Ondrej Gallo

О некоторых свойствах характеристики огибающей коническо-винтовой поверхности

Aplikace matematiky, Vol. 20 (1975), No. 3, 155–165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103581

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОГИБАЮЩЕЙ КОНИЧЕСКО-ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ОНДРЕЙ ГАЛЛО

(Поступило в редакцию 10ого октября 1972)

В статье описываются некоторые свойства характеристики огибающей винтовой поверхности, образованной при помощи винтового движения конической поверхности второго порядка.

Для изображения будет использоваться метод проектирования на две плоскости проекций. Пусть задано (осью $o \perp \pi$ и параметром v_0) левовращающее винтовое движение. Пусть далее имеется коническая поверхность с вершиной V и направляющим еллипсом k в плоскости π (см. рис. 1).

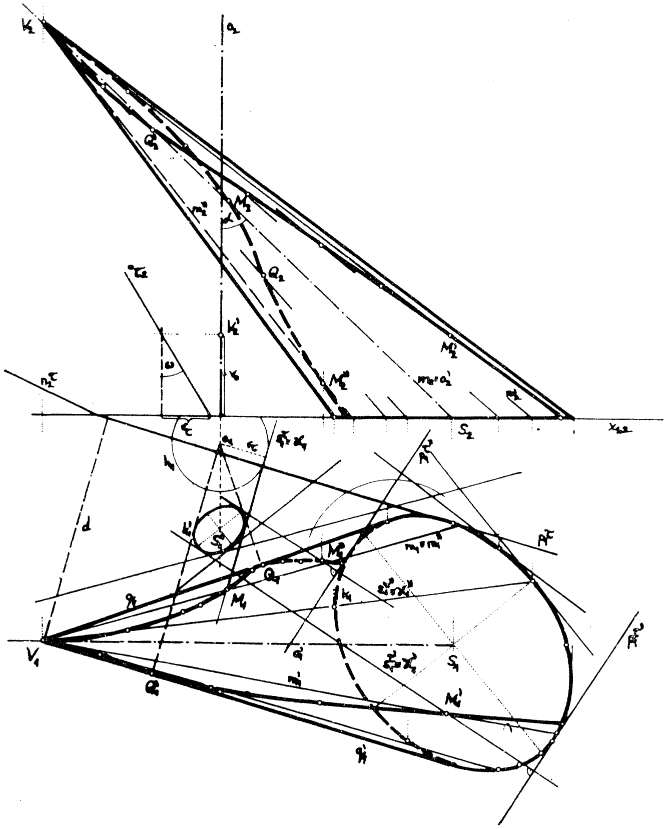
В работе [1] рассматривался метод построения точек характеристики e огибающей винтовой поверхности Φ на отдельных образующих прямых m конической поверхности φ, основанный на использовании касательных плоскостей τ, касающихся поверхности φ вдоль образующих прямых m. Точка M характеристики e принадлежащая образующей прямой m строится как точка пересечения прямых m и s^τ где s^τ – характеристика развертываемой винтовой поверхности η, образованной винтовым движением плоскости τ при данном винтовом движении.

Радиус винтовой линии, являющейсяа ребром возврата развертываемой винтовой поверхности η, которая в свою очередь возникает винтовым движением произвольной касательной плоскости τ конической поверхности φ не параллельной оси винтового движения o, равен:

$$r_\tau = v_0 \,.\, \mathrm{tg}\, \omega \quad (\omega = \sphericalangle o\tau)\,.$$

Его можно также определить с помощью вращения плоскости τ вокруг оси o так, чтобы она стала перпендикулярной фронтальной плоскости проекций ν.

Горизонтальной проекцией направляющей винтовой линии является окружность h_1 с радиусом r_τ и центром в точке o_1. Горизонтальная проекция s_1^τ характеристики s^τ развертываемой винтовой поверхности η, являющейся линией ската плоскости τ, касается оркужности h_1 и периендикулярна p_1^τ. Так как существуют две прямых обладающие описанными свойствами необходимо учесть смысл винтового движения. Точка $M_1 \equiv m_1 \,.\, s_1^\tau$ является горизонтальной проекцией точки M характеристики e. Фронтальная проекция M_2 лежит на фронтальной проекции образующей прямой m.



