Libuše Grygarová

Sphärische Abbildung konvexer abgeschlossener Mengen in E_n und ihre charakteristischen Eigenschaften

Aplikace matematiky, Vol. 23 (1978), No. 2, 115–131

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103736

SPHÄRISCHE ABBILDUNG KONVEXER ABGESCHLOSSENER MENGEN IN $\mathbf{E}_n$ UND IHRE CHARAKTERISTISCHE EIGENSCHAFTEN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen am 23. September 1976)

Der Begriff der sphärischen Abbildung konvexer abgeschlossener Mengen, der den Hauptbegriff in dieser Arbeit darstellt, ist im gewissen Sinne eine Erweiterung des üblichen Begriffs der sphärischen Abbildung von regulären Hyperflächen im euklidischen Raum, der aus der klassischen Differentialgeometrie bekannt ist [1]. Eine solche Erweiterung scheint ganz natürlich zu sein, da der Rand einer konvexen d-dimensionalen Menge in $\mathbf{E}_n$ $(1 < d \leqq n)$ (unter dem Ansatz bestimmter Glattheit) eine Hyperfläche in der linearen Hülle dieser konvexen Menge darstellt. In der Arbeit handelt es sich um den allgemeinen Begriff der sphärischen Abbildung in dem Sinne, dass auch abgeschlossene konvexe Mengen, deren Rand eine Hyperfläche im topologischen Sinne (also eine Hyperfläche im üblichen Sinne der lokalen homeomorphen Abbildung [2]) in der betreffenden linearen Hülle der fraglichen Menge ist, einbezogen werden.

Nachdem der Begriff der sphärischen Abbildung von konvexen abgeschlossenen Mengen und sein Zusammenhang mit anderen Begriffen aus der Theorie der konvexen Mengen angeführt wird, werden einige charakteristische Eigenschaften dieser Abbildung behandelt. Der Begriff eines Paars von sphärisch äquivalenten abgeschlossenen konvexen Mengen, dem (und dessen Folgerungen) ein Teil der Bretrachtungen gewidmet ist, erweist sich als sehr nützlich. Der letzte Teil der Arbeit betrifft die konvexe Abbildung von sogenannten streng konvexen Mengen, die insbesondere in der Theorie der parametrischen konvexen Optimierung eine Rolle spielt.

& 1 EINLEITENDE BEMERKUNGEN

Um den Begriff der sphärischen Abbildung einer abgeschlossenen konvexen Menge einführen zu können, ist es nützlich die Begriffe bestimmter, mit einer konvexen Menge $\mathbf{M}(\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n, \mathbf{M} \neq \emptyset)$ verbundenen Kegel anzugeben. Es handelt sich um die folgenden Begriffe:

1. Der Projektionskegel $\mathbf{P_M}(\mathbf{x}_0)$ der Menge $\mathbf{M}$ im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{E}_n$,

$$\mathbf{P_M}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0),\ \mathbf{y} \in \mathbf{M},\ t \geqq 0\} ;$$

2. Der (lokale) Berührungskegel $\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ der Menge $\mathbf{M}$ in Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$,

$$\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0) = \overline{\mathbf{P}}_\mathbf{M}(\mathbf{x}_0) ;^1)$$

3. Der Recessionskegel $\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0)$ der Menge $\mathbf{M}$ im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$,

$$\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{M} \mid \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in \mathbf{M},\ t \geqq 0\} ;$$

4. Der Polarkegel ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ zu einem konvexen Kegel $\mathbf{K}$ in seinem Scheitel $\mathbf{x}_0$,

$${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0,\ \mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \leqq 0,\ \mathbf{y} \in \mathbf{K}\} .$$

Die oben eingeführten Kegel besitzen ihre bestimmte charakteristische Eigenschaften und es gibt zwischen ihnen gewisse Zusammenhänge, die in der konvexen Analysis wohlbekannt sind (z. B. [4], [5]) und die wir – wegen unserer Zielstellung – in der folgenden kurzen Übersicht anführen.

(a) Für ein jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ stellt $\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ einen abgeschlossenen Kegel mit $\mathbf{M} \subset \subset \mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ dar;

(b) Es gilt $\dim \mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0) = \dim \mathbf{M}$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$;

(c) Es gilt $\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \subset \mathbf{M}$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$;

(d) $\mathbf{M}$ beschränkt $\Leftrightarrow \mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0\}$ ($\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ beliebig);

(e) Falls $\mathbf{M}$ eine unbeschränkte abgeschlossene konvexe Menge its, so stellt $\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0)$ einen abgeschlossenen konvexen Kegel mit $\mathbf{x}_0$ als Scheitel in $\mathbf{E}_n$ dar ($\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ beliebig);

(f) Falls $\mathbf{M}$ beschränkt und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{M}$ beliebig sind, so gilt

$$\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1),\ \mathbf{y} \in \mathbf{M_R}(\mathbf{x}_1)\} ;$$

(g) Sind ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ konvexe Mengen mit ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ und $\mathbf{x}_0 \in {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M}$ beliebig, dann gilt $({}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M})_\mathbf{R}(\mathbf{x}_0) = {}_1\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \cap {}_2\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0)$;

(h) Falls $\mathbf{M}$ konvex, abgeschlossen und $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ beliebig sind und definiert man

$$\mathfrak{A} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_n \mid \ \|\mathbf{v}\| = 1,\ \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \in \mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0),\ t \geqq 0\} ,$$
$$\mathfrak{B}_\mathbf{x} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E}_n \mid \ \|\mathbf{v}\| = 1,\ \mathbf{x} + \mathbf{v}t \in \mathbf{K_M}(\mathbf{x}),\ t \geqq 0\} , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{M} ,$$

so stellen die Mengen

$$\mathbf{M_R} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{v}t,\ \mathbf{v} \in \mathfrak{A},\ t \geqq 0\} , \quad \mathbf{K}'_\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{y} = \mathbf{v}t,\ \mathbf{v} \in \mathfrak{B}_\mathbf{x} ,\ t \geqq 0\} , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{M} ,$$

---

[1]) In der Arbeit [3] wurde der Begriff eines (lokalen) Berührungskegels $\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ für eine beliebige Menge $\mathbf{M}$ in ihrem Punkt $\mathbf{x}_0$ durch $\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0\} \bigcup_\sigma \Sigma\, p(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})$ eingeführt wobei $p(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})$ sogenannte σ-Halbgeraden sind, die in dieser zitierten Arbeit definiert wurden.

Kegel, dar die durch Translation aus den Kegeln $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{K}_{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{M}$) in den Koordinatenursprung $\mathbf{o}$ entstehen und es gilt

$$\overline{\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}}} {}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = {}^p\mathbf{M}_{\mathbf{R}}\,, \quad \text{rel. int. } {}^p\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \subset \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}} {}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x})\,;$$

(i) Falls $\mathbf{K}$ ein konvexer Kegel mit dem Scheitel $\mathbf{x}_0$ ist, so ist ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ ein abgeschlossener konvexer Kegel mit $\mathbf{x}_0$ als Scheitel;

(j) Es gilt $\mathbf{K} = \{\mathbf{x}_0\} \Leftrightarrow {}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{E}_n$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{E}_n$;

(k) Es gilt ${}^p({}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)) = \overline{\mathbf{K}}$, wobei ${}^p({}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0))$ der Polarkegel zu dem Kegel ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ in seinem Scheitel $\mathbf{x}_0$ ist;

(l) Für $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_0$ gilt $\mathbf{K} \subset \overline{\mathbf{H}}^- \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 \in {}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$, wobei

$$\overline{\mathbf{H}}^- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leqq 0\}\,;$$

(m) Die Scheitelmenge $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}$ eines konvexen Kegels $\mathbf{K}$ stellt einen linearen Unterraum in $\mathbf{E}_n$ dar;

(n) Ist $\mathbf{L}_d$ die lineare Hülle eines konvexen Kegels $\mathbf{K}$ mit $\mathbf{x}_0$ als Scheitel, so stellt die Scheitelmenge des Polarkegels ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ einen linearen ($(n-d)$-dimensionalen) Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{x}_0)$, der dual zu $\mathbf{L}_d$ ist, dar (also $\mathbf{L}_d \cap \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0\}$);

