Klaus Tammer

Über eine Klasse von verallgemeinerten quadratischen Optimierungsproblemen mit nichtkonvexer Zielfunktion, die auf quasi- bzw. pseudokonvexe Probleme zurückführbar sind.

Aplikace matematiky, Vol. 21 (1976), No. 2, 111–119

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103629`

ÜBER EINE KLASSE VON VERALLGEMEINERTEN QUADRATISCHEN OPTIMIERUNGSPROBLEMEN MIT NICHTKONVEXER ZIELFUNKTION, DIE AUF QUASI- BZW. PSEUDOKONVEXE PROBLEME ZURÜCKFÜHRBAR SIND

KLAUS TAMMER

(Eingegangen 11. Februar 1974)

1. EINLEITUNG

Wir betrachten ein verallgemeinertes quadratisches Optimierungsproblem der Gestalt

(1) $$\min \{Q(x)/x \in G\},$$

wobei

(2) $$Q(x) = x'Cx + p'x$$

(C symmetrische (n,n)-Matrix, p, $x \in R^n$) und $G \subseteq R^n$ eine konvexe Menge ist.

Die Zielfunktion $Q(x)$ sei über G nicht konvex (ansonsten würden sich unsere Untersuchungen erübrigen). Da wir nach [7] stets o.B.d.A. annehmen können, daß $\dim G = n$ ist, was wir hier der Einfachheit halber auch voraussetzen werden, bedeutet dies gerade, daß die Matrix C nicht positiv semidefinit ist und sie somit mindestens einen negativen Eigenwert besitzt.

Dieser Beitrag schließt sich eng an die Ergebnisse aus [7] an. Auf Grundlage dort entwickelter notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Quasi- bzw. Pseudokonvexität einer quadratischen Funktion bezüglich einer konvexer Menge werden wir eine allgemeine Klasse von Problemen der Form (1) angeben, welche sich zurückführen lassen auf Probleme der Minimierung einer quasi- bzw. pseudokonvexen quadratischen Funktion bezüglich einer konvexen Menge. Es werden einige Eigenschaften dieser Problemklasse bewiesen, welche ihre Lösung erleichtern. Dabei wird es sich zeigen, dass die vorhandenen Methoden der zulässigen Richtungen zur Lösung solcher Probleme verwendet werden können, falls nur der Restriktionsbereich die für das Funktionieren der jeweiligen Methode erforderlichen Bedingungen erfüllt. Diese Verfahren können in vielen Fällen direkt auf Problem (1) angewendet werden wobei nur der Startpunkt geeignet gewählt werden muss.

2. THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN

In [2] wurde eine Zusammenstellung verschiedener verallgemeinerter Konvexitätsbegriffe sowie ihrer wichtigsten Eigenschaften gegeben. Uns interessieren hier besonders die Begriffe Quasikonvexität, strenge Quasikonvexität und Pseudokonvexität einer Funktion bezüglich einer konvexen Menge und wir stützen uns wesentlich auf die in [7] bewiesenen Kriterien hierfür für den Fall einer quadratischen Funktion (2). Es sei hier erwähnt, dass für quadratische Funktionen nach [7] die Begriffe Quasikonvexität und strenge Quasikonvexität äquivalent sind. Nach [2] übertragen sich für derartige verallgemeinerte konvexe Funktionen folgende Eigenschaften konvexer Funktionen.

Lemma 1.

a) *Ist $f(x)$ quasikonvex über der konvexen Menge G, so ist die Menge der globalen Minimumstellen von $f(x)$ über G konvex.*

b) *Ist $f(x)$ streng quasikonvex über der konvexen Menge G, so ist jedes lokale Minimum von $f(x)$ über G auch globales.*

c) *Ist $f(x)$ pseudokonvex über der konvexen Menge G, so nimmt $f(x)$ in einem Punkt $x_0 \in G$ genau dann ihr globales Minimum bezüglich G an, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

(3) *Für alle zulässigen Richtungen h im Punkt x_0 gilt* $h' \operatorname{grad} f(x_0) \geqq 0$.

Hierbei sind die in den einzelnen Aussagen angegebenen Funktionenklassen die jeweils größten, für die die entsprechenden Aussagen allgemein noch zutreffen. Im Hinblick auf die Anwendung von Verfahren der nichtlinearen Optimierung dürfte insbesondere die Eigenschaft c) pseudokonvexer Funktionen von Bedeutung sein, denn alle Verfahren der zulässigen Richtungen erzeugen ja bekanntlich gerade einen Punkt, welcher die Bedingung (3) erfüllt, falls die Konvergenz gesichert ist (vgl. etwa [1], ..., [5], [8]). Für die weiteren Untersuchungen werden wir wieder einige Bezeichnungen aus [7] verwenden. Wir werden gemäß den dortigen Ergebnissen uns hier stets mit dem Fall beschäftigen, daß die Matrix C genau einen negativen Eigenwert λ_0 besitzt. Den zugehörigen Eigenvektor bezeichnen wir mit h_0.

Es sei weiterhin $L = \{x/2Cx = -p\}$, $Q_0 = Q(x)$ für alle $x \in L$ der für alle $x \in L$ gleiche Zielfunktionswert, $t_0 = x'h_0$ für alle $x \in L$ der für alle $x \in L$ gleiche Wert $x'h_0$. Schließlich sei $K(s) = \{x/Q(x) \leqq s\}$, $K_1(s) = \{x \in K(s)/x'h_0 \geqq t_0\}$ und $K_2(s) = \{x \in K(s)/x'h_0 \leqq t_0\}$.

Auf Grund von Satz 2 und 3 aus [7] können wir nun folgende Aussage treffen.

Satz 1. *Es gelte*

1° *Die Matrix C besitzte genau einen negativen Eigenwert.*

2° *Es sei $L \neq \varnothing$.*

3° *Es sei $G \cap K(Q_0) \neq \varnothing$.*

Dan läßt sich Problem (1) zurückführen auf die folgenden beiden Probleme:

(4.1.) $$\min\{Q(x)/x \in G \cap K_1(Q_0)\}$$

und

(4.2.) $$\min\{Q(x)/x \in G \cap K_2(Q_2)\}\,.$$

Dabei bestehen folgende Beziehungen:

a) *Die Zielfunktion $Q(x)$ ist über den konvexen Restriktionsbereichen der Probleme* (4.1) *und* (4.2) *streng quasikonvex und für den Fall, daß über G* grad $Q(x) \neq 0$ *ist, sogar pseudokonvex.*

b) *Es gilt stets* $\inf\{Q(x)/x \in G\} = \min_{i=1,2}[\inf\{Q(x)/x \in G \cap K_i(Q_0)\}]$.

c) *Problem* (1) *ist genau dann lösbar, wenn für mindestens einen Index $i \in \{1, 2\}$ mit* $\inf\{Q(x)/x \in G \cap K_i(Q_0)\} = \min_{j=1,2}[\inf\{Q(x)/x \in G \cap K_j(Q_0)\}]$ *das entsprechende Problem* (4.i.) *lösbar ist.*

d) *Die Menge aller optimalen Punkte von* (1) *ergibt sich entweder aus der Menge aller optimalen Punkte von* (4.1.) *oder aus der Menge aller optimalen Punkte von* (4.2.) *oder aus deren Vereinigung, je nachdem, ob zwischen* $\inf\{Q(x)/x \in G \cap K_1(Q_0)\}$ *und* $\inf\{Q(x)/x \in G \cap K_2(Q_0)\}$ *die Relation „<", „>" oder „=" gilt.*

Beweis. Die Aussage a) folgt aus Satzt 2 und Satz 3 in [7]. Wegen Bedingung 3° und der in [7] Lemma 8 bewiesenen Aussage $K(s) = K_1(s) \cup K_2(s)$ für alle $s \leqq Q_0$ liegt natürlich jede optimale Lösung von (1) in $G \cap K_1(Q_0)$ oder $G \cap K_2(Q_0)$ und es gelten somit offensichtlich die Aussagen b), c) und d).

Wir können folglich Problem (1) unter den Voraussetzungen von Satz 1 stets zurückführen auf die Minimierung von $Q(x)$ über einer konvexen Teilmenge von $K_1(Q_0)$ bzw. $K_2(Q_0)$, über der $Q(x)$ streng quasikonvex und eventuell sogar pseudokonvex ist.

Zur Charakterisierung der Menge aller optimalen Punkte eines Problems der Form (1) für den Fall, daß $Q(x)$ über G quasikonvex ist (was z.B. auf (4.1.) und (4.2.) zutrifft), läßt sich folgendes aussagen.

Satz 2. *Es seien die Bedingungen* 1° *und* 2° *aus Satz* 1 *erfüllt und* $G \subseteq K_1(Q_0)$ *oder* $G \subseteq K_2(Q_0)$. *Es sei weiterhin $\hat{x}$ eine optimale Lösung von* (1) *mit* $Q(\hat{x}) < Q_0$. *Die Menge G_{opt} aller optimalen Punkte von* (1) *stimmt dann überein mit der Menge aller optimalen Punkte von*

(5) $$\min\{Q(x)/x \in G\,,\quad x'h_0 = \hat{x}'h_0\}\,,$$

wobei $Q(x)$ über dem Restriktionsbereich von Problem (5) *konvex ist, und läßt sich darstellen in der Form*

(6) $$G_{\mathrm{opt}} = \{x \in G/x = \hat{x} + y \quad \text{mit} \quad Cy = 0\,,\quad p'y = 0\}\,.$$

Beweis. Da der Restriktionsbereich von (5) eine Teilmenge von G ist und $\hat{x}$ enthält, ist zunächst die Menge aller optimalen Punkte von (5) enthalten in G_{opt}. Ist $\bar{x} \neq \hat{x}$ eine weitere optimale Lösung von (1), so muß nach Lemma 1 a) und deshalb, weil $Q(x)$ quadratisch ist, $Q(x)$ über der Verbindungsgeraden von $\hat{x}$ und $\bar{x}$ konstant gleich $Q(\hat{x})$ sein. In Lemma 8 in [7] wurde nun u.a. für alle $s < Q_0$ gezeigt, daß $K(s) = K_1(s) \cup K_2(s)$ und $K_1(s) \cap K_2(s) = \emptyset$ ist. Wendet man das auf $s = Q(\hat{x})$ an und berücksichtigt die Darstellung von $K_1(s)$ und $K_2(s)$ so ergibt sich aus den vorheringen Überlegungen sofort $\hat{x}'h_0 = \bar{x}'h_0$.

Da die Matrix C nur genau einen negativen Eigenwert hat und h_0 der zugehörige Eigenvektor ist, läßt sich leicht zeigen, daß $Q(x)$ bezüglich jeder zu h_0 senkrechten Hyperebene und somit auch bezüglich des Restriktionsbereiches von (5) konvex ist (vgl. [7]).

Es bleibt noch zu zeigen, dass G_{opt} die Darstellung (6) besitzt. Zunächst hat jeder Punkt mit der Darstellung (6) offensichtlich den gleichen Zielfunktionswert wie $\hat{x}$ und ist somit, da er auch in G liegt, optimal. Ist umgekehrt $\bar{x} \neq \hat{x}$ ein weiterer optimaler Punkt, so hatten wir bereits geschlossen, dass $Q(x)$ auf der Verbindungsgeraden von $\hat{x}$ und $\bar{x}$ mit der Darstellung $g = \{x/x = \hat{x} + t(\bar{x} - \hat{x}),\ t \in R^1\}$ konstant ist. Das bedeutet gerade, dass $(\bar{x} - \hat{x})'\, C(\bar{x} - \hat{x}) = 0$ und $(\bar{x} - \hat{x})'\,(2C\hat{x} + p) = 0$ ist. Da wir eben gezeigt hatten, dass $x'h_0 = \bar{x}'h_0$ ist, folgt aus $(\bar{x} - \hat{x})'\, C(\bar{x} - \hat{x}) = 0$ wegen der Konvexität von $Q(x)$ bezüglich jeder zu h_0 senkrechten Hyperebene die Gleichung $C(\bar{x} - \hat{x}) = 0$. Somit hat $\bar{x}$ eine Darstellung der Form (6) mit $y = \bar{x} - \hat{x}$.

Folgerung. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 besteht die Menge aller lokalen Optimallösungen von (1), deren Zielfunktionswert kleiner als Q_0 ist (und die somit nur als globale Optimallösungen in Frage kommen) aus höchstens zwei konvexen Mengen, von denen jeweils höchstens eine in $G \cap K_1(Q_0)$ bzw. $G \cap' K_2(Q_0)$ liegt. Ist darüberhinaus noch C regulär, so gibt es höchstens zwei derartige lokale Optimallösungen, dabei jeweils höchstens eine in $G \cap K_1(Q_0)$ bzw. $G \cap K_2(Q_0)$.

Für die Anwendung von Gradientenverfahren zur Lösung von Problem (1) sind noch die folgenden beiden Aussagen von Bedeutung.

Satz 3. *Sind die Bedingungen* 1°, 2° *und* 3° *aus Satz* 1 *erfüllt und ist ausserdem* $G \cap L \neq \emptyset$, *so gilt:*

a) *Kein* $\bar{x} \in G$ *mit* $Q(\bar{x}) > Q_0$ *erfüllt Bedingung* (3).

b) *Jedes lokale Minimum von* $Q(x)$ *über* $G \cap \{x/x'h_0 \geqq t_0\}$ (bzw. $G \cap \{x/x'h_0 \leqq t_0\}$) *ist auch globales Minimum von* $Q(x)$ *über dieser Menge und liefert somit auch eine optimale Lösung von* (4.1.) (bzw. (4.2.)).

c) *Erfüllt ein* $\bar{x} \in G$ *die Bedingung* (3), *so ist* $\bar{x} \in L$ *oder* $\bar{x}$ *ist optimal für Problem* (4.1.) (*falls* $\bar{x}'h_0 \geqq t_0$ *oder Problem* (4.2.) (*falls* $\bar{x}'h_0 \leqq t_0$).

Beweis.

a) Ist $\bar{x} \in G$ mit $Q(\bar{x}) > Q_0$ und $x_0 \in L \cap G$, so folgt sofort daraus, daß x_0 freier

Sattelpunkt von $Q(x)$ ist, daß $Q(x)$ bezüglich der Verbindungsgeraden von $\bar{x}$ und x_0 streng konvex ist und in x_0 ihr Minimum bezüglich dieser Geraden annimmt. Hieraus ergibt sich sofort die Ungleichung $(x_0 - \bar{x})'$ grad $Q(\bar{x}) < 0$, so daß (3) nicht erfüllt ist, da $h = x_0 - \bar{x}$ zulässige Richtung in Punkt $\bar{x}$ ist.

b) Da bekanntlich Bedingung (3) stets für das Vorliegen eines Minimums notwendig ist, kann nach a) kein lokaler Minimalpunkt $\bar{x}$ von $Q(x)$ über $G \cap \{x/x'h_0 \geqq t_0\}$ bzw. über $G \cap \{x/x'h_0 \leqq t_0\}$ mit $Q(\bar{x}) > Q_0$ existieren. Folglich liegt jeder derartige lokale Minimalpunkt in $K_1(Q_0)$ bzw. $K_2(Q_0)$. Da aber $Q(x)$ bezüglich dieser Mengen streng quasikonvex ist, folgt mit Lemma 1 b) die Behauptung.

c) Diese Aussage folgt aus a) sowie der Tatsache, daß nach Satz 3 aus [7] $Q(x)$ über $K_1(Q_0) \cap \{x/x'h_0 > t_0\}$ sowie über $K_2(Q_0) \cap \{x/x'h_0 < t_0\}$ pseudokonvex ist, wenn man noch Lemma 1 c) berücksichtigt.

Satz 4. *Sind die Bedingungen* 1°, 2° *und* 3° *aus Satz* 1 *erfüllt und ist außerdem* $G \cap L = \emptyset$, *so gilt:*

a) $Q(x)$ *ist über den Restriktionsbereichen der Probleme* (4.1.) *und* (4.2) *pseudokonvex.*

b) *Existiert zu jedem* $x_1 \in G$ *mit* $Q(x_1) > Q_0$ *und* $x_1'h_0 \geqq t_0$ (*bzw.* $x_1'h_0 \leqq t_0$) *ein* $x_2 \in G$ *mit* $Q(x_2) \leqq Q_0$ *und* $x_2'h_0 \leqq x_1'h_0$ (*bzw.* $x_2'h_0 \geqq x_1'h_0$), *so ist für alle* $x \in G \cap \{x/x'h_0 \geqq t_0\}$ (*bzw. für alle* $x \in G \cap \{x/x'h_0 \leqq t_0\}$) *die Bedingung* (3) *notwendig und hinreichend für das Vorliegen einer optimalen Lösung von* (4.1.) (*bzw. von* (4.2.)).

Beweis. Aussage a) folgt aus Satz 3 in [7]. Wir zeigen b), wobei wir hier nur den ersten Fall betrachten, da er dandere analog beweisbar ist.

Da $Q(x)$ über $G \cap K_1(Q_0)$ unter unseren Voraussetzungen pseudokonvex ist, ergibt sich wegen Lemma 1 c) die Aussage zunächst für alle $x \in G \cap K_1(Q_0)$. Es bleibt zu zeigen, daß (3) für kein $x \in G$ mit $Q(x) < Q_0$ und $x'h_0 \geqq t_0$ erfüllt sein kann. Es sei $x_1 \in G$ mit $Q(x_1) < Q_0$ und $x_1'h_0 \geqq t_0$. Nach Voraussetzung existiert ein $x_2 \in G \cap K_1(Q_0)$ mit $x_2'h_0 \leqq x_1'h_0$. Betrachten wir die Verbindungsgerade g von x_1 und x_2. Da $K_1(Q_0)$ nach [7] konvex ist, $x_2 \in K_1(Q_0)$, $x_1 \notin K_1(Q_0)$ und $x_2'h_0 \leqq x_1'h_0$ gilt, folgt sofort aus der Darstellung von $K_1(Q_0)$, daß der Durchschnitt von g und $K_1(Q_0)$ entweder nur aus dem Punkt x_2 besteht (x_2 wäre dann Randpunkt von $K_1(Q_0)$) oder aus genau zwei Punkten besteht, auf deren Verbindungsstrecke x_2 liegt. Da der Rand von $K_1(Q_0)$ gerade dadurch charakterisiert ist, daß dort $Q(x) = Q_0$ ist, ist es im zweiten Fall sofort klar (da $Q(x)$ quadratisch ist), daß $Q(x)$ über g streng konvex ist. Im ersten Fall folgt die strenge Konvexität von $Q(x)$ über g daraus, daß wegen grad $Q(x_2) \neq 0$ und der Konvexität von $K_1(Q_0)$ die Gerade g innerhalb der Tangentialhyperebene an $K_1(Q_0)$ im Punkt x_2 liegen muß. Folglich erhalten wir in beiden Fällen wegen $Q(x_2) < Q(x_1)$ und der strengen Konvexität von $Q(x)$ über g die Ungleichung $(x_2 - x_1)'$ grad $Q(x_1) < 0$, was zu beweisen war.

Wir wollen nun einige Vorschläge dafür machen, wie man die erzielten Resultate zur praktischen Lösung von Problem (1) verwenden könnte. Grundvoraussetzung für die entwickelten Resultate sind die Bedingungen 1°, 2° und 3° aus Satz 1.

Die Überprüfung der Bedingung 2° kann einfach so erfolgen, dass man mit einem der bekannten Algorithmen (vgl. etwa [6]) versucht, eine Lösung x_0 des linearen Gleichungssystems $2Cx = -p$ zu bestimmen. Hat man solch ein x_0 gefunden, so ist Bedingung 2° erfüllt und man kann sofort noch den wichtigen Wert $Q_0 = Q(x_0)$ ausrechnen. Die Überprüfung der Bedingung 1° könnte so vorgenommen werden, dass man etwa mit einer geeigneten Variante der Potenzmethode und mit Hilfe einer passenden Spektralverschiebung (vgl. etwa [6]) zunächst den kleinsten Eigenwert λ_0 und danach, falls dieser negativ ist (wäre er nicht negativ, so wäre $Q(x)$ sogar konvex), den zweitkleinsten Eigenwert von C bestimmt bzw. zumindest sein Vorzeichen abschätzt. Falls dieser nicht negativ ist, ist Bedingung 1° erfüllt. Der für die weitere Rechnung benötigte zu λ_0 gehörende Eigenvektor h_0 kann bei der Berechnung von λ_0 mit bestimmt werden. Mit Hilfe von h_0 und x_0 berechnet man schliesslich noch den Wert $t_0 = x_0' h_0$.

Die Überprüfung von Bedingung 1° ist natürlich besonders dann sehr einfach, wenn C nahezu oder sogar exakt Diagonalgestallt besitzt.

Die Überprüfung der Bedingung 3° geschieht am besten, falls von vornherein kein $\bar{x} \in G$ mit $Q(\bar{x}) \leqq Q_0$ bekannt ist und sich auch nicht so leicht finden läßt, im Laufe der weiteren Rechnungen.

Nehmen wir nun an, wir hätten bereits festgestellt, daß zumindest die Bedingungen 1° und 2° erfüllt sind. Unter der Annahme, daß auch Bedingung 3° erfüllt ist, können wir nun nach Satz 1 Problem (1) vollständig lösen, indem wir die Hilfsprobleme (4.1.) und (4.2.) vollständig lösen.

Ist Bedingung 3° erfüllt, so ist mindestens einer der Restriktionsbereiche dieser beiden Hilfsprobleme nicht leer. Kann man feststellen, daß einer dieser beiden Bereiche leer ist, so erleichtert das nur die weiteren Rechnungen, da dann nur noch dasjenige Problem (4.1.) oder (4.2.) gelöst werden muß, dessen Restriktionsbereich nicht leer ist.

Für die Lösung der Probleme (4.1.) und (4.2.) können wir nun einige Varianten vorschlagen, die alle darauf hinauslaufen, eine geeignete Methode der zulässigen Richtungen auf ein zu (4.1.) bzw. (4.2.) äquivalentes Problem anzuwenden, bei dem die in (4.1.) bzw. (4.2.) auftretende Nebenbedingung $x \in K_1(Q_0)$ bzw. $x \in K_2(Q_0)$ nicht explizit berücksichtigt werden muß.

Im folgenden wollen wir unsere Darlegungen auf (4.1.) beschränken. Für Problem (4.2.) kann man analog vorgehen.

Fall 1. Die einfachste Lösungsmöglichkeit für (4.1.) ist dann gegeben, wenn ein Punkt $\bar{x} \in G \cap K_1(Q_0)$ mit $\bar{x}' h_0 < t_0$ bekannt ist, oder wir einen solchen Punkt relativ einfach bestimmen können.

In diesem Fall ist natürlich Bedingung 3° damit erfüllt. Erfüllt der Punkt $\bar{x}$ bereits Beziehung (3), so ist er wegen der Pseudokonvexität von $Q(x)$ über $G \cap K_1(Q_0) \cap \cap \{x/x'h_0 < t_0\}$ und wegen Lemma 1 c) sofort optimal für (4.1.). Andernfalls können wir einfach direkt auf Problem (1) ein geeignetes Verfahren der zulässigen Richtungen anwenden (vgl. etwa [1], ..., [5], [8]), wobei natürlich für die Anwendbarkeit und die Konvergenz der verschiedenen Verfahren immer gewisse Forderungen an den Restriktionsbereich gestellt werden müssen. Solche Bedingungen sind neben der Konvexität des Restriktionsbereich in der Regel noch dessen Abgeschlossenheit, Beschränktheit sowie eine gewisse Art seiner Beschreibung etwa durch konvexe bzw. lineare Ungleichungen.