Рнс. 1.

Точки Q, Q' характеристики e принадлежащие образующим прямым q, q' конической поверхности φ, касательные плоскости поверхности вдоль которых параллельны оси o винтового движения мы определим следующим образом: характеристика поверхности возникающей винтовым движений такой плоскости должна лежать в плоскости проходящей через ось o перпендикулярно касательной плоскости, поэтому:

$$o_1Q_1 \perp q_1 \,; \quad o_1Q_1' \perp q_1' \,.$$

Пусть v — расстояние вершины V конической поверхности φ от плоскости π. Тогда расстояние горизонтальных следов p_1^τ касательных плоскостей τ поверхности φ от горизонтальной проекции V_1 вершины V равно:

$$d = v \,.\, \mathrm{tg}\, \omega\,, \quad (\omega = \sphericalangle o\tau)\,.$$

Далее, горизонтальные следы p_1^τ касаются направляющего эллипса k_1 конической поверхности φ. Горизонтальные проекции s_1^τ прямых s^τ перпендикулярны соответствующим следом p_1^τ плоскостей τ и их расстояние от o_1 равно:

$$r_\tau = v_0 \,.\, \mathrm{tg}\, \omega\,, \quad (\omega = \sphericalangle o\tau)\,.$$

Из этого следует, что s_1^τ огибают эллипс k_1' подобный направляющему эллипсу k_1; коэффициент подобия эллипсов k_1, k_1' равен v/v_0. Соответствующие прямые перпендикулярны друг другу, поэтому также оси эллипсов перпендикулярны и имеет место

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{V_1S_1}{o_1S_1'} = \frac{v}{v_0}\,.$$

Центром эллипса k_1' является точка S_1', при этом

$$o_1S_1' \perp o_1' \quad (o' = S'V)\,,$$
$$o_1S_1' = v_0 \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha\,, \quad (\alpha = \sphericalangle oo')\,.$$

Это можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Горизонтальные проекции s_1^τ характеристик s^τ развертываемых винтовых поверхностей η, которые возникают винтовым движением касательных плоскостей τ конической поверхности φ, определенной вершиной V и направляющим эллипсом k_1 в плоскости π огибают при винтовом движении определенном с помощью оси $o \perp \pi$, смысла и параметра эллпс k_1' подобный эллипсу k_1, центром которого является точка $S_1'(o_1S_1' \perp o_1'; o' = SV; o_1S_1' = v_0\, \mathrm{tg}\, \alpha; \alpha = \sphericalangle oo')$. Коэффициент подобия эллипсов k_1, k_1' равен $v : v_0$ (где v — расстояние точки V от π). Оси эллипсов перпендикулярны друг другу и имеет место равенство*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{V_1S_1}{o_1S_1'} = \frac{v}{v_0}\,.$$

Сформулированным свойством можно воспользоваться для упрощения построения точек характеристики e огибающей винтовой поверхности.

Построим точки M', M'' характеристики e на образующих прямых m', m'' конической поверхности φ (горизонтальные следы касательных плоскостей вдоль этих прямых параллельны — см. рис. 1) следующим образом: построим касательные $s_1^{\tau'}$, $s_1^{\tau''}$ эллипса k_1' перпендикулярные следом $p_1^{\tau'}$, $p_1^{\tau''}$ и положим $M_1' \equiv s_1^{\tau'} \,.\, m_1'$, $M_1'' \equiv s_1^{\tau''} \,.\, m_1''$. На фронтальных проекциях m_2', m_2'' находятся M_2', M_2''.

Если направляющей линией k конической поверхности φ в плоскости π является окружность (см. рис. 2), то свойство горизонтальных проекций s_1^τ характеристик s^τ сформулированное в теореме 1 а также построение точек характеристики e упрощаются.

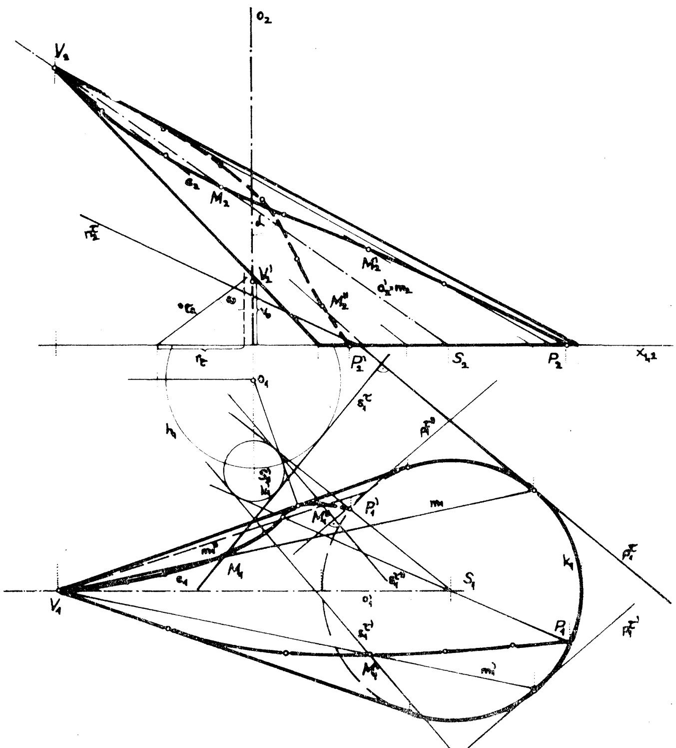


Рис. 2.

В этом случае, горизонтальные проекции s_1^τ характеристик s^τ развертываемых винтовых поверхностей η огибают окружность k' в плоскости π, центром которой является точка S_1' ($o_1 S_1' \perp o_1'$; $o_1 S_1' = v_0 \,.\, \operatorname{tg} \alpha$; $\alpha = \sphericalangle oo'$). Две возможности выбора S_1' соответствуют двум возможностям смысла винтового движения. Радиус r' окружности k' определяется соотношением

$$\frac{r}{r'} = \frac{v_0}{v}$$

где r — радиус направляющей окружности k конической поверхности φ и v — растояние вершины V от плоскости π.

Используя это свойство можно очень просто строить точки характеристики e. На образующих прямых m', m'' (вдоль которых касаются конической поверхности плоскости τ', τ'') строят точки характеристики e следующим образом: проводят касательные окружности k_1' перпендикулярные следом $p_1^{\tau'}$, $p_1^{\tau''}$. Таким образом получают прямые $s_1^{\tau'}$, $s_1^{\tau''}$, пересекающие горизонтальные проекции m_1', m_1'' в точках M_1', M_1''. Так как выбор точек пересечения не является однозначным, необходимо учитывать смысл винтового движения и отклонения плоскостей τ', τ'' от оси o винтового движения. На фронтальных проекциях m_2', m_2'' находятся точки M_2', M_2''.

Точки P, P' характеристики e на направляющей окружности k в плоскости π строят следующим образом: проводят касательные окружности k_1' проходящие через точку S_1. Точки пересечения этих касательных с окружностью k_1 как раз

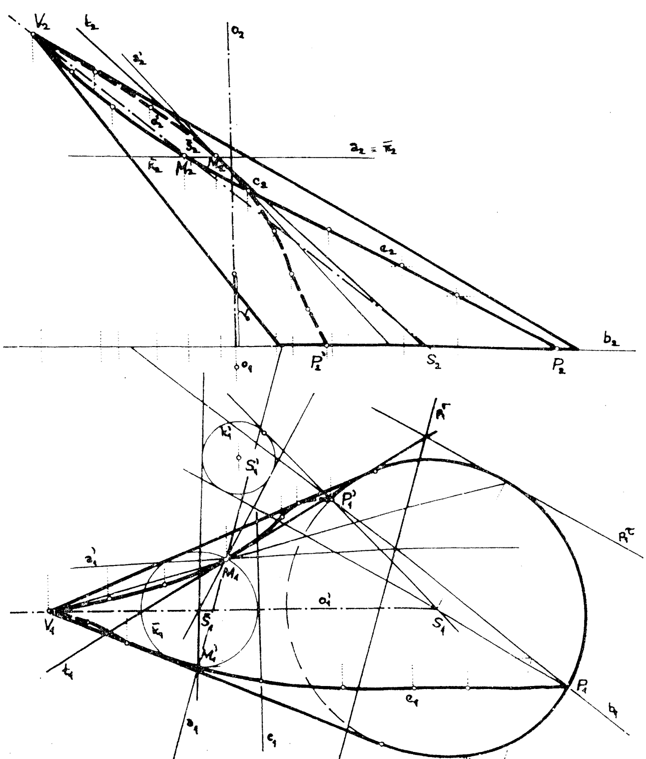


Рис. 3

являются горизонтальными проекциями P_1, P'_1 искомых точек. Точки P_2, P'_2 находятся на $x_{1,2}$, как это следует из только что описанного построения.

Если вместо направляющей окружности k в плоскости π взять окружность $\bar{k}$ ридуса $\bar{r}$ в плоскости $\bar{\pi} \parallel \pi$ (см. рис. 3), то ни радиус r' ни центр S' окружности k' не меняются, так как имеет место следующее соотношение

$$v_0 : v : \bar{v} = r' : r : \bar{r} ,$$

где $\bar{v}$ — расстояние точки V от плоскости $\bar{\pi}$.

Следовательно, можно построить точки характеристики e принадлежащие любой окружности конической поверхности φ в плоскости параллельной плоскости π, подобно тому, как они строятся на направляющей окружности k. Например, точки M, M' характеристики e на окружности $\bar{k}$ с центром $\bar{S}$ строятся следующим образом: проводим касательные окружности k'_1 проходящие через точку $\bar{S}_1$. Точки пересечения этих касательных с $\bar{k}_1$ являются, для данного смысла винтового движения, точками M_1, M'_1. На фронтальной проекции $\bar{k}_2$ находятся точки M_2, M'_2.

Из построения следует, что в случае когда окружность k'_1 не имеет общей точки с o'_1, существуют на каждой окружности конической поверхности φ в плоскости параллельной плоскости π две точки характеристики e. Прямые соединяющие эти точки параллельны плоскости π и пересекают коническую поверхность в точках характеристики e, т. е. в кривой четвертого порядка.

Эти прямые не имеют кроме точек характеристики e других общих точек с конической поверхностью. Следовательно, они являются образующими прямыми плоскости второго порядка. Так как они параллельны плоскости π, то они являются прямыми одной системы гиперболического параболоида.

Этим свойством можно воспользоваться для построения касательной в точке характеристики e. Характеристика e на самом деле является линией пересечения образующей конической поверхности φ и упомянутого гиперболического параболоида. Касательная в точке характеристики e может потом строиться как линия пересечения касательных плоскостей обеих поверхностей в заданной точке. На рис. 3 показано построение этим образом касательной t в точке M характеристики e. Касательная плоскость τ образующей конической поверхности φ касается ее вдоль образующей прямой VM и горизонтальный след p_1^τ является касательной направляющей окружности k в горизонтальном следе образующей прямой VM. Касательная плоскость σ гиперболического параболоида в точке M определяется прямыми a, a'. Прямая a' может быть например построена как прямая проходящая через точку M и пересекающая скрещивающиеся линии b, c.

Отметим следующее свойство характеристик s^τ развертываемых винтовых поверхностей η возникающих винтовым движением касательных плоскостей τ конической поверхности φ сформулированное в теореме 1.

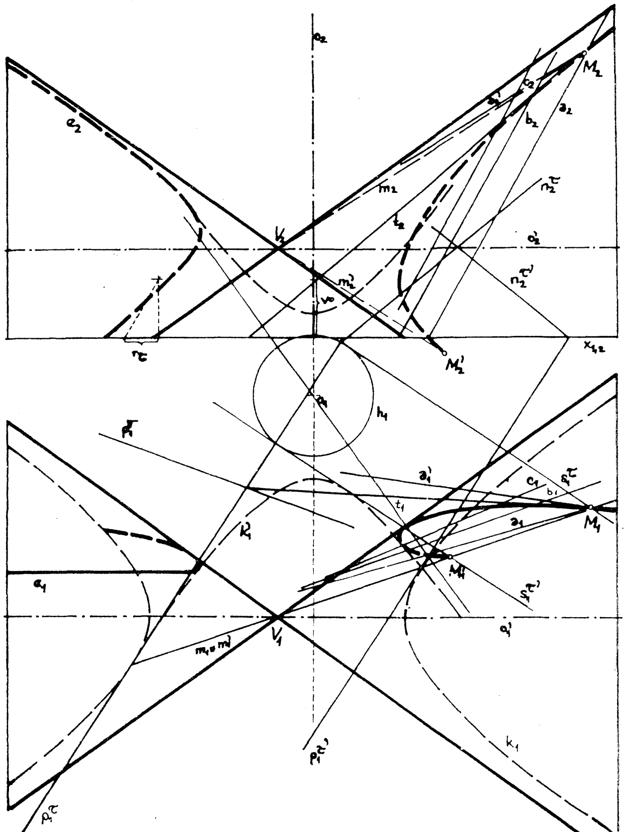


Рис. 4.

Для радиусов r_τ винтовых линий являющихся ребрами возврата развертываемых винтовых поверхностей η имеет место:

$$r_\tau = v_0 \,.\, \mathrm{tg}\, \omega \quad (\omega = \sphericalangle \tau o)\,.$$

Для расстояния d горизонтальной проекции V_1 вершины V в плоскость $\pi \perp o$ от следа касательной плоскости τ верно следующее:

$$d = v \,.\, \mathrm{tg}\, \omega$$

(где v — расстояние вершины V от плоскости π).

Рассматриваемое свойство не меняется даже в случае, когда пересечением конической поверхности φ и плоскости π является не эллипс или окружность а парабола или гипербола. На рис. 4 показано построение характеристики e

огибающей винтовой поверхности возникшей винтовым движением конической поверхности φ, пересечением которой с плоскостью π является гипербола k_1. Горизонтальные проекции s_1^τ характеристик s^τ развертываемых винтовых поверхностей образованных винтовым движением касательных плоскостей τ конической поверхности φ огибают гиперболу k_1' подобную гиперболе k с коэффициентом подобия $v : v_0$; соответствующими друг другу точками являются V_1, o_1 и соответствующие прямые взаимно перпендикулярны.

На рис. 5 показано построение характеристики e огибающей винтовой поверхности образованной винтовым движением конической поверхности φ, пересечением которой с плоскостью π является парабола k. Горизонтальные проекции s_1^τ характеристик s^τ (см. теорему 1) огибают параболу k_1' подобную параболе k_1; при этом для отношения подобия имеет место то же самое что в предыдущем случае. С помощью параболы k_1' возможно построить точки характеристики e на любой образующей прямой конической поверхности φ. На образующих прямых m, m' строятся точки характеристики e следующим образом: строим $s_1^\tau, s_1^{\tau'}$ как касательные параболы k_1' перпендикулярные p_1^τ и $p_1^{\tau'}$. Имеет тогда место $M_1 \equiv m_1 . s_1^\tau$ и $M_1' \equiv m_1' . s_1^{\tau'}$. Если горизонтальный след нельзя построить, воспользуемся горизонталью плоскости τ. На образующей прямой q таким образом строится точка Q характеристики e. $Q_1 \equiv q_1 . s_1$ где s_1 – касательная параболы k_1' перпендикулярная ${}^I h_1$, которая является горизонталью касательной плоскости конической поверхности φ вдоль образующей q.

На основании свойств рассмотренных для конкретных случаев конической поверхности φ мы в состаянии сделать некоторые обобщения.

Во первых, свойство характеристик s^τ сформулированное в теореме 1 не зависит от положения конической поверхности φ по отношению к оси o винтового движения. Свойство не меняется также в случае когда вместо плоскости π рассматривается произвольная плоскость $\bar{\pi}$ перпендикулярная оси o винтового движения непроходящая через точку V. Расстояние d в этом случае является расстоянием ортогональной проекции V_1 точки V в плоскость $\bar{\pi}$ от линии пересечения плоскостей τ и $\bar{\pi}$ и v – это расстояние точки V от плоскости $\bar{\pi}$.

Однако, тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Ортогональные проекции s_1^τ характеристик s^τ развертываемых винтовых поверхностей возникающих винтовым движением касательных плоскостей конической поверхности второго порядка в произвольную плоскость $\bar{\pi}$ перпендикулярную оси o винтового движения, непроходящую через вершину V конической поверхности огибают коническое сечение подобное коническому сечению конической поверхности и плоскости $\bar{\pi}$. Коэффициент подобия равен $v_0 : v$, где v_0 – параметр винтового движения и v – расстояние вершины V от плоскости $\bar{\pi}$. Оси конических сечений перпендикулярны друг другу. Соответствую-*

щими точками являются V_1, o_1 (V_1 — ортогональная проекция вершины V в $\bar{\pi}$; o_1 — точка пересечения оси o винтового движения с плоскостью $\bar{\pi}$).

Характеристика e огибающей винтовой поверхности является пространственной кривой четвертого порядка I. вида, как это вытекает из того, что характеристика e является линией пересечения двух бесконечно близких положений конической поверхности φ при данном винтовом движении.

Это утверждение можно доказать также с помощью проективных свойств поверхностей. Коническая поверхность φ рассматриваемая как квадратический пучок прямых $K(m, m', m'', \ldots)$ является (см. [2]) перспективным с пучком второго порядка $K(\tau, \tau', \tau'', \ldots)$ своих касательных плоскостей вдоль соответствующих образующих прямых. Пучок второго порядка плоскостей $K(\tau, \tau', \tau'', \ldots)$ проективен в свою очередь с пучком второго порядка плоскостей $V(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots)$, образованным касательными плоскостями $\varkappa = s^{\tau}s_1^{\tau}$ цилиндрической поверхности, направляющей линией которой является коническое сечение k_1' и направление образующих прямых которой параллельно оси o винтового движения (рис. 1). Пучки второго порядка плоскостей $K(\tau, \tau', \tau'', \ldots)$ и $V(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots)$ проективны, так как для соответствующих плоскостей этих пучков имеет место: $\tau \perp \varkappa$, $\tau' \perp \varkappa'$, ... Из этого далее следует, что также пучок второго порядка прямых $K(m, m', m'', \ldots)$ проективен с пучком второго порядка плоскостей $V(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots)$. Точки характеристики e являются точками пересечения соответствующих элементов пучков второго порядка $K(m, m', m'', \ldots)$ и $V(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots)$; поэтому характеристика e является (см. [2]) пространственной кривой четвертого порядка.

Пучки второго порядка $K(\tau, \tau', \tau'', \ldots)$ и $V(\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots)$ проективны. Прямые s^{τ} являются линиями пересечения соответствующих плоскостей этих проективных пучков. Из этого (см. [2]) вытекает:

Теорема 3. *Прямые s_{τ} — характеристики развертываемых винтовых поверхностей η; возникающих винтовым движением касательных плоскостей τ конической поверхности φ второго порядка, при данном винтовом движении, являются образующими прямыми поверхности четвертого порядка.*

Пространственной кривой четвертого порядка I.-го вида можно провести (см. [2]) всю основу поверхностей второго порядка. Характеристика e является пространственной кривой четвертого порядка I.-го вида, поэтому может служить базисом основы поверхностей второго порядка. Выберем пучок параллельных плоскостей пересекающих характеристику e в двух точках (на рис. 3 это например плоскости $\bar{\pi} \perp o$). Прямые соединяющие точки пересечения этих плоскостей и характеристики e образуют систему прямых параллельных той же плоскости и пересекают образующую коническую поверхность второго порядка φ в характеристике e, т. е. в кривой четвертого порядка. Так как эта система прямых других общих точек с конической поверхностью φ не имеет, то она определяет одну систему прямых гиперболического параболоида.

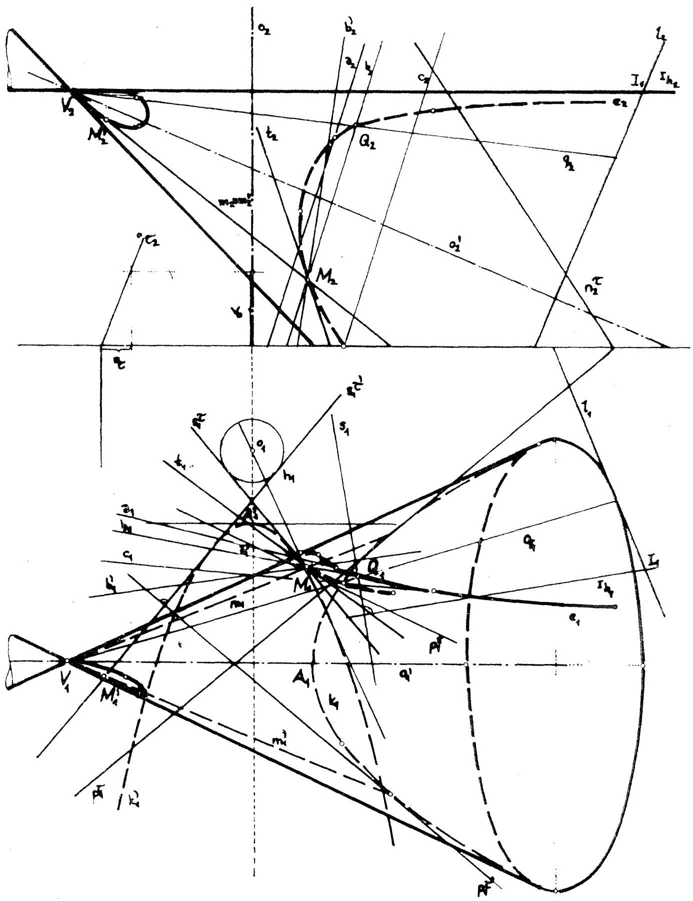


Рис. 5.

Этим свойством можно воспользоваться для построения касательной прямой в точке характеристики e. Последнюю можно считать линией пересечения образующей конической поверхности φ и упомянутого гиперболического параболоида. Касательная прямая в точке характеристики e является тогда линией пересечения касательных плоскостей обеих поверхностей в заданной точке. На рис. 4 и 5 построены касательные прямые в точках M. Касательная плоскость гиперболического параболоида в точке M определена на рис. 4 посредством прямых a, a', на рис. 5 посредством прямых b, b'.

Литература

[1] *О. Галло:* Свойства некоторых огибающих винтовых поверхностей. Aplikace matematiky 2 (1966).

[2] *Й. Войтех:* Проективная геометрия. JČMF, Praha 1932.

Súhrn

VLASTNOSTI CHARAKTERISTIKY OBALOVEJ KUŽEĽOVO-SKRUTKOVEJ PLOCHY

ONDREJ GALLO

V článku sú odvodené niektoré vlastnosti charakteristiky e obalovej kužeľovo-skrutkovej plochy; hlavne vlastnosti charakteristík s^τ rozvinuteľných skrutkových plôch η, ktoré vzniknú skrutkovým pohybom dotykových rovín τ určujúcej kužeľovej plochy φ pri danom skrutkovom pohybe a vlastnosti priemetov charakteristík s^τ do roviny kolmej na os o skrutkového pohybu a ich využitie na zjednodušenú konštrukciu bodov charakteristiky e. Dotyčnica v bode charakteristiky e je zostrojená ako priesečnica dotykových rovín určujúcej kužeľovej plochy φ a hyperbolického paraboloidu, preloženého charakteristikou e.

Адрес автора: RNDr. *Ondrej Gallo,* Katedra deskriptívnej geometrie Strojníckej fakulty Vysokej školy technickej, Zbrojnícka 7, 041 87 Košice.