von dem Satz 4 folgt sofort, dass im Falle  $\mu_1^2 < 0, i = 1, \dots, n$  die untersuchte Methode schneller als das Oberrelaxationsverfahren konvergiert, insofern  $\mu_i^2 < 1 - \sqrt{(1 + M^2)}$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt; dabei folgt von (10), dass der Wert  $\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}))$  desto kleiner ist, je kleiner die Zahl  $M^2 - m^2$  ist.

*Literaturverzeichnis*

- [1] Šisler, M.: Über die Optimierung eines zweiparametrischen Iterationsverfahrens. *Aplikace Matematiky*, 20, 1975, 126—142.  
[2] Šisler, M.: Bemerkungen zur Optimierung eines zweiparametrischen Iterationsverfahrens. *Aplikace matematiky*, 21, 1976, 213—220.

Souhrn

O JISTÉ ITERAČNÍ METODĚ PRO ŘEŠENÍ SPECIÁLNÍCH LINEÁRNÍCH SOUSTAV S CYKlickOU MATICÍ

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá jistou iterační metodou závislou na dvou reálných parametrech  $\alpha$ ,  $\beta$ , která je zobecněním superrelaxační metody. Je uvažována soustava lineárních rovnic typu  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{B}$  je dvoucyklická, souhlasně uspořádaná matice; přitom se předpokládá, že čtverce vlastních čísel matice  $\mathbf{B}$  jsou záporné. V práci jsou uvedeny podmínky, za kterých konverguje uvažovaná metoda rychleji než superrelaxační metoda. Jsou uvedeny též explicitní vzorce pro přibližné hodnoty optimálních parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$ .

*Adresse des Auteurs:* RNDr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.