Miroslav Šisler

Bemerkungen zur Optimierung eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 21 (1976), No. 3, 213–220

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103639`

BEMERKUNGEN ZUR OPTIMIERUNG EINES ZWEIPARAMETRIGEN ITERATIONSVERFAHRENS

Miroslav Šisler

(Eingegangen am 12. November 1975)

Die Arbeit knüpft unmittelbar an die Resultate der Arbeiten [2] und [3] desselben Verfassers an. Es handelt sich wieder um ein zweiparametriges Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten von der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Das Iterationsverfahren ist dabei folgenderweise definiert:

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{T}(\alpha, \beta)\,\mathbf{x}_\nu + \mathbf{P}(\alpha, \beta)\,\mathbf{b}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1}\,[(\alpha - 1)\,\mathbf{E} + (\beta + 1)\,\mathbf{L} + \mathbf{U}]\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{L})^{-1}\,;$$

hier bezeichnet α, β reelle, von Null verschiedene Parameter und $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$, wobei $\mathbf{B}$ im allgemeinen eine unsymmetrische Blockmatrix ist, deren Diagonalblöcke Nullmatrizen sind und $\mathbf{L}$ bzw. $\mathbf{U}$ die untere bzw. obere verallgemeinerte Dreiecksmatrix ist.

In der Arbeit setz man voraus, dass $\mathbf{B}$ eine nichtsinguläre 2-zyklische Matrix ist. Man setzt nämlich voraus, dass die Matrix $\mathbf{B}$ einen gewissen Vektorraum R der Dimension n in R abbildet, dass der Vektorraum R durch die direkte Summe der Unterräume $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_m$ $(m \leqq n)$ gebildet wird und dass die Matrizen $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ die Bedingungen

$$\mathbf{L}\mathrm{v}_i \subset \mathrm{v}_{i+1}\,, \quad \mathbf{U}\mathrm{v}_i \subset \mathrm{v}_{i-1}\,, \quad i = 1, \ldots, m$$

erfüllen, wobei $\mathrm{v}_i = 0$ für $i < 1$ und $i > m$ ist.

Es gilt nun der folgende Satz:

Satz 1. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$. Falls $\lambda \neq (\beta + 1)/\beta$ ist und falls die Zahl μ die Beziehung*

$$(1 - \alpha + \lambda\alpha)^2 = \mu^2(1 + \beta - \lambda\beta) \tag{4}$$

erfüllt, ist μ der Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}$. *Falls im Gegenteil μ ein Eigenwert der Matrix* $\mathbf{B}$ *ist, dann ist jede Wurzel λ der quadratischen Gleichung* (4) *ein Eigenwert der Matrix* $\mathbf{T}(\alpha, \beta)$.

Der Satz folgt sofort vom Satz 1 der Arbeit [2] für $p = 2$, $h = k = 1$.

In der Arbeit wird man ferner voraussetzen, dass die Eigenwerte μ_i^2 der Matrix $\mathbf{B}^2$ die Ungleichungen $0 < \mu_i^2 < 1$, $i = 1, \ldots, n$ erfüllen.

Man bezeichne M bzw. m eine solche positive Zahl, dass $M^2 = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \mu_i^2$ bzw. $m^2 = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \mu_i^2$ gilt.

Es ist aus der Arbeit [2] bekannt, dass für $\beta = -1$ die durch die Formeln (2),(3) definierte Methode dem gewöhnlichen Oberrelaxationsverfahren entspricht. Dabei folgt aus dem Satz 2 der Arbeit [3], dass der Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, -1))$ der Matrix $\mathbf{T}(\alpha, -1)$ für $\alpha = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ seinen Minimalwert $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ annimmt.

Man bezeichne jetzt mit Ω die Menge solcher Punkte $[\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$ für die

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) \leqq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \tag{5}$$

gilt, d. h. die untersuchte Methode konvergiert zumindestens so schnell, wie das Oberrelaxationsverfahren. Es gilt dann der folgende Satz:

Satz 2. *Es sei*

$$b_1(\alpha) = [(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2 \sqrt{(1 - M^2)} + 4\alpha^2 \sqrt{(1 - M^2)} - 4\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)})]/$$
$$/2M^2(1 + \sqrt{(1 - M^2)}),$$
$$b_2(\alpha) = [(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2 (1 - M^2) + 4\alpha^2 - 4\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)}]/$$
$$/2M^2(1 + \sqrt{(1 - M^2)}),$$
$$b_3(\alpha) = (1 - \alpha)^2/m^2 - \alpha^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2/m^2 (1 + \sqrt{(1 - M^2)}) - 1 .$$

Dann ist $[\alpha, \beta] \in \Omega$ genau dann, wenn gleichzeitig

$$\beta \leqq b_1(\alpha), \quad \beta \leqq b_2(\alpha), \quad \beta \geqq b_3(\alpha), \quad \alpha > 0$$

gilt, wobei die Gleichheit in der Beziehung (5) *nur für die Grenzpunkte der Menge Ω eintritt.*

Der Satz folgt sofort aus dem Satz 3 der Arbeit [3].

Der folgende Satz 3 beschreibt die konkrete Form des Gebietes Ω in der Abhängigkeit von der Zahl m. Bevor wir den Satz formulieren werden, führen wir zuerst folgende Bezeichnungen ein:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), \quad \alpha_3 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt[4]{(1 - M^2)},$$
$$\alpha_5 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \sqrt{(1 - M^2)} .$$

Satz 3. I. *Es sei* $m^2 \leqq 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$. *Dann enthält die Menge* Ω *den einzigen Punkt* $[\alpha_1, -1]$.

II. *Es sei*

$$(6) \qquad 1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 \leqq$$
$$\leqq 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}] .$$

Dann ist Ω *die Menge der Punkte, für die gleichzeitig die Ungleichungen*

$$\alpha_2 \leqq \alpha \leqq \alpha_1 , \quad b_3(\alpha) \leqq \beta \leqq b_1(\alpha)$$

gelten, wobei α_2 *die positive Wurzel der Gleichung* $b_1(\alpha) = b_3(\alpha)$ *ist. (Eine solche Wurzel existiert und liegt im Intervall* $\langle\alpha_3, \alpha_1)$; *es ist* $\alpha_2 = \alpha_3$, *solange in* (6) *die Gleichheit gilt.)*

III. *Es sei*

$$(7) \qquad 2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - \sqrt[4]{(1 - M^2)^3})/[2 - \sqrt{(1 - M^2)} -$$
$$- \sqrt[4]{(1 - M^2)^3}] < m^2 \leqq M^2 .$$

Dann ist die Menge Ω *durch die folgende Ungleichungen definiert*:

$$\textit{für} \quad \alpha_4 \leqq \alpha \leqq \alpha_3 \quad \textit{ist} \quad b_3(\alpha) \leqq \beta \leqq b_2(\alpha) ,$$
$$\textit{für} \quad \alpha_3 \leqq \alpha \leqq \alpha_1 \quad \textit{ist} \quad b_3(\alpha) \leqq \beta \leqq b_1(\alpha) .$$

Dabei ist α_4 *die positive Wurzel der Gleichung* $b_2(\alpha) = b_3(\alpha)$. *(Eine solche Wurzel existiert und liegt im Intervall* $\langle\alpha_5, \alpha_3)$; *für* $m^2 = M^2$ *gilt* $\alpha_4 = \alpha_5$.)

Satz 3 folgt sofort aus dem Satz 3 der Arbeit [3].

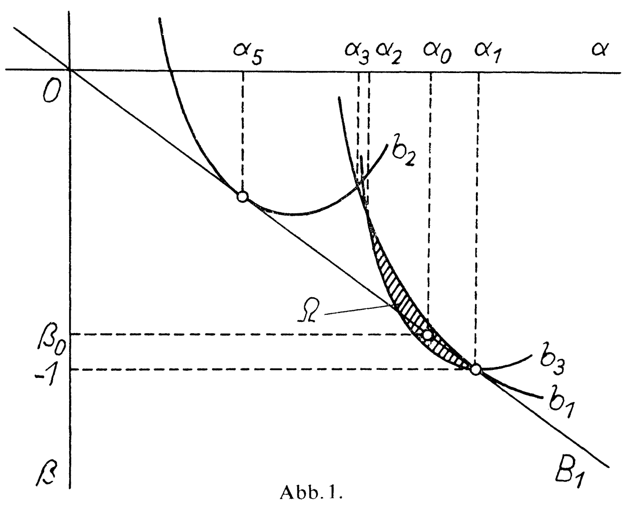

Abb. 1.

Bemerkung 1. Die Gestalt der Menge Ω für verschiedene m ist von Abb. 1, 2 und 3 sichtbar. Für den Fall II des Satzes 3 mit der scharfen Ungleichung in (6) gilt die Abb. 1. Für den Fall III des Satzes 3 mit der scharfen Ungleichung in (7) gilt die Abb. 2. Die Abb. 3 gilt für den Fall $m^2 = M^2$. Man bemerkt noch, dass die Gerade $B_1(\alpha) = -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/M^2$ eine Tangente der Graphen der Funktionen $b_1(\alpha)$ bzw. $b_2(\alpha)$ mit den Berührungspunkten $\alpha = \alpha_1$ bzw. $\alpha = \alpha_5$ ist (siehe [3]).

Aus dem Satz 3 folgt, dass das optimale Parameterpaar $[\alpha_{opt}; \beta_{opt}]$ für welches $\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_{opt}, \beta_{opt})) = \min_{[\alpha,\beta]\in\Omega} \varrho(\boldsymbol{T}(\alpha, \beta))$ ist, im Inneren des Gebietes Ω liegt. Im folgenden Satz 4 wird ein gewisses Paar der Parameter $[\alpha_0, \beta_0]$ gefunden, das eine praktisch

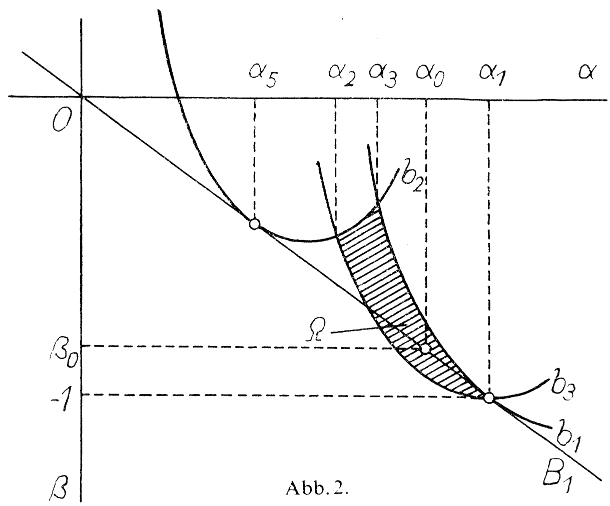

Abb. 2.

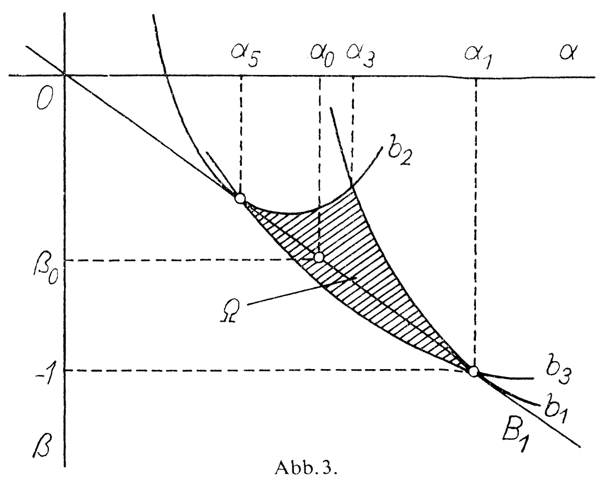

Abb. 3.

anwendbare Approximation des Punktes $[\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}]$ bietet. Durch das Symbol B_1 bezeichnet man jetzt die Menge der Punkte des Graphen der Funktion $\beta = B_1(\alpha)$.

Satz 4. *Es sei* $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 \leqq M^2$ *und*

$$\alpha_0 = (1 + \sqrt{(1 - M^2)})(1 - m^2)/[1 + \sqrt{(1 - M^2)} - m^2], \tag{8}$$

$$\beta_0 = -2(1 - m^2)/[1 + \sqrt{(1 - M^2)} - m^2].$$

Dann ist $[\alpha_0, \beta_0]$ *der innere Punkt des Gebietes* Ω *und es gilt*

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}})) \leqq \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = \min_{[\alpha,\beta]\in B_1} \varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) = \tag{9}$$

$$= \sqrt{[m^2(M^2 - m^2)/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})^2 (1 - m^2)]} <$$

$$< [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}],$$

wobei für $m^2 = M^2$ *offenbar die Gleichheiten*

$$\varrho(\mathbf{T}(\alpha_{\text{opt}}, \beta_{\text{opt}}) = \varrho(\mathbf{T}(\alpha_0, \beta_0)) = 0$$

gelten.

Beweis. Die Graphen der Funktionen $B_1(\alpha) = -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/M^2$ und $b_3(\alpha)$ schneiden sich in den Punkten $[\alpha_1, -1]$ und $[\alpha_6, \beta_6]$, wo

$$\alpha_6 = (1 + \sqrt{(1 - M^2)}(1 - m^2)/2\sqrt{(1 - M^2)},$$

$$\beta_6 = \beta_1(\alpha_6) = -(1 - m^2)/\sqrt{(1 - M^2)}$$

und $\alpha_5 \leqq \alpha_6 < \alpha_1$ gilt (für $m^2 = M^2$ ist dann $\alpha_6 = \alpha_5$, $\beta_6 = -\sqrt{(1 - M^2)}$, wobei für $\alpha_6 < \alpha < \alpha_1$ $b_3(\alpha) < B_1(\alpha)$ gilt). Man kann leicht beweisen, dass $\beta_0 = B_1(\alpha_0)$ (d. h. $[\alpha_0, \beta_0] \in B_1$) und $\alpha_6 < \alpha_0 < \alpha_1$ gilt, so dass $[\alpha_0, \beta_0) \in \text{Int}\,\Omega$ ist.

Man untersuche nun die die Zahl $\varrho(\mathbf{T}(\alpha, \beta))$ auf der Geraden B_1. Es ist aus den Arbeiten [2] und [3] bekannt, dass $\varrho^2(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|^2$ ist, wo λ_i die den Eigenwerten μ_i^2, $i = 1, \dots, n$ der Matrix $\mathbf{B}^2$ entsprechende Wurzeln der quadratischen Gleichung (4) sind. Es ist weiter aus der Arbeit [3] bekannt, dass der gegebenen Zahl μ_i^2 zwei komplex adjungierte Wurzeln der Gleichung (4) entsprechen, solange $\alpha > 0$ und

$$-2\alpha(1 + \sqrt{(1 - \mu_i^2)})/\mu_i^2 \leqq \beta \leqq -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - \mu_i^2)})/\mu_i^2$$

ist; das Quadrat ihrer Absolutwerte gleicht dabei der Zahl

$$L(\mu_i) = [(1 - \alpha)^2 - \mu_i^2(1 + \beta)]/\alpha^2. \tag{10}$$

Falls man nun $B_2(\alpha) = -2\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)})/M^2$ bezeichnet, kann man leicht feststellen, dass für $\alpha_6 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ die Beziehungen

$$-2\alpha(1 + \sqrt{(1 - \mu_i^2)})/\mu_i^2 \leqq -2\alpha(1 + \sqrt{(1 - M^2)})/M^2 = B_2(\alpha) <$$
$$< b_3(\alpha) \leqq B_1(\alpha) = -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/M^2 \leqq$$
$$\leqq -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - \mu_i^2)})/\mu_i^2$$

gelten. Davon folgt, dass für alle Punkte des Gebietes Ω, für die $b_3(\alpha) \leqq \beta \leqq B_1(\alpha)$ ist (dieses Gebiet bezeichnet man mit Ω') und für alle Zahlen μ_i^2, $i = 1, \ldots, n$ die Gleichung (4) nur komplex adjungierte Wurzeln besitzt, deren Quadrat im Absolutwert der Zahl (10) gleich ist.

Für $[\alpha, \beta] \in \Omega'$ gilt jetzt

$$L(\mu_i) \leqq L(m) \tag{11}$$

angesichts dessen, dass für $[\alpha, \beta] \in \Omega'$ die Ungleichung $\beta > -1$ gilt.

Es gilt ferner

$$\frac{\partial}{\partial \beta} L(m) = -m^2/\alpha^2 < 0\,. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt

$$\min_{[\alpha,\beta]\in\Omega'} \varrho^2(\mathbf{T}(\alpha, \beta)) = \min_{[\alpha,\beta]\in B_1} L(m)\,. \tag{13}$$

In Hinsicht darauf, dass für $[\alpha, \beta] \in B_1$ $\beta = B_1(\alpha) = -2\alpha(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/M^2$ ist, bekommt man nach der Einsetzung in (10) den Ausdruck

$$l(\alpha) = [(1 - \alpha)^2 - m^2 + 2\alpha m^2(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/M^2]/\alpha^2\,.$$

Aus der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} l(\alpha) = 2\{\alpha[1 - m^2(1 - \sqrt{(1 - m^2)})/M^2] - (1 - m^2)\}/\alpha^3 = 0$$

bekommt man sofort $\alpha = (1 - \sqrt{(1 - M^2)})\,(1 - m^2)/[1 - \sqrt{(1 - M^2)} - m^2] = \alpha_0$ und $\beta = -2(1 - m^2)/[1 + \sqrt{(1 - M^2)} - m^2] = \beta_0$ angesichts $\beta = B_1(\alpha)$.

Es ist also

$$\begin{aligned} \min_{[\alpha,\beta]\in B_1} L(m) &= [(1 - \alpha_0)^2 - m^2(1 + \beta_0)]/\alpha_0^2 = \\ &= m^2(M^2 - m^2)/(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2\,(1 - m^2)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Nachdem $\Omega' \subset \Omega$ ist und (13), (14) gilt, bekommt man sofort die Behauptung (9) des Satzes 4 (die Ungleichung

$$m^2(M^2 - m^2)/(1 - \sqrt{(1 - M^2)})^2 (1 - m^2) <$$
$$< [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]^2/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]^2$$

kann man dann leicht beglaubigen).

Bemerkung 2. In dem Satz 4 haben wir vorausgesetzt, dass $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 \leqq M^2$ ist. Solange $m^2 \leqq 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$ ist, folgt von dem Satz 3, dass das Gebiet Ω nur den Punkt $[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -1]$ enthält, wobei

$$\varrho(\boldsymbol{T}(\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)}), -1)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)})]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$$

ist; die Konvergenzgeschwindigkeit des untersuchten Verfahrens gleicht in diesem Fall der Konvergenzgeschwindigkeit des Oberrelaxationsverfahrens (siehe Satz 2 aus [3]).

Solange $m^2 = M^2$ ist, ist $[\alpha_0, \beta_0] = [\sqrt{(1 - M^2)}, -2\sqrt{(1 - M^2)}/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})]$ und es gilt $[\alpha_0, \beta_0] = [\alpha_{opt}, \beta_{opt}]$, $\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_0, \beta_0)) = 0$ (vergl. Satz 5 aus [3]).

Falls $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 < M^2$ ist, gilt für das im Satz 4 gesuchte Paar $[\alpha_0, \beta_0]$ die Ungleichung

$$\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha_0, \beta_0)) < [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$$

und das untersuchte Verfahren gibt eine schnellere Konvergenz als das Oberrelaxationsverfahren. Den Punkt $[\alpha_0, \beta_0]$ kann man also für eine gewisse praktisch anwendbare Approximation des Punktes $[\alpha_{opt}, \beta_{opt}]$ halten.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass die Ableitung der expliziten Formel für $[\alpha_{opt}, \beta_{opt}]$ im Falle $1 - \sqrt{(1 - M^2)} < m^2 < M^2$ sehr schwierig ist, da die Aufgabe zur Lösung komplizierter algebraischer Gleichungen höheren als zweiten Grades führt. Bezeichnet man nämlich mit $L_1(\mu_i)$, $L_2(\mu_i)$ die Quadrate der reellen Wurzeln der Gleichung (4), die der Zahl μ_i^2 entsprechen, d. h.

$$L_1(\mu_i) = [-2(1 - \alpha)\,\alpha - \mu_i^2\beta + \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)}]^2/\alpha^4\,,$$
$$L_2(\mu_i) = [-2(1 - \alpha)\,\alpha - \mu_i^2\beta - \sqrt{(\mu_i^4\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_i^2 + 4\alpha^2\mu_i^2)}]^2/\alpha^4\,,$$

kann man aus dem Verlauf der Funktionen $L_1(\mu_i)$, $L_2(\mu_i)$, $L(\mu_i)$ in der Menge Ω beweisen, dass die Zahl $\varrho(\boldsymbol{T}(\alpha, \beta))$ ihren Minimalwert an der Kurve C annimmt, die folgendermassen definiert its:

$$[\alpha, \beta] \in C \Leftrightarrow \max\,(L_1(M), L_2(M)) = L(m)\,.$$

Aus dem Satz über die gebundene Extremalpunkte folgt dann, dass man den Punkt $[\alpha_{opt}, \beta_{opt}]$ als einen im Gebiet Ω liegenden Schnittpunkt der Kurve C mit dem

Graphen der Funktion

$$\beta = C(\alpha) = \{M^2(1 - \alpha - m^2) - \alpha^2 m^4\}/m^2\{M^2(1 - \alpha - m^2) + \alpha m^2\}$$

bekommen kann; es gilt dabei, dass $C(\alpha) \geqq B_1(\alpha)$ ist und dass die Gerade B_1 die Tangente der Kurve C mit dem Berührungspunkt $[\alpha_0, \beta_0]$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] *Young, D. M.:* Iterative Solution of large linear Systems. Academic Press, 1971.

[2] *Šisler, M.:* Über ein zweiparametriges Iterationsverfahren. Aplikace matematiky, *18*, 1973, 325—332.

[3] *Šisler, M.:* Über die Optimierung eines zweiparametrigen Iterationsverfahrens. Aplikace matematiky, *20*, 1975, 126—142.

Souhrn

POZNÁMKY K OPTIMALISACI JEDNÉ DVOJPARAMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá jistou iterační metodou pro řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ s 2-cyklickou maticí. Iterační metoda je dána předpisem $\boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{T}(\alpha, \beta)\, \boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{P}(\alpha, \beta)\, \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{T}(\alpha, \beta)$, $\boldsymbol{P}(\alpha, \beta)$ jsou jisté matice závislé na matici $\boldsymbol{B}$ a dvou číselných parametrech α, β. Vzhledem k tomu, že uvažovaná metoda je zobecněním řady běžných iteračních metod, včetně metody superrelaxační, jsou v práci udány explicitní formule pro jisté hodnoty parametrů α, β, pro něž metoda konverguje rychleji než metoda superrelaxační.

Anschrift des Verfassers: RNDr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.