(o) Ist $\mathbf{K}$ ein abgeschlossener konvexer Kegel mit $\mathbf{x}_0$ als Scheitel und ist die Dimension seiner Scheitelmenge gleich d, so gilt $\dim {}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0) = n - d$;

(p) Falls $\mathbf{x}_0$ der den zwei konvexen Kegel $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ gemeinsame Scheitel ist, wobei $\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2$, so gilt ${}^p\mathbf{K}_2(\mathbf{x}_0) \subset {}^p\mathbf{K}_1(\mathbf{x}_0)$;

(q) Es sei $\mathbf{K}$ ein abgeschlossener konvexer Kegel mit $\mathbf{x}_0$ als Scheitel, $\dim \mathbf{K} \geqq 2$, der weder einen linearen Unterraum noch einen Halbraum in $\mathbf{E}_n$ darstellt. So hat der zugehörige Polarkegel ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ dieselbe Eigenschaft. Weiter besitzt ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ Randpunkte, die verschieden von $\mathbf{x}_0$ sind (in bezug auf die lineare Hülle von ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$). Zu einem beliebigen Punkt $\mathbf{x}^*$ des Randes $\partial {}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ von ${}^p\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$ mit $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}_0$ gibt es einen Punkt $\mathbf{y}^* \in \partial\mathbf{K}$, mit $(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0, \mathbf{y}^* - \mathbf{x}_0) = 0$.

& 2 VEREINBARUNG

Es soll in Weiterem das Symbol $\mathbf{M}$ stets eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge in $\mathbf{E}_n$, $\partial\mathbf{M}$ den Rand von $\mathbf{M}$ bedeuten.

Definition 1. *Die Menge*

$$\mathbf{S}_{\mathbf{M}} = \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}} {}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{Q}\,, \tag{1}$$

mit

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}\,, \tag{2}$$

wobei ${}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$ *die Bedeutung aus* (h) *hat, nennt man das sphärische Bild von* $\mathbf{M}$.

Bemerkung 1. Nach (h) gilt offenbar

$$\overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}} = {}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap \mathbf{Q}\,. \tag{3}$$

Satz 1. *Es gilt* $\mathbf{S}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$ *genau dann, wenn* $\mathbf{M}$ *beschränkt ist.*

Beweis. Ist $\mathbf{M}$ beschränkt, so gilt $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0\}$ für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ (nach (d)) und daher (nach (h)) $\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{o}\}$. Daraus mit Hinsicht auf die Eigenschaft (j) folgt dann ${}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \mathbf{E}_n$ und daher auch rel. int. ${}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \text{int}\,{}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \mathbf{E}_n$. Nach (h) ergibt sich daraus $\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}} {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_n$ und daher laut (1) gilt $\mathbf{S}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$.

Ist anderseits $\mathbf{S}_{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$ und $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{0}$ ein beliebiger Punkt, dann schneidet die Halbgerade $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{y}^* t,\ t \geqq 0\}$ die Hypersphäre $\mathbf{Q}$ aus (2) in einem einzigen Punkt $\mathbf{x}^* \in \mathbf{Q}(=\mathbf{S}_{\mathbf{M}})$ und nach (1) gilt $\mathbf{x}^* \in \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}} {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$. Daraus folgt die Existenz eines Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ mit $\mathbf{x}^* \in {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_0)$ und, da ${}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_0)$ ein konvexer Kegel mit $\mathbf{o}$ als Scheitel ist, gilt ebenfalls $\mathbf{y}^* \in {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_0)$. Da $\mathbf{y}^* \in \mathbf{E}_n$, $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{0}$ beliebig gewählt war und $\mathbf{o} \in {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ gilt, folgt daraus $\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}} {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_n$ und daher ebenfalls (mit Hinsicht auf (h)) $\overline{\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{M}}} {}^{p}\mathbf{K}'_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = {}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \mathbf{E}_n$. Es gilt also $\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{o}\}$ und $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0\}$ für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$, voraus laut (d) die Beschränktheit der Menge $\mathbf{M}$ folgt.

Definition 2. *Ist* $\mathbf{R}$ *eine Hyperebene mit* $\mathbf{o} \in \mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{H}}^+$, $\overline{\mathbf{H}}^-$ *die ihr zugehörige abgeschlossene Halbräume und hat* $\mathbf{Q}$ *die Bedeutung* (2), *so nennt man*

$$^{\mathbf{Q}}\mathbf{H}^+ = \overline{\mathbf{H}}^+ \cap \mathbf{Q}\,, \quad ^{\mathbf{Q}}\mathbf{H}^- = \overline{\mathbf{H}}^- \cap \mathbf{Q} \tag{4}$$

(*abgeschlossene*) *Hemisphären der Hypersphäre* $\mathbf{Q}$.

Satz 2. *Ist die Menge* $\mathbf{M}$ *unbeschränkt, so gibt es eine Hemisphäre* $^{\mathbf{Q}}\mathbf{H}^+$ *von* $\mathbf{Q}$ *mit* $\mathbf{S}_{\mathbf{M}} \subset {}^{\mathbf{Q}}\mathbf{H}^+$.

Beweis. Aus der Unbeschränktheit der Menge $\mathbf{M}$ folgt (nach (d), (j) und (h)) ${}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \neq \mathbf{E}_n$. Betrachten wir einen beliebigen Punkt $\mathbf{x}^* \in \mathbf{E}_n \setminus {}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ und die Halbgerade

$$p^* = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^* t\,, \quad t \geqq 0\}\,,$$

die mit der Menge ${}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ nur den Punkt $\mathbf{o}$ gemeinsam hat. Laut (e) und (i) und nach dem Trennungssatz von konvexen Mengen gibt es eine Hyperebene $\mathbf{R}$, die beide Mengen ${}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$, p^* trennt. Bezeichnen wir $\overline{\mathbf{H}}^+$ denjenigen abgeschlossenen Halbraum, dessen Rand die Hyperebene $\mathbf{R}$ ist und der die Eigenschaft ${}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \subset \overline{\mathbf{H}}^+$ besitzt. Nach (3), (4) fogt daraus $\overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}} = {}^{p}\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap \mathbf{Q} \subset \overline{\mathbf{H}}^+ \cap \mathbf{Q} = {}^{\mathbf{Q}}\mathbf{H}^+$ und weiter $\mathbf{S}_{\mathbf{M}} \subset {}^{\mathbf{Q}}\mathbf{H}^+$.

Satz 3. *Es gilt* $\mathbf{S_M} = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{E}_n$.

Beweis. Im Falle $\mathbf{S_M} = \emptyset$ gilt ebenfalls $\bar{\mathbf{S}}_\mathbf{M} = \emptyset$ und nach (3) dann ${}^p\mathbf{M_R} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$. Da ${}^p\mathbf{M_R}$ ein konvexer Kegel mit dem Scheitel $\mathbf{o}$ ist, folgt daraus ${}^p\mathbf{M_R} = \{\mathbf{o}\}$. Nach (k), (e), (j) gilt dann für den Polarkegel ${}^p({}^p\mathbf{M_R})$ zu dem Kegel ${}^p\mathbf{M_R}$ im Punkt $\mathbf{o}$ die Gleichheit ${}^p({}^p\mathbf{M_R}) = \mathbf{M_R} = \mathbf{E}_n$. Nach (h) gilt dann ebenfalls $\mathbf{M_R}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_n$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, was nach (c) zu $\mathbf{M} = \mathbf{E}_n$ führt.

Im Falle $\mathbf{M} = \mathbf{E}_n$ gilt $\mathbf{M_R}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_n$ für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ woraus nach (j) ${}^p\mathbf{M_R}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$ folgt. Daraus (siehe (h)) ergibt sich ${}^p\mathbf{M_R} = \{\mathbf{o}\}$. Dies hat nach (3) zufolge $\bar{\mathbf{S}}_\mathbf{M} = \emptyset$ und daher $\mathbf{S_M} = \emptyset$.

Satz 4. *Im Falle* $\mathbf{M} \subsetneqq \mathbf{E}_n$ *stellt die Menge* $\mathbf{S_M}$ *den maximalen Definitionsbereich der Funktion*

$$\varphi(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}, \quad \|\mathbf{y}\| = 1. \tag{5}$$

Beweis. Definieren wir die Menge

$$\mathfrak{A} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{E}_n \mid \|\mathbf{y}\| = 1, \quad \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}! \text{ lösbar}\}. \tag{6}$$

Nach Satz 3 gilt $\mathbf{S_M} \neq \emptyset$. Sei $\mathbf{y} \in \mathbf{S_M}$ beliebig gewählt. Nach (1) gibt es dann mindestens einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ mit $\mathbf{y} \in {}^p\mathbf{K}'_\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$, woraus nach der Eigenschaft (h) $\mathbf{y} + \mathbf{x}_0 \in {}^p\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ folgt. Bezeichnet man

$$\bar{\mathbf{H}}^- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leqq 0\}, \tag{7}$$

so gilt nach (l) $\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0) \subset \bar{\mathbf{H}}^-$. Wegen $\mathbf{M} \subset \mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ (nach (a)), gilt $(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leqq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, d.h. $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqq (\mathbf{y}, \mathbf{x}_0)$. Wegen $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$, ergibt sich daraus $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \{(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$ und daher $\mathbf{y} \in \mathfrak{A}$. Da aber $\mathbf{y} \in \mathbf{S_M}$ beliebig war, ist hiemit

$$\emptyset \neq \mathbf{S_M} \subset \mathfrak{A} \tag{8}$$

bewiesen.

Ist anderseits $\mathbf{y} \in \mathfrak{A}$ beliebig, so gibt es nach (6) einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ mit $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqq (\mathbf{y}, \mathbf{x}_0)$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Es gilt also

$$\mathbf{M} \subset \bar{\mathbf{H}}^-, \tag{9}$$

wobei $\bar{\mathbf{H}}^-$ die Bedeutung aus (7) hat. Der lokale Berührungskegel $\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ der Menge $\mathbf{M}$ besitzt ebenfalls die Eigenschaft

$$\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0) \subset \bar{\mathbf{H}}^-, \tag{10}$$

denn, wäre es nicht der Fall, so müsste es einen Punkt $\mathbf{x}^*$ mit $\mathbf{x}^* \in \mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}^* \in \mathbf{H}^+$, wobei $\mathbf{H}^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) > 0\}$ geben. Dann wäre aber auch

$$p = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0), \quad t > 0\} \subset \mathbf{H}^+,$$

wobei zugleich eine solche polyedrische Umgebung U der Halbgerade p mit $U \subset \mathbf{H}^+$ existieren würde[2]). Wegen $p \subset \mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$ stellt dann die Halbgerade p (siehe Fussnote 1)) eine σ-Halbgerade dar und (nach der Definition einer σ-Halbgeraden) gäbe es dann einen Punkt $\mathbf{x} \in U \subset \mathbf{H}^+$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, was im Widerspruch mit (9) ist und es gilt daher (10). Nach der Eigenschaft (l) ist dann $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \in {}^p\mathbf{K_M}(\mathbf{x}_0)$, woraus nach (h) $\mathbf{y} \in {}^p\mathbf{K}'_\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$ folgt. Nach (l) und wegen $\|\mathbf{y}\| = 1$ ist dann $\mathbf{y} \in \mathbf{S_M}$ und da $\mathbf{y} \in \mathfrak{A}$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus $\mathfrak{A} \subset \mathbf{S_M}$. Daraus ergibt sich nach (8), (6) die Behauptung des Satzes.

Bemerkung 2. Nach dem Beweis des Satzes 4 und nach Satz 3 gilt

$$\mathbf{S_M} = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{A} = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{E}_n\,.$$

Satz 5. *Es seien* ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ *abgeschlossene konvexe Mengen in* $\mathbf{E}_n$ *mit* ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$, $\mathbf{x}_0 \in {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M}$ *beliebig und es gelte* $\dim\left({}_1\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \cap {}_2\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0)\right) \geqq 1$. *Dann gibt es eine Hemisphäre* ${}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$ *der Hypersphäre* $\mathbf{Q}$ *aus* (2) *mit*

$$\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+\,,\quad \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+\,.$$

Beweis. Gilt mindestens für eine der Mengen ${}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ ${}_i\mathbf{M} = \mathbf{E}_n$, so ist die Behauptung trivial. Sonst ergibt sich aus der Voraussetzung $\dim\left({}_1\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \cap \cap\, {}_2\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0)\right) \geqq 1$ (nach (g), (d)), dass die Menge ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M}$ unbeschränkt (konvex und abgeschlossen) ist. Nach Satz 2 gibt es dann eine Hemisphäre ${}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$ der Hypersphäre $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}\cap{}_2\mathbf{M}} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$, woraus nach (4)

$$\bar{\mathbf{S}}_{{}_1\mathbf{M}\cap{}_2\mathbf{M}} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+ \tag{11}$$

folgt. Wegen ${}_i\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \supset \left({}_1\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \cap {}_2\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0)\right)$ $(i = 1, 2)$, ist nach (g), (p) ${}^p_i\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \subset \subset {}^p\left({}_1\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0) \cap {}_2\mathbf{M_R}(\mathbf{x}_0)\right)$ $(i = 1, 2)$. Mit Hinsicht auf (g), (h) erhalten wir dann ${}^p_i\mathbf{M_R} \subset {}^p({}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M})_\mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$ und aus der Bemerkung 1 und aus (11) folgt $\bar{\mathbf{S}}_{{}_i\mathbf{M}} = = {}^p_i\mathbf{M_R} \cap \mathbf{Q} \subset \bar{\mathbf{S}}_{{}_1\mathbf{M}\cap{}_2\mathbf{M}} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$ $(i = 1, 2)$ und daher auch $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$, $\mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$.

Definition 3. *Zwei abgeschlossene konvexe Mengen* ${}_i\mathbf{M} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ *heissen sphärisch äquivalent, falls* $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}}$ *gilt.*

Bemerkung 3. Ist $\mathbf{M} \neq \emptyset$ eine konvexe Menge in $\mathbf{E}_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, so stellt die Menge

$$O(\mathbf{M}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{M}) \equiv \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{M}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}$$

die sogenannte (sphärische) ε-Umgebung von $\mathbf{M}$ dar und es lässt sich zeigen, dass $O(\mathbf{M}, \varepsilon)$ stets konvex mit $\dim O(\mathbf{M}, \varepsilon) = n$ ist.

---

[2]) Der Begriff einer polyedrischen Umgebung einer (offenen) Halbgeraden wurde in der Arbeit [3] eingeführt.

Der folgende Satz geht einen Zusammenhang zwischen den sphärischen Bildern von $\mathbf{M}$ und $O(\mathbf{M}, \varepsilon)$ an.

Satz 6. *Falls $O(\mathbf{M}, \varepsilon)$ eine beliebige ε-Umgebung der Menge $\mathbf{M}$ ist $(\mathbf{M} \neq \mathbf{E}_n)$, dann sind die Mengen $\mathbf{M}$, $\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)$ sphärisch äquivalent.*

Beweis. Falls $\mathbf{M}$ beschränkt ist, so gilt nach Satz 1 die Behauptung trivial. Ist es nicht der Fall und wählt man $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathbf{M}}$ beliebig, dann existiert nach Satz 4 ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ mit $\max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ d.h.

$$(12) \qquad (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leqq 0\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{M}\,.$$

Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{x} \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)$ existiert dann ein Punkt $\mathbf{x}' \in \mathbf{M}$ mit $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \leqq \varepsilon$ und nach (12) gilt

$$(13) \qquad \begin{aligned} (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}') + (\mathbf{y}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) \leqq \\ &\leqq \|\mathbf{y}\| \,.\, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \leqq \varepsilon\,, \quad \mathbf{x} \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Für den Punkt $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{y}$, für welchen offenbar $\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon$ ist, gilt dann $\mathbf{x}'_0 \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)$ und weiter $(\mathbf{y}, \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}, \varepsilon\mathbf{y}) = \varepsilon$. Daraus und aus (13) erhalten wir $\max\limits_{\mathbf{x} \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)} \{(\mathbf{y}, \mathbf{x})\} = (\mathbf{y}, \mathbf{x}'_0)$, woraus nach Satz 4 $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)}$ folgt. Wegen der Willkürlichkeit der Wahl von $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathbf{M}}$ ergibt sich daraus

$$(14) \qquad \mathbf{S}_{\mathbf{M}} \subset \mathbf{S}_{\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)}\,.$$

Wählen wir anderseits $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)}$ beliebig. Nach Satz 4 gibt es einen Punkt $\mathbf{x}'_0 \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)$ mit

$$(15) \qquad (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) \leqq 0\,, \quad \mathbf{x} \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)\,.$$

Der Punkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0 - \varepsilon\mathbf{y}$ hat wegen (15) die Eigenschaft

$$(16) \qquad \begin{aligned} (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 + \varepsilon\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{y}, \varepsilon\mathbf{y}) \leqq \varepsilon\,, \\ \mathbf{x} \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Wäre mindestens für einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ die Ungleichung $(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) > 0$ erfüllt, dann würde für den Punkt $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{y} \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)$ die Ungleichung $(\mathbf{y}, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}, \mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \varepsilon > \varepsilon$ gelten, was einen Widerspruch mit (16) bedeutet. Es gilt daher

$$(17) \qquad (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leqq 0\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{M}\,.$$

Die Hyperkugel

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0\| \leqq \varepsilon\}$$

hat aufgrund der Wahl von $\mathbf{x}_0'$ einen nichtleeren Durchschnitt mit der Menge $\mathbf{M}$, wobei sie mit der Hyperebene

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\}$$

den einzigen Punkt $\mathbf{x}_0$ gemeinsam hat. Da $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0) = \varepsilon > 0$ gilt, gilt auch $(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geqq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$, woraus nach (17) $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ folgt. Nach (17) erhält man dann $\max_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \{(\mathbf{y}, \mathbf{x})\} = (\mathbf{y}, \mathbf{x}_0)$ und nach Satz 4 ist weiter $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathbf{M}}$. Da $\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\bar{O}(\mathbf{M},\varepsilon)}$ beliebig war, folgt daraus $\mathbf{S}_{\bar{O}(\mathbf{M},\varepsilon)} \subset \mathbf{S}_{\mathbf{M}}$ und laut (14) die Behauptung des Satzes.

Bemerkung 4. Aus dem obigen Satz und laut Bemerkung 1 folgt unmittelbar

$${}^p\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \cap \mathbf{Q} = \bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{S}}_{\bar{O}(\mathbf{M},\varepsilon)} = {}^p[\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)]_{\mathbf{R}} \cap \mathbf{Q}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Da ${}^p\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$, ${}^p[\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)]_{\mathbf{R}}$ konvexe Kegel mit $\mathbf{o}$ als Scheitel und $\mathbf{Q}$ die Hypersphäre aus (2) sind, so gilt ebenfalls ${}^p\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = {}^p[\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)]_{\mathbf{R}}$. Nach Eigenschaften (k) und (e) ergibt sich daraus $\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = [\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)]_{\mathbf{R}}$. Dies hat mit Hinsicht auf (h) die folgende Behauptung zufolge: Für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ und jeden Punkt $\mathbf{x}_\varepsilon \in \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ beliebig) unterscheiden sich die Recessionskegel $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$ und $[\bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)]_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_\varepsilon)$ höchstens durch eine Translation.

Satz 7. *Ist $O(\mathbf{M}, \varepsilon)$ eine beliebige ε-Umgebung der Menge $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}_n$ und $\mathbf{N}$ eine beliebige abgeschlossene konvexe Menge in $\mathbf{E}_n$ mit*

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{N} \subset O(\mathbf{M}, \varepsilon),$$

so gilt für die sphärischen Bilder der Mengen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ die Gleichheit

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{N}}.$$

Beweis. Falls $\mathbf{M}$ beschränkt ist, so gilt aufgrund des Satzes 1 die Behauptung trivialerweise.

Wählt man $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ beliebig, so ergibt sich aus der Inklusion $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ und aus der Eigenschaft (c) $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0) \subset \mathbf{N}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$ und daher (nach (p)) gilt ${}^p\mathbf{M}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0) \subset {}^p\mathbf{N}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$. Daraus laut (h) folgt ${}^p\mathbf{M}_{\mathbf{R}} \supset {}^p\mathbf{N}_{\mathbf{R}}$ und nach Bemerkung 1 weiter

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}} \supset \bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{N}}. \tag{18}$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich aus der Beziehung $\mathbf{N} \subset O(\mathbf{M}, \varepsilon) \subset \bar{O}(\mathbf{M}, \varepsilon)$ die Inklusion $\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{N}} \supset \bar{\mathbf{S}}_{\bar{O}(\mathbf{M},\varepsilon)}$, aus der sich nach (18) und nach Satz 6 die Behauptung des Satzes ergibt.

Bemerkung 5. An dem folgenden Beispiel soll gezeigt werden, dass für zwei Mengen aus Satz 7 die Gleichheit $\mathbf{S}_{\mathbf{M}} = \mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ allgemein nicht gilt.
Die Mengen

$$\mathbf{M} = \left\{\xi \in \mathbf{E}_2 \mid {}^1\xi > 0,\quad {}^2\xi \geqq \frac{k}{{}^1\xi}\right\} \quad (0 < k < 1),$$
$$\mathbf{N} = \{\xi \in \mathbf{E}_2 \mid {}^1\xi \geqq 0,\quad {}^2\xi \geqq 0\},$$

stellen offenbar konvexe abgeschlossene nichtleere Mengen in $\mathbf{E}_2$ mit $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ dar. Wählt man $\varepsilon > \sqrt{2k}$, so stellt man leicht fest, dass $\mathbf{N} \subset O(\mathbf{M}, \varepsilon)$ gilt. Die Voraussetzungen des Satzes 7 sind hier erfüllt. In unserem Falle ist

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{N}} = \{\xi \in \mathbf{E}_2 \mid ({}^1\xi)^2 + ({}^2\xi)^2 = 1\,,\quad {}^1\xi, {}^2\xi \leqq 0\}\,,$$

wobei

$$\mathbf{S}_{\mathbf{M}} = \{\xi \in \mathbf{E}_2 \mid ({}^1\xi)^2 + ({}^2\xi)^2 = 1,\ {}^1\xi, {}^2\xi < 0\}\,,$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{N}} = \{\xi \in \mathbf{E}_2 \mid ({}^1\xi)^2 + ({}^2\xi)^2 = 1,\ {}^1\xi, {}^2\xi \leqq 0\}\,.$$

Es ist also $\mathbf{S}_{\mathbf{M}} \neq \mathbf{S}_{\mathbf{N}}$.

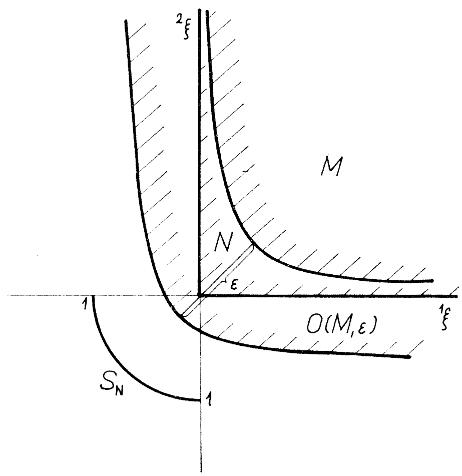

Fig. 1.

Satz 8. *Es seien* ${}_i\mathbf{M} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ *abgeschlossene unbeschränkte konvexe Mengen in* $\mathbf{E}_n$ *und* $K > 0$ *eine Zahl mit*

$$(19) \qquad {}_1\mathbf{M} \setminus ({}_1\mathbf{M} \cap \mathbf{Q}(K)) = {}_2\mathbf{M} \setminus ({}_2\mathbf{M} \cap \mathbf{Q}(K))\,,$$

wobei $\mathbf{Q}(K) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \|\mathbf{x}\| \leqq K\}$ *ist. Dann gilt* $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}}$[3]).

Beweis. Es sei zuerst ${}_1\mathbf{M} = \mathbf{E}_n$ und ${}_2\mathbf{M} \neq \mathbf{E}_n$. Da $\mathbf{Q}(K)$ beschränkt und ${}_2\mathbf{M}$ konvex ist, so gibt es offenbar einen Punkt $\mathbf{x} \notin \mathbf{Q}(K)$, $\mathbf{x} \notin {}_2\mathbf{M} \setminus ({}_2\mathbf{M} \cap \mathbf{Q}(K))$. Nach (19) muss dann gelten $\mathbf{x}_1 \notin {}_1\mathbf{M} \setminus ({}_1\mathbf{M} \cap \mathbf{Q}(K)) = \mathbf{E}_n \setminus \mathbf{Q}(K)$ d. h. $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{Q}(K)$, was aber einen Widerspruch darstellt. Im Falle, wo die Rolle der Mengen ${}_1\mathbf{M}$ und ${}_2\mathbf{M}$ ausgetauscht wird, haben wir dieselbe Schlussfolgerung.

[3]) Ist eine der Mengen ${}_i\mathbf{M}$, $i \in \{1, 2\}$ beschränkt, so ist nach (19) auch die zweite dieser Mengen beschränkt und nach Satz 1 gilt $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} = \mathbf{Q}$. Wir können uns daher auf unbeschränkte Mengen ${}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$ einschränken.

Im Falle ${}_1\mathbf{M} = {}_2\mathbf{M} = \mathbf{E}_n$ gilt nach Satz 3 $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} = \emptyset$ und die Behauptung des Satzes gilt trivial.

Es sei ${}_i\mathbf{M} \neq \mathbf{E}_n$ $(i = 1, 2)$. Der Fall ${}_i\mathbf{M} \setminus ({}_i\mathbf{M} \cap \mathbf{Q}(K)) = \emptyset$ für mindestens einen Index $i \in \{1, 2\}$ kann nicht eintreten, da die Menge $\mathbf{Q}(K)$ beschränkt ist.

Im Falle $\mathbf{Q}(K) \cap {}_i\mathbf{M} = \emptyset$ $(i = 1, 2)$ gilt nach (19) ${}_1\mathbf{M} = {}_2\mathbf{M}$ un daher $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}}$.

Der Fall $\mathbf{Q}(K) \cap {}_1\mathbf{M} = \emptyset$, $\mathbf{Q}(K) \cap {}_2\mathbf{M} \neq \emptyset$ (bzw. $\mathbf{Q}(K) \cap {}_1\mathbf{M} \neq \emptyset$, $\mathbf{Q}(K) \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$) kann laut (19) nicht eintreten.

Betrachten wir noch den Fall $\mathbf{Q}(K) \cap {}_i\mathbf{M} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$. Bezeichnet man

$$ {}_i\mathbf{N} = {}_i\mathbf{M} \cap \partial\, \mathbf{Q}(K) \quad (i = 1, 2)\,, $$

so gilt nach (19) ${}_1\mathbf{N} = {}_2\mathbf{N}$ und nach (1) und nach Satz 1 gilt dann

$$ \mathbf{S}_{\mathbf{Q}(K) \cap {}_i\mathbf{M}} = \mathbf{Q} \cap \Big[\bigcup_{\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) \cup \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{Q}(K) \cap {}_i\mathbf{M} \setminus {}_i\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) \Big] = \mathbf{Q} $$

d. h.

$$ \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q} \cap \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{Q}(K) \cap {}_i\mathbf{M} \setminus {}_i\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cap \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2)\,. $$

Wegen

$$ \mathbf{Q} \cap \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cap \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_2\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x})\,, $$

ergibt sich daraus dann

$$ (20) \qquad \mathbf{Q} \cap \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{Q}(K) \cap {}_1\mathbf{M} \setminus {}_1\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cap \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{Q}(K) \cap {}_2\mathbf{M} \setminus {}_2\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x})\,. $$

Aus (19) folgt

$$ (21) \qquad \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M} \setminus [\mathbf{Q}(K) \cap {}_1\mathbf{M} \setminus {}_1\mathbf{N}]} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_2\mathbf{M} \setminus [\mathbf{Q}(K) \cap {}_2\mathbf{M} \setminus {}_2\mathbf{N}]} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) $$

und da (nach (1))

$$ \mathbf{S}_{{}_i\mathbf{M}} = \mathbf{Q} \cap \Big[\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{Q}(K) \cap {}_i\mathbf{M} \setminus {}_i\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) \cup \bigcup_{\mathbf{x} \in {}_i\mathbf{M} \setminus [\mathbf{Q}(K) \cap {}_i\mathbf{M} \setminus {}_i\mathbf{N}]} {}^p\mathbf{K}'(\mathbf{x}) \Big] \quad (i = 1, 2) $$

gilt, ergibt sich aus (20) und (21) die Gleichheit $\mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}}$.

B e m e r k u n g 6. Der vorangehende Satz sagt aus, dass das sphärische Bild einer nichtleeren abgeschlossenen konvexen Menge durch „eine Deformation im Endlichen" nicht geändert wird, soweit diese Deformation wiederum zu einer nichtleeren konvexen abgeschlossenen Menge führt.

& 3

Auf der Hypersphäre $\mathbf{Q}$ aus (2) kann man in üblicher Weise eine Topologie einführen: Ist $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ eine beliebige (sphärische) ε-Umgebung eines Punktes $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}$, so nennt man die Menge

$$ U_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}, \varepsilon) = U(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathbf{Q} $$

die ε-Umgebung von $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}$ bezüglich $\mathbf{Q}$.

Ist $\mathbf{A}$ eine Teilmenge von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}$ ein Punkt, für den es eine Umgebung $U_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ mit $U_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \subset \mathbf{A}$ gibt, dann nennt man den Punkt $\mathbf{x}_0$ einen inneren Punkt von $\mathbf{A}$ bezüglich $\mathbf{Q}$. Falls jeder Punkt der Menge $\mathbf{A} \subset \mathbf{Q}$ ein innerer Punkt dieser Menge bezüglich $\mathbf{Q}$ ist, do heisst die Menge $\mathbf{A}$ relativ offen in $\mathbf{Q}$.

Satz 9. *Das sphärische Bild $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ einer streng konvexen Menge $\mathbf{N}$ in $\mathbf{E}_n$*[4]) $(n \geqq 2)$ *stellt eine relativ offene Menge in $\mathbf{Q}$ dar.*

Beweis. Ist $\mathbf{N}$ beschränkt, so gilt $\mathbf{S}_{\mathbf{N}} = \mathbf{Q}$ (nach Satz 1) und da offenbar die Menge $\mathbf{Q}$ relativ offen in $\mathbf{Q}$ ist, gilt die Behauptung des Satzes. Betrachten wir also denn Fall, wo $\mathbf{N}$ unbeschränkt ist. Es sei $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{N}$ beliebig und $\mathbf{N}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$ der Recessionskegel der Menge $\mathbf{N}$ im Punkt $\mathbf{x}_0$. Nach der Definition des Recessionskegels stellt der Punkt $\mathbf{x}_0$ einen Scheitel des Kegels $\mathbf{N}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$ dar. Bezeichnen wir mit $\mathbf{L}_{\mathbf{N}_{\mathbf{R}}}$ die Scheitelmenge des Kegels $\mathbf{N}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$. Nach Eigenschaften (e), (m) ist $\mathbf{L}_{\mathbf{N}_{\mathbf{R}}}$ ein linearer Unterraum in $\mathbf{E}_n$ mit $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{L}_{\mathbf{N}_{\mathbf{R}}}$, $\dim \mathbf{L}_{\mathbf{N}_{\mathbf{R}}} \equiv d \geqq 0$. Im Falle $d \geqq 1$ würde eine durch den Punkt $\mathbf{x}_0$ durchgehende Gerade l_0 mit der Eigenschaft $l_0 \subset \mathbf{N}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_0)$ existieren und nach (c) wäre $l_0 \subset \mathbf{N}$. Dann hätte auch (nach (f)) jede mit der Gerade l_0 parallele Gerade l^*, die einen beliebigen Punkt

$$\mathbf{x}^* \in \partial \mathbf{N} \tag{22}$$

enthält auch die Eigenschaft $l^* \subset \mathbf{N}$. Um zu zeigen, dass auch $l^* \subset \partial \mathbf{N}$ gilt, wollen wir den Beweis indirekt führen, d. h. dass wir die Existenz eines Punktes $\mathbf{x}' \in l^*$ mit $\mathbf{x}' \in \operatorname{int} \mathbf{N}$ voraussetzen. Aus diesem Ansatz folgt $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^*$ und (da $\mathbf{N}$ abgeschlossene konvexe Menge der Dimension n ist) die Existenz einer sphärischen Umgebung $U(\mathbf{x}', \varepsilon) \subset \operatorname{int} \mathbf{N}$. Nach der Eigenschaft (f) hat jede Gerade $l_{\mathbf{y}}$, die mit der Gerade l_0 parallel ist und einen beliebigen Punkt $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x}', \varepsilon)$ enthält die Eigenschaft $l_{\mathbf{y}} \subset \mathbf{N}$ uns es gilt daher

$$U(l^*, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in l_{\mathbf{y}} \mid \mathbf{y} \in U(\mathbf{x}', \varepsilon)\} \subset \mathbf{N}\,.$$

Wegen $U(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \subset U(l^*, \varepsilon)$, folgt daraus $\mathbf{x}^* \in \operatorname{int} \mathbf{N}$, was aber im Widerspruch mit (22) steht. Es gilt daher $l^* \subset \partial \mathbf{N}$. Dies ist aber ein Widerspruch mit dem Ansatz der strengen Konvexität der Menge $\mathbf{N}$. Es kann also $d \geqq 1$ nicht gelten, voraus unmittelbar $\mathbf{L}_{\mathbf{N}_{\mathbf{R}}} = \{\mathbf{x}_0\}$ folgt. Daraus und aus (e), (o) ergibt sich $\dim {}^p\mathbf{N}_{\mathbf{R}}\,(\mathbf{x}_0) = n$ und nach (h) $\dim {}^p\mathbf{N}_{\mathbf{R}} = n$. Ist ${}'\mathbf{x} \in \operatorname{int} {}^p\mathbf{N}_{\mathbf{R}}$, $\|{}'\mathbf{x}\| = 1$ beliebig, dann gibt es eine ε-Umgebung $U({}'\mathbf{x}, \varepsilon)$ mit

$$U({}'\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \operatorname{int} {}^p\mathbf{N}_{\mathbf{R}}\,. \tag{23}$$

---

[4]) Eine in $\mathbf{E}_n$ konvexe Menge $\mathbf{N}$ heisst streng konvex, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) $\mathbf{N}$ ist abgeschlossen in $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{N} \neq \mathbf{E}_n$;

b) $\dim \mathbf{N} = n$;

c) sind $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ zwei beliebige Punkte des Randes $\partial \mathbf{N}$ von $\mathbf{N}$, so gilt $u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 > 0\} \subset \operatorname{int} \mathbf{N}$.

Nach der Eigenschaft (h) gilt int ${}^p\mathbf{N_R} \subset \bigcup\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'_\mathbf{N}(\mathbf{x})$, voraus nach (1)

$$\mathbf{Q} \cap \operatorname{int} {}^p\mathbf{N_R} \subset (\mathbf{Q} \cap \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'_\mathbf{N}(\mathbf{x})) = \mathbf{S_N}$$

gilt. Daher ist der Punkt $'\mathbf{x}$ (laut (23)) ein relativ innerer Punkt der Menge $\mathbf{S_N}$ bezüglich $\mathbf{Q}$, d. h. die Menge $\mathbf{S_N}$ enthält relativ innere Punkte bezüglich $\mathbf{Q}$. Da die Menge $\mathbf{N}$ unbeschränkt ist, so existiert (nach Satz 2) eine Hemisphäre ${}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$ mit $\mathbf{S_N} \subset {}^\mathbf{Q}\mathbf{H}^+$, voraus folgt, dass die Menge $\mathbf{S_N}$ Randpunkte (bezüglich der in $\mathbf{Q}$ eingeführten Topologie) besitzt. Es sei $^*\mathbf{x}$ ein Randpunkt von $\mathbf{S_N}$ bezüglich $\mathbf{Q}$ mit der Eigenschaft $^*\mathbf{x} \in \mathbf{S_N}$. Nach (1) und nach Bemerkung 1 gilt dann $^*\mathbf{x} \in \mathbf{Q}$, $^*\mathbf{x} \in {}^p\mathbf{N_R}$ (und daher $^*\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$), wobei – nach dem obigen Überlegungen – $^*\mathbf{x} \in \partial^p\mathbf{N_R}$ gilt. Wir betrachten nun die zwei in Frage kommenden Möglichkeiten:

a) Falls $\dim \mathbf{N_R} = 1$ ist, so ist ${}^p\mathbf{N_R}$ ein abgeschlossener Halbraum in $\mathbf{E}_n$ und wegen $^*\mathbf{x} \in \partial^p\mathbf{N_R}$ gilt dann für jeden Punkt $\mathbf{y} \in \mathbf{N_R}$ und daher auch für jeden Punkt $^*\mathbf{y} \in \mathbf{N_R}$ mit $\|^*\mathbf{y}\| = 1$ die Beziehung

$$(^*\mathbf{x}, {}^*\mathbf{y}) = 0\,.$$

b) Im Falle $\dim \mathbf{N_R} \geqq 2$ stellt die Menge $\mathbf{N_R}$ weder einen linearen Unterraum noch einen Halbraum in $\mathbf{E}_n$ dar, denn, der Punkt $\mathbf{x}_0$ ist der einzige Scheitel des Kegels $\mathbf{N_R}(\mathbf{x}_0)$ (wie es oben bewiesen wurde) und daher nach der Eigenschaft (h) ist $\mathbf{o}$ der einzige Scheitel des Kegels $\mathbf{N_R}$. Laut (q) gibt es einen Punkt $\mathbf{y} \in \partial\mathbf{N_R}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ mit $(\mathbf{y}, {}^*\mathbf{x}) = 0$ und daher auch einen Punkt $^*\mathbf{y} \in \partial\mathbf{N_R}$, $\|^*\mathbf{y}\| = 1$ mit

$$(^*\mathbf{x}, {}^*\mathbf{y}) = 0\,.$$

In beiden Fällen gilt also

(24) $$^*\mathbf{y} \in \mathbf{N_R},\quad \|^*\mathbf{y}\| = 1\,,\quad (^*\mathbf{x}, {}^*\mathbf{y}) = 0\,.$$

Wegen $^*\mathbf{x} \in \mathbf{S_N}$ gibt es (nach Satz 4) einen Punkt $\mathbf{x}^\cdot \in \mathbf{N}$ mit

$$(^*\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{N}} (^*\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

d. h.

(25) $$(^*\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot - \mathbf{x}) \geqq 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbf{N}\,.$$

Wir betrachten die Halbgerade

$$p^\cdot = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^\cdot + t\,{}^*\mathbf{y},\ t \geqq 0\}\,.$$

für die nach (24) und nach (h), (c)

(26) $$p^\cdot \subset \mathbf{N_R}(\mathbf{x}^\cdot) \subset \mathbf{N}$$

gilt. Aus (24) ergibt sich $p^{\cdot} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (^*\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot} - \mathbf{x}) = 0\}$, woraus dann mit Hinsicht auf (25) und (26) $p^{\cdot} \subset \partial\mathbf{N}$ folgt. Dies steht aber im Widerspruch mit der strengen Konvexität der Menge $\mathbf{N}$. Ein Randpunkt $\mathbf{x}^*$ von $\mathbf{S_N}$ bezüglich $\mathbf{Q}$ kann daher der Menge $\mathbf{S_N}$ nicht angehören. Daraus folgt, dass die Menge $\mathbf{S_N}$ eine in $\mathbf{Q}$ relativ offene Menge ist.

Satz 10. *Es sei $\mathbf{N}$ eine abgeschlossene unbeschränkte konvexe Menge in $\mathbf{E}_n$ der Dimension d $(2 \leqq d \leqq n)$, $\mathbf{L}_d$ die lineare Hülle von $\mathbf{N}$ mit $\mathbf{o} \in \mathbf{L}_d$*[5]*), $\mathbf{L}_{n-d}$ der zu $\mathbf{L}_d$ lineare duale Unterraum mit $\mathbf{o} \in \mathbf{L}_{n-d}$. Es sei weiter $\mathbf{N}$ eine streng konvexe Menge in $\mathbf{L}_d$. Definiert man*

$$\mathbf{Q}^{(n-d)} \equiv \mathbf{Q} \cap \mathbf{L}_{n-d}\,, \quad \mathbf{Q}^{(d)} \equiv \mathbf{Q} \cap \mathbf{L}_d\,, \tag{27}$$

wo $\mathbf{Q}$ die Bedeutung aus (2) besitzt, so gilt:

a) *die Menge*

$$\mathbf{S}'_{\mathbf{N}} \equiv \mathbf{S_N} \cap \mathbf{L}_d$$

stellt das sphärische Bild der Menge $\mathbf{N}$ in $\mathbf{L}_d$ dar und sie ist zugleich eine relativ offene Menge in $\mathbf{Q}^{(d)}$;

b) *es gilt*

$$\mathbf{Q}^{(n-d)} \subset \mathbf{S_N}$$

und jeder Punkt der Menge $\mathbf{Q}^{(n-d)}$ ist ein relativ Randpunkt von $\mathbf{S_N}$ bezüglich $\mathbf{Q}$;

c) *die Menge*

$$\mathbf{S_N} \setminus \mathbf{Q}^{(n-d)}$$

stellt eine relativ offene Menge in $\mathbf{Q}$ dar.

Beweis. Falls $d = n$ gilt, so ist $\mathbf{L}_d = \mathbf{E}_n$, $\mathbf{L}_{n-d} = \{\mathbf{o}\}$ und daher $\mathbf{Q}^{(n-d)} = \emptyset$, $\mathbf{Q}^{(d)} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{S}'_{\mathbf{N}} = \mathbf{S_N}$ und die Behauptung des Satzes ist nach dem Satz 9 trivialerweise gültig.

Im Falle $d < n$, betrachten wir die Menge $\mathbf{N}$ als eine Menge des linearen Unterraumes $\mathbf{L}_d$. Bezeichnen wir mit $^*\mathbf{S_N}$ ihr sphärisches Bild in $\mathbf{L}_d$, so ist – nach dem Satz 9 – die Menge $^*\mathbf{S_N}$ eine relativ offene Menge bezüglich der Hypersphäre $\mathbf{Q}^{(d)}$. Um die Behauptung a) zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $^*\mathbf{S_N} = \mathbf{S}'_{\mathbf{N}}$ gilt. Es sei $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{N}$ beliebig, $\mathbf{K_N}(\mathbf{x}_0)$ der lokale Berührungskegel der Menge $\mathbf{N}$ im Punkt $\mathbf{x}_0$, $^p\mathbf{K_N}(\mathbf{x}_0)$ der ihm zugehörige Polarkegel in $\mathbf{E}_n$ und $^p\mathbf{K}^*_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ der entsprechende Polarkegel zu $\mathbf{K_N}(\mathbf{x}_0)$ bezüglich $\mathbf{L}_d$, d. h.

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{K_N}(\mathbf{x}_0) &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \leqq 0,\ \mathbf{y} \in \mathbf{K_N}(\mathbf{x}_0)\}\,, \\ {}^p\mathbf{K}^*_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0) &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{L}_d \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \leqq 0,\ \mathbf{y} \in \mathbf{K_N}(\mathbf{x}_0)\}\,. \end{aligned} \tag{28}$$

[5]) Den Koordinatenursprung $\mathbf{o}$ kann man o. B. d. A. so wählen, dass $\mathbf{o} \in \mathbf{L}_d$ gilt.

Daraus folgt unmittelbar

$$ {}^{p}\mathbf{K}^{*}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0) \subset (\mathbf{L}_d \cap {}^{p}\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)) . \tag{29} $$

Nach Eigenschaften (a), (b), (n) stellt der mit dem linearen Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}$ parallele Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{x}_0)$, der den Punkt $\mathbf{x}_0$ enthält, die Scheitelmenge des Kegels ${}^{p}\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ dar. Es gilt daher

$$ \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{x}_0) \subset {}^{p}\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0), \quad \text{wobei} \quad \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{x}_0) \cap \mathbf{L}_d = \{\mathbf{x}_0\} . \tag{30} $$

Wählen wir Punkte $\mathbf{x}_i \in \mathbf{L}_d$ $(i = 1, \dots, d)$ in der Weise, dass das Punktesystem $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ ein System von linearen unabhängigen Punkten in $\mathbf{L}_d$ darstellt, auf ähnliche Art wählt man linear unabhängige Punkte $\mathbf{x}_j$ $(j = d + 1, \dots, n)$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{d+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ linear unabhängig in $\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{x}_0)$ sind. Zu jedem Punkt $\mathbf{x}' \in \mathbf{E}_n$ gibt es dann Zahlen α_k $(k = 1, \dots, n)$ mit der Eigenschaft

$$ \mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) , \quad \text{wobei} \quad (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0) = 0 \tag{31} $$
$$ (i = 1. \dots, d;\ j = d + 1, \dots, n) . $$

Ist $\mathbf{x}' \in \mathbf{L}_d \cap {}^{p}\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ beliebig gewählt, so gibt es nach (28) einen Punkt $\mathbf{y}' \in \mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ mit $(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0, \mathbf{y}' - \mathbf{x}_0) \leqq 0$ und nach (31) weiter mit

$$ \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0), \mathbf{y}' - \mathbf{x}_0\Big) \leqq 0 $$

d. h.

$$ \Big(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0), \mathbf{y}' - \mathbf{x}_0\Big) + \Big(\sum_{j=d+1}^{n} \alpha_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0), \mathbf{y}' - \mathbf{x}_0\Big) \leqq 0 . \tag{32} $$

Da wegen (a), (b) $\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0) \subset \mathbf{L}_d$ ist, gilt für den fraglichen Punkt $\mathbf{y}' \in \mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$

$$ \mathbf{y}' = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{d} \beta_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) , $$

woraus laut (31) und (32)

$$ \Big(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0), \mathbf{y}' - \mathbf{x}_0\Big) \leqq 0 \tag{33} $$

folgt. Wegen $\mathbf{x}' \in \mathbf{L}_d$ ist

$$ \mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) $$

und aus (33) ergibt sich

$$ (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0, \mathbf{y}' - \mathbf{x}_0) \leqq 0 , \quad \mathbf{x}' \in \mathbf{L}_d, \mathbf{y}' \in \mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0) . $$

Aus dieser Ungleichung folgt dann (nach (28)) $\mathbf{x}' \in {}^p\mathbf{K}^*_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ und da der Punkt $\mathbf{x}' \in \mathbf{L}_d \cap {}^p\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ beliebig war, folgt daraus die Inklusion $\mathbf{L}_d \cap {}^p\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0) \subset {}^p\mathbf{K}^*_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ und laut (29) dann die Gleichheit

$$ {}^p\mathbf{K}^*_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{L}_d \cap {}^p\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0) \, . $$

Nach (1), (27) und der Eigenschaft (h) ergibt sich daraus

$$ {}^*\mathbf{S}_{\mathbf{N}} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}^{*\prime}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{Q}^{(d)} $$

und weiter

$$ \mathbf{S}'_{\mathbf{N}} = \mathbf{S}_{\mathbf{N}} \cap \mathbf{L}_d = \Big[\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{L}_d \Big] \cap (\mathbf{L}_d \cap \mathbf{Q}) = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}^{*\prime}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{Q}^{(d)} = {}^*\mathbf{S}_{\mathbf{N}} \, , $$

womit die Behauptung a) bewiesen ist.

Um die Behauptung b) zu beweisen, wählen wir $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{N}$ beliebig. Im ersten Teil des Beweises wurde gezeigt, dass der Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{x}_0)$ die Scheitelmenge des Kegels ${}^p\mathbf{K}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$ darstellt und daher – nach der Eigenschaft (h) – ist $\mathbf{L}_{n-d}$ die Scheitelmenge von ${}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}_0)$. Es gilt daher $\mathbf{L}_{n-d} \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$ und nach (27) weiter

$$ \mathbf{Q}^{(n-d)} = \mathbf{Q} \cap \mathbf{L}_{n-d} \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{Q} = \mathbf{S}_{\mathbf{N}} \, . $$

Ähnlich wie im Beweis des Satzes 9 kann gezeigt werden, dass die Menge $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ relativ innere Punkte bezüglich $\mathbf{Q}$ enthält. Da aber der lineare Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}$ nur Randpunkte in $\mathbf{E}_n$ eines jeden Kegels ${}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ enthält, ergibt sich daraus, dass die Menge $\mathbf{Q}^{(n-d)}$ Randpunkte von $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ bezüglich $\mathbf{Q}$ besitzt, wobei diese Randpunkte der Menge $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ angehören, d. h. es gilt die Behauptung b) des Satzes.

Es soll noch gezeigt werden, dass die Menge $\mathbf{Q}^{(n-d)}$ die Menge aller Randpunkte von $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ bezüglich $\mathbf{Q}$, die zu $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ gehören, darstellt. Um den Beweis indirekt zu führen, setzen wir voraus, dass es einen Punkt

$$ \mathbf{y}_0 \in \mathbf{S}_{\mathbf{N}}, \; \mathbf{y}_0 \in \partial\mathbf{S}_{\mathbf{N}}(\text{rel. } \mathbf{Q}), \; \mathbf{y}_0 \notin \mathbf{Q}^{(n-d)} \tag{34} $$

gibt. Laut (1) und (27) ergibt sich daraus

$$ \mathbf{y}_0 \in \mathbf{Q}, \; \mathbf{y}_0 \notin \mathbf{L}_{n-d}, \; \mathbf{y}_0 \in \mathbf{K}' \equiv \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{N}} {}^p\mathbf{K}'_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}), \; \mathbf{y}_0 \in \partial\mathbf{K}'(\text{rel. } \mathbf{Q}) \, . \tag{35} $$

Die Menge

$$ \mathbf{\Pi} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{z} + t(\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}), \; \mathbf{z} \in \mathbf{L}_{n-d}, \; t \geqq 0 \} \tag{36} $$

stellt offenbar einen abgeschlossenen Halbraum in dem linearen Unterraum $\mathbf{L}_{n-d+1}$, der durch $\mathbf{L}_{n-d}$ und durch den Punkt $\mathbf{y}_0$ festgelegt ist, dar. Da $\mathbf{L}_{n-d}$ die Scheitelmenge des Kegels $\mathbf{K}'$ darstellt, folgt daraus nach (36), (35)

$$ \mathbf{\Pi} \subset \mathbf{K}' \, , \quad \mathbf{\Pi} \subset \partial\mathbf{K}'(\text{rel. } \mathbf{Q}) \, . \tag{37} $$

Betrachten wir nun den mit dem linearen Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}$ parallelen Unterraum $\mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{y}_0)$ mit $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{y}_0)$ und bezeichnen wir mit $'\mathbf{y}$ denjenigen Punkt, der die Eigenschaft $\{'\mathbf{y}\} = \mathbf{L}_d \cap \mathbf{L}_{n-d}(\mathbf{y}_0)$ hat. Wegen $\mathbf{y}_0 \notin \mathbf{L}_{n-d}$, $\mathbf{L}_{n-d} \cap \mathbf{L}_d = \{\mathbf{o}\}$, folgt dann daraus $'\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$. Führen wir noch die Halbgerade

$$p = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = '\mathbf{y}u,\ u \geqq 0\} \tag{38}$$

ein. Wegen $\mathbf{o} \in \mathbf{L}_d$, $'\mathbf{y} \in \mathbf{L}_d$ gilt $p \subset \mathbf{L}_d$. Wir zeigen nun die Eigenschaft $p \subset \mathbf{\Pi}$. Im Falle $\mathbf{y}_0 = '\mathbf{y}$, ergibt sich aus (36) und (37) unmittelbar $p \subset \mathbf{\Pi}$. Ist $\mathbf{y}_0 \neq '\mathbf{y}$, so gehört der Punkt $\mathbf{z} \equiv \mathbf{y}_0 - '\mathbf{y}$ zu $\mathbf{L}_{n-d}$ und wählt man $u_0 > 1$, $t = u_0$, $'\mathbf{z} = (u_0/(u_0 - 1))(\mathbf{y}_0 - '\mathbf{y})$, so gilt $'\mathbf{z} \in \mathbf{L}_{n-d}$ und

$$'\mathbf{z} + t(\mathbf{y}_0 - '\mathbf{z}) = \frac{u_0}{u_0 - 1}(\mathbf{y}_0 - '\mathbf{y}) + u_0\left(\mathbf{y}_0 - \frac{u_0}{u_0 - 1}(\mathbf{y}_0 - '\mathbf{y})\right) = u_0\, '\mathbf{y}\,.$$

Nach (36) gilt $u_0\, '\mathbf{y} \in \mathbf{\Pi}$ für $\mathbf{u}_0 > 1$. Da aber $\mathbf{\Pi}$ ein abgeschlossener Halbraum in $\mathbf{E}_n$ mit einem Randpunkt im Punkt $\mathbf{o}$ ist, folgt daraus nach (38) $p \subset \mathbf{\Pi}$. Definiert man noch den Punkt $^*\mathbf{y} \equiv '\mathbf{y}/\|'\mathbf{y}\|$, für den offenbar $^*\mathbf{y} \in \mathbf{Q}$, $^*\mathbf{y} \in p$, $^*\mathbf{y} \in \mathbf{L}_d$ gilt, dann ist $^*\mathbf{y} \in \mathbf{L}_d \cap \mathbf{\Pi} \cap \mathbf{Q}$, woraus dann nach (37) und (1)

$$^*\mathbf{y} \in \mathbf{L}_d \cap \mathbf{K}' \cap \mathbf{Q} = \mathbf{L}_d \cap \mathbf{S}_\mathbf{N} = \mathbf{S}'_\mathbf{N}\,, \quad ^*\mathbf{y} \in \partial(\mathbf{L}_d \cap \mathbf{K}' \cap \mathbf{Q})\,(\text{rel. } \mathbf{Q}^{(d)}) = \\ = \partial\mathbf{S}'_\mathbf{N}(\text{rel. } \mathbf{Q}^{(d)})$$

folgt. Dies ist aber ein Widerspruch mit der schon bewiesenen Behauptung a) des Satzes. Daraus folgt dann die Behauptung c).

Bemerkung 7. Ist die Menge $\mathbf{N}$ aus Satz 10 beschränkt, so gilt $\mathbf{S}_\mathbf{N} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{S}'_\mathbf{N} = \mathbf{Q}^{(d)}$ und daher die Behauptung a) des Satzes 10 auch für diesen Fall. Aus der Behauptung b) des Satzes 10 kommt nur die Teilbehauptung $\mathbf{Q}^{(n-d)} \subset \mathbf{S}^{!}_\mathbf{N} = \mathbf{Q}$ in Frage.

Literatur

[1] *H. Reichardt:* Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin. 1957.

[2] *R. Sikorski:* Diferential- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen. Academia 1973.

[3] *L. Grygarová:* Lokale Berührungskegel einer Menge im eukliedischen Raum E_n. Aplikace matematiky 22 (1977), 110—115.

[4] *R. T. Rockafellar:* Convex analysis. Princeton, New Jersey. Princeton University Press. Second Printing. 1972.

[5] *J. Stoer, Ch. Witzgall:* Convexity and Optimization in Finite Dimensions I. Springer - Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1970.

Souhrn

SFÉRICKÉ ZOBRAZENÍ UZAVŘENÉ KONVEXNÍ MNOŽINY V $\mathbf{E}_n$ A JEHO CHARAKTERISTICKÉ VLASTNOSTI

LIBUŠE GRYGAROVÁ

Po zavedení pojmu sférického obrazu množiny **M** a pojmu sféricky ekvivalentních množin jsou studovány různé vztahy mezi množinou **M** a jejím sférickým obrazem a to za různých předpokladů o množině **M** (např. její omezenosti, neomezenosti, ryzí konvexnosti). Dokázané skutečnosti, že množina **M** a její ε-okolí jsou sféricky ekvivalentní lze spolu s jinými výsledky práce výhodně použít v teorii konvexního parametrického programování.

Adresse des Autors: RNDr. *Libuše Grygarová*, CSc., Matematicko-fysikální fakulta UK, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.