Aplikace matematiky

Ondrej Gallo

О конструкции точек характеристики огибающей винтовой поверхности

Aplikace matematiky, Vol. 20 (1975), No. 2, 78–86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103572`

О КОНСТРУКЦИИ ТОЧЕК ХАРАКТЕРИСТИКИ ОГИБАЮЩЕЙ ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ОНДРЕЙ ГАЛЛО

(Поступило в редакцию 22ого октября 1971)

В работе [1] описывается метод построения точек характеристики огибающей винтовой поверхности Φ, которая возникает винтовым движением развертываемой линейчатой поверхности φ вокруг оси o винтового движения при заданном параметре v_0 и смысле винтового движения.

Точка M характеристики e на произвольной образующей прямой m поверхности φ (см. рис. 1) строилась на основании следующего рассуждения. Всякая

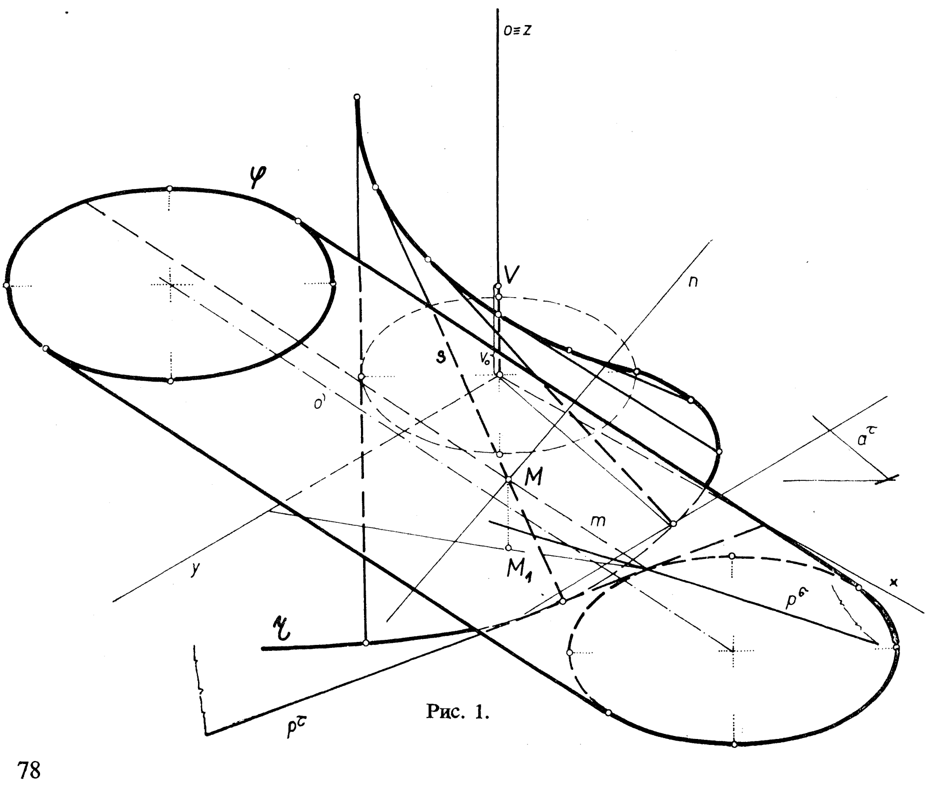

Рис. 1.

образующая прямая линейчатой поверхности φ образует при данном винтовом движении некоторую винтовую линейчатую поверхность ψ. Винтовая поверхность Φ является потом огибающей поверхностью винтовых поверхностей ψ.

Подобно тому можно считать образующую линейчатую поверхность φ огибающей поверхностью ее касательных плоскостей τ. Винтовым движением последних возникают развертываемые линейчатые винтовые поверхности η и огибающая винтовая поверхность Φ является в свою очередь огибающей поверхностью этих развертываемых винтовых линейчатых поверхностей.

Для развертываемой винтовой поверхности η мы в состоянии определить в плоскости τ характеристику s, т. е. такую прямую плоскости τ, что винтовым движением ее возникает та же самая винтовая поверхность, что и винтовым движением плоскости τ.

Точка M характеристики e на произвольной образующей прямой m поверхности φ строится потом как точка пересечения прямой m и характеристики s развертываемой винтовой поверхности η возникающей винтовым движением плоскости τ, касающейся поверхности φ вдоль образующей прямой m.

Наши рассуждения можно продолжить следующим образом: огибающая винтовая поверхность Φ имеет в точке M характеристики e ту же самую касательную плоскость как и поверхность φ, т. е. плоскость τ. Далее, нормали n поверхностей Φ и φ одинаковы. Нормаль n, будучи перпендикуляром касательной плоскости τ поверхности Φ в точке M, перпендикулярна также касательной прямой винтовой линии точки M, лежащей в плоскости τ. Следовательно, нормаль n поверхности Φ является также нормалью винтовой линии точки M, которая возникает при данном винтовом движении.

Нормали всех винтовых линий данного винтового движения образуют линейный комплекс прямых (см. [2]); тем самым нормаль n поверхности Φ в рассматриваемой точке M является прямой линейного комплекса определенного тем же винтовым движением, посредством которого возникает поверхность Φ.

С другой стороны, нормаль n поверхности Φ в точке M лежит также в плоскости σ, проходящей через образующую прямую m перпендикулярно плоскости τ, в которой лежат все нормали поверхности φ во всех точках образующей прямой m.

Следовательно, нормаль n поверхности Φ лежит в плоскости σ, принадлежит линейному комплексу прямых определенному данным винтовым движением и перпендикулярна плоскости τ.

В произвольной плоскости (см. [2]) лежит тогда весь пучок прямых принадлежащих линейному комплексу прямых. Центр этого пучка называется полюсом плоскости.

В плоскости σ тоже существует весь пучок прямых линейного комплекса прямых определенного данным винтовым движением. Центр этого пучка, т. е. полюс плоскости обозначим Q. Точка Q плоскости σ обладает следующим свойством:

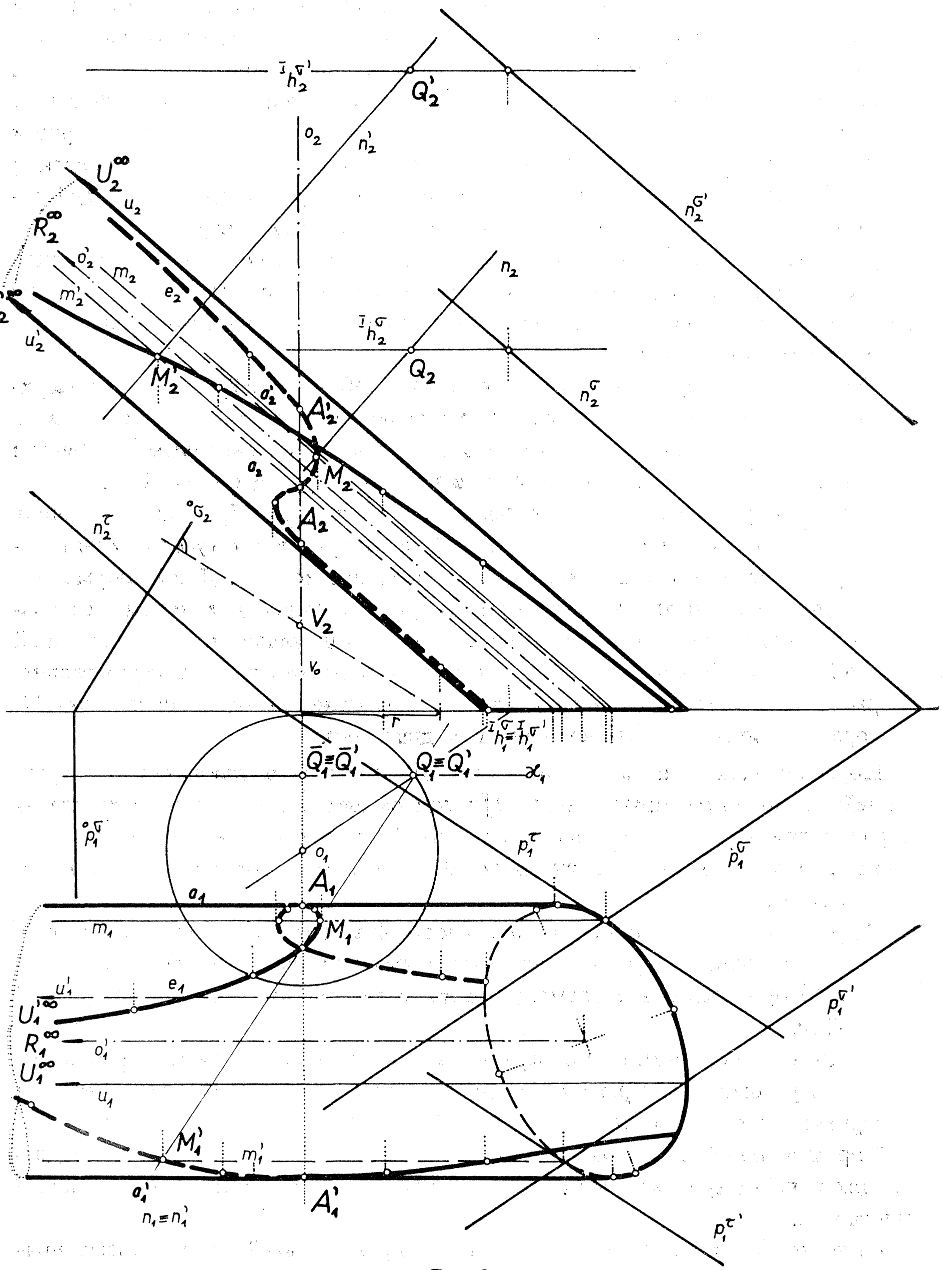

Рис. 2.

плоскость σ является нормальной плоскостью в точке Q для винтовой линии образованной точкой Q при данном винтовом движении. Через точку Q должна проходить также нормаль n лежащая в плоскости σ и принадлежащая упомянутому линейному комплексу прямых. Следовательно, нормаль n строится как перпендикуляр плоскости τ в точке Q. Точка пересечения нормали n и образующей прямой m поверхности φ является точкой M характеристики e. Все сказанное можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 1. *Точка характеристики e огибающей винтовой поверхности Φ возникающей винтовым движением развертываемой линейчатой поверхности φ может быть получена как точка пересечения образующей прямой поверхности φ и нормали поверхности φ проходящей через полюс плоскости σ (проходящей через избранную образующую прямую поверхности φ перпендикулярно касательной плоскости поверхности φ вдоль этой образующей прямой) в линейном комплексе прямых определенном данным винтовым движением.*

Описанный метод построения точек характеристики огибающей винтовой поверхности рассмотрим в конкретном случае.

В проекции на две плоскости проекций (рис. 2) задана цилиндрическая поверхность направлением образующей прямой o' и направляющим эллипсом в плоскости π. Винтовое движение является левовращающим с осью $o \perp \pi$ и параметром v_0.

Указанным методом построим точку M характеристики e на образующей прямой m цилиндрической поверхности. Плоскость σ, в которой лежит нормаль n поверхности φ в искомой точке M, проходит через прямую m перпендикулярно касательной плоскости τ поверхности φ. Для того чтобы определить винтовую линию, для которой плоскость σ является нормальной плоскостью, повернем плоскость σ вокруг оси o винтового движения так, чтобы она стала перпендикулярной фронтальной плоскости проекций. Перпендикуляр проведенный с точки V_2 — фронтальной проекции вершины направляющего конуса касательных прямых винтовой линии — к ${}^0\sigma_2$ пересекает ось $x_{1,2}$ в точке, расстояние которой от o_2 равно радиусу r искомой винтовой линии. Последнее следует из свойств соприкасающейся плоскости винтовой линии. Радиус r винтовой линии может быть определен даже без вращения плоскости σ, так как

$$r = v_0 \,.\, \mathrm{cotg}\,\omega \quad (\omega = \sphericalangle o\sigma)\,.$$

Горизонтальной проекцией винтовой линии является окружность с центром o_1 и радиусом r. Горизонталь ${}^I h^\sigma$ плоскости σ пересекающая ось o является главной нормалью этой винтовой линии и горизонтальная проекция ее ${}^I h_1^\sigma$ пересекает горизонтальную проекцию винтовой линии в горизонтальной проекции Q_1 точки Q (полюс плоскости σ). Две возможности выбора Q_1 являются только выражением двух возможностей выбора смысла винтового движения. Фронтальная проекция Q_2 точки Q лежит на ${}^I h_2^\sigma$.

Перпендикуляр плоскости τ проведенный через точку Q является нормалью цилиндрической поверхности и пересекает образующую прямую m поверхности φ в точке M характеристики e огибающей винтовой поверхности Φ. Горизонтальная проекция $n_1 \perp p_1^\tau$ проходит через Q_1, фронтальная проекция $n_2 \perp n_2^\tau$ проходит через Q_2

$$(n_1 \,.\, m_1 = M_1 \;; \quad n_2 \,.\, m_2 = M_2)\,.$$

Очень просто строится точка M' характеристики e на образующей прямой m'. Плоскость τ' касающаяся цилиндрической поверхности вдоль образующей прямой m' параллельна плоскости τ. Но тогда тоже $\sigma' \parallel \sigma$. Следовательно, углы наклона плоскостей σ' и σ от оси o одинаковы. Из этого вытекает, что радиус винтовой линии для которой плоскость σ' является нормальной плоскостью при данном винтовом движении, равен радиусу выше рассматриваемой винтовой линии. Значит, горизонтальной проекцией обеих винтовых линий является одинаковая окружность, и далее, ${}^I h_1^\sigma \equiv {}^I h_1^{\sigma'}$ и $Q_1 \equiv Q_1'$. Фронтальная проекция Q_2' принадлежит ${}^I h_2^{\sigma'}$. Подобным же образом построим проекции точки M' характеристики e.

Точкой характеристики e на образующих u, u', которые являются граничными образующими фронтальной проекции есть бесконечная точка $U^\infty \equiv U'^\infty$; так как в этом случае плоскости σ перпендикулярны π, то угол наклона $\omega = O^0$. Образующие u, u' являются асимптотами характеристики e.

На образующих a, a' цилиндрической поверхности, граничными в горизонтальной проекции, точками характеристики e являются точки A, A', так как точки $\bar{Q}$, $\bar{Q}'$ (в горизонтальной проекции $\bar{Q}_1 \equiv \bar{Q}_1'$) являются полюсами плоскостей σ. Для их расстояния от σ_1 имеет место

$$\bar{r} = v_0 \,.\, \operatorname{cotg} \alpha \quad (\alpha = \sphericalangle oo')\,.$$

Полюсы Q плоскостей обязательно лежат в полярной плоскости $\varkappa$ точки R^∞ (бесконечная точка прямой o'), так как все плоскости σ проходят через полюс R^∞ (они параллельны o'). Плоскость $\varkappa$ должна содержать свой полюс R^∞, далее она параллельна оси o и поэтому плоскость $\varkappa$ и прямые o, o' параллельны. Горизонтальной проекцией ее является прямая $\varkappa_1$, расстояние которой от оси o равно

$$\bar{r} = v_0 \,.\, \operatorname{cotg} \alpha\,.$$

Если рассмотреть в качестве образующей поверхности φ винтовой поверхности Φ прямую круговую цилиндрическую поверхность (рис. 3), то точки характеристики e строятся аналогичным образом. Через образующую прямую m поверхности φ проводим плоскость σ перпендикулярную касательной плоскости τ; в ней лежат нормали поверхности φ в точках образующей прямой m. Строим полюс Q плоскости σ находящийся на горизонтали ${}^I h^\sigma$ и на винтовой линии, нормальной плоскостью которой является σ и радиус которой

$r = v_0 \,.\, \mathrm{cotg}\, \omega$ ($\omega = \sphericalangle \sigma o$). Перпендикуляр плоскости τ проходящий через точку Q ($n_1 \perp p_1^\tau$; $n_2 \perp n_2^\tau$) пересекает образующую m в точке M характеристики e.

Так как образующей поверхностью φ является прямая круговая цилиндрическая поверхность, то в плоскости σ проходящей через образующую m и ось o' лежат также нормали поверхности φ в точках образующей прямой m' (здесь m' и m симметричны относительно оси o'). Значит, для обеих образующих m, m, плоскости σ и следовательно, полюсы Q плоскостей σ одинаковы. Перпендикуляр n плоскости $\tau \parallel \tau'$ проходящий через полюс Q является общей нормалью поверхности φ в точках M, M'.

Все плоскости σ, в которых лежат нормали прямой круговой цилиндрической поверхности в точках одинаковой образующей прямой, проходят через ось o' поверхности φ, и, следовательно, образуют линейный пучок плоскостей с осью o'. Из этого следует (см. [2]), что полюсы Q плоскостей σ должны лежать на единственной прямой q, скрещивающейся с осью o'.

Прямые o', q являются сопряженными полярными прямыми по отношению к линейному комплексу прямых определенному данным винтовым движением и не принадлежат этому комплексу. Расстояние прямой q от оси o винтового движения равно

$$r = v_0 \,.\, \mathrm{cotg}\, \alpha \quad (\alpha = \sphericalangle oo')\,.$$

Из выше сказанного следует, что нормали прямой круговой цилиндрической поверхности в точках характеристики e пересекают прямую q, следовательно, точки характеристики e можно считать ортогональной проекцией прямой q в поверхность φ при условии что мы будем считать проекцией точки Q прямой q в поверхность φ точки M, M' поверхности φ (если в последних построить нормаль, то она проходит через точку Q). Все сказанное можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 2. *Характеристика e огибающей винтовой поверхности Φ, образованной винтовым движением прямой круговой иилиндрической поверхности φ является ортогональной проекцией в поверхность φ прямой q, сопряженной с осью o' поверхности φ в линейном комплексе прямых, определенном данным винтовым движением. Под проекцией прямой q в поверхность φ при этом понимается множество всех таких точек поверхности φ, что нормали поверхности φ в них построенные пересекают прямую q.*

Приведенная теорема верна для всех поверхностей вращения (см. [3]). Автор называет такую проекцию прямой q в поверхность вращения n-проекцией прямой в поверхность.

Дальнейшие свойства характеристики e огибающей винтовой поверхности Φ образованной винтовым движением прямой круговой цилиндрической поверхности (построение касательной прямой в точке характеристики e и т. п.) приводятся в работе [4].

В работе [4] также доказано, что горизонтальные проекции s_1^τ характеристик s развертываемых винтовых поверхностей образованных винтовым движением касательных плоскостей τ прямой круговой цилиндрической поверхности φ