Für die Anwendung des Verfahrens auf Problem (1) ist es aber hier wesentlich, daß man den Punkt $\bar{x}$ als Startpunkt wählt, also $x_1 = \bar{x}$ setzt. Wird nun, wie bei den Verfahren der zulässigen Richtungen allgemein üblich ist, der auf den k-ten Iterationspunkt x_k folgende nächste Iterationspunkt x_{k+1} so bestimmt, daß $Q(x)$ auf der Verbindungsstrecke von x_k und x_{k+1} streng monoton fällt, so ist auf diese Weise wegen $x_1 \in G \cap K_1(Q_0)$ und $x_1 \notin K_2(Q_0)$ und der in [7] (Lemma 8) bewiesenen Eigenschaften der Mengen $K_1(Q_0)$ und $K_2(Q_0)$ gesichert, daß automatisch alle Iterationspunkte x_k ($k \geqq 2$) im Innern von $K_1(Q_0)$ liegen. Da aber $Q(x)$ über int $K_1(Q_0)$ pseudokonvex ist, erhält man auf diese Weise, falls G entsprechenden Bedingungen genügt, eine optimale Lösung von (4.1.), ohne die Bedingung $x \in K_1(Q_0)$ explizit berücksichtigen zu müssen.

Fall 2. Kennt man wie im Fall 1 einen Punkt $\bar{x} \in G \cap K_1(Q_0)$, ist aber $\bar{x}'h_0 = t_0$, so bedeutet das gerade, dass $\bar{x} \in G \cap L$ ist, so dass grad $Q(\bar{x}) = 0$ ist. In einem solchen Punkt $\bar{x}$ versagen bekanntlich die meisten Verfahren der zulässigen Richtungen (falls nicht zufällig $\bar{x}$ schon optimal für (4.1.) ist), da $\bar{x}$ die Beziehung (3) in Gleichungsform erfüllt.

Existiert überhaupt ein $\bar{\bar{x}} \in G \cap K_1(Q_0)$ mit $\bar{\bar{x}}'h_0 < t_0$, so existiert offensichtlich auch in jeder Umgebung von $\bar{x}$ ein solches $\bar{\bar{x}}$. Eventuell kann man solch ein $\bar{\bar{x}}$ dann durch einfache Überlegungen oder Probieren finden, so dass dann wieder Fall 1 vorläge.

Ist das nicht ohne weiteres möglich, so ließen sich einige in [5] entwickelte Ideen für ein allgemeines Verfahren der zulässigen Richtungen für quadratische Probleme auf das Problem

$$\min \{Q(x)/x \in G,\ x'h_0 \geqq t_0\} \tag{7}$$

mit dem Startpunkt $x_1 = \bar{x}$ anwenden. Dabei ist es für unsere Zwecke wesentlich, dass man mit dem dort beschriebenen Konzept unter sehr allgemeinen Bedingungen an den Restriktionsbereich (Konvexität, Abgeschlossenheit, Beschränktheit) stets einen lokalen Minimalpunkt findet (und nicht nur einen Punkt, der Bedingung (3) erfüllt wie bei den meisten Verfahren). Für Problem (7) ist aber nach Satz (3 b) ein solcher lokale Minimalpunkt gleichzeitig optimale Lösung von (4.1.).

Fall 3. Es sei uns zunächst kein $\bar{x} \in G \cap K_1(Q_0)$ bekannt. Dann könnte man versuchen, entweder Problem (7) oder ein gewisses Problem der Form

$$(8) \qquad \min \{Q(x)/x \in G,\ x'h_0 \geqq t_1\}$$

mit einer geeigneten Methode der zulässigen Richtungen zu lösen.

Ist $L \cap G \neq \emptyset$, so erhält man nach Satz 3 c) durch Anwendung einer solchen Methode auf Problem (7) entweder eine optimale Lösung von (4.1.) oder ein Element aus $L \cap G$, falls nur der Restriktionsbereich von (7) entsprechenden Bedingungen genügt, so daß man entweder fertig ist oder Fall 2 vorzuliegen hat.

Ist aber $L \cap G = \emptyset$, so kann es unter Umständen möglich sein, daß man auf diese Weise eine Endlösung $\tilde{x}$ erhält mit $Q(\tilde{x}) < Q_0$. Nach dem Beweis von Satz 4 b) gilt dann für alle $x \in G \cap K_1(Q_0)$ die Beziehung $x'h_0 < \tilde{x}'h_0$. Wählt man nun den Wert t_1 aus Problem (8) geeignet (natürlich größer als $\tilde{x}'h_0$), so sind für Problem (8) die Voraussetzungen von Satz 4 b) erfüllt, falls überhaupt $G \cap K_1(Q_0)$ nicht leer ist. Um mit der Lösung von Problem (8) sofort nach Satz 4 b) eine optimale Lösung von (4.1.) zu erhalten, muß der Wert t_1 andererseits auch klein genug gewählt werden, daß mindestens eine optimale Lösung von (4.1.), falls eine solche existiert, für (8) zulässig ist. Solch ein Wert t_1, der beiden Forderungen genügt, existiert natürlich immer, falls (4.1.) überhaupt lösbar ist. Natürlich wird solch ein t_1 nicht ohne weiteres zu finden sein. Man könnte hier so vorgehen, daß man Problem (8) für verschiedene Werte von t_1 löst, wobei man diesen Wert immer geeignet in Abhängigkeit von der im vorigen Schritt erhaltenen Endlösung $\tilde{x}$ (falls für diese noch $Q(\tilde{x}) < Q_0$ ist, da sonst wieder Fall 1 vorläge) wählt.

Hat man auf irgendeine Art eine optimale Lösung $\hat{x}$ von (4.1.) mit $Q(\hat{x}) < Q_0$ gefunden, so kann man mit Hilfe von Satz 2 sogar alle optimalen Lösungen von (4.1.) relativ leicht angeben.

Hat man Problem (4.2.) auf ähnliche Weise gelöst, so ist damit nach Satz 1 auch Problem 1 gelöst, da man nur noch die Zielfunktionswerte der optimalen Lösungen von (4.1.) und (4.2.) vergleichen muß.

Literaturverzeichnis

[1] *Демьянов, В. Ф., Рубинов, А. М.:* Приближенные методы решения экстремальных задач, Наука, Ленинград 1965

[2] *Elster, K. - H.:* Ergebnisse und Probleme der nichtlinearen Optimierung. Wiss. Z. d. Technischen Hochschule Ilmenau 15 (1969), 37—61.

[3] *Hadley, G.:* Nichtlineare und dynamische Programmierung. Verlag „Die Wirtschaft", Berlin 1969.

[4] *Künzi. H. P., Krelle, W.:* Nichtlineare Programmierung. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1962.

[5] *Lommatszch, K.:* Eine Anwendung der linearen parametrischen Optimierung auf quadratische Optimierungsprobleme. Dissertation B, Humboldt-Universität Berlin, Sektion Mathematik, 1973.

[6] *Faddejew, D. K., Faddejewa, W. N.:* Numerische Methoden der linearen Algebra. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.
[7] *Tammer, K.:* Notwendige und hinreichende Bedingungen für die (strenge) Konvexität. Pseudokonvexität und (strenge) Quasikonvexität einer quadratischen Funktion bezüglich einer konvexen Menge, eingereicht 1974, Aplikace Matematiky
[8] *Zoutendijk, G.:* Methods of feasible directions, A study in linear and non-linear programming. Amsterdam — London — New York — Princeton, Elsevier Publishing Company 1960.

Souhrn

O TŘÍDĚ ZOBECNĚNÝCH KVADRATICKÝCH OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOH S NEKONVEXNÍ CÍLOVOU FUNKCÍ, KTERÉ LZE PŘEVÉST NA KVAZIKONVEXNÍ NEBO PSEUDOKONVEXNÍ ÚLOHY

KLAUS TAMMER

V předložené práci je udána třída zobecněných kvadratických optimalizačních úloh s nekonvexní cílovou funkcí, které se dají převést na minimalizaci kvazikonvexní anebo pseudokonvexní kvadratické funkce vzhledem k jisté konvexní množině.

Pomocí různých vlastností takovýchto úloh, dokázaných v práci, jsou dány návrhy řešení, které vedou především k použití metody přípustných směrů.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Klaus Tammer*, Humboldt-Universität Berlin, Sektion Mathematik, 1086 Berlin, PSF 1297, DDR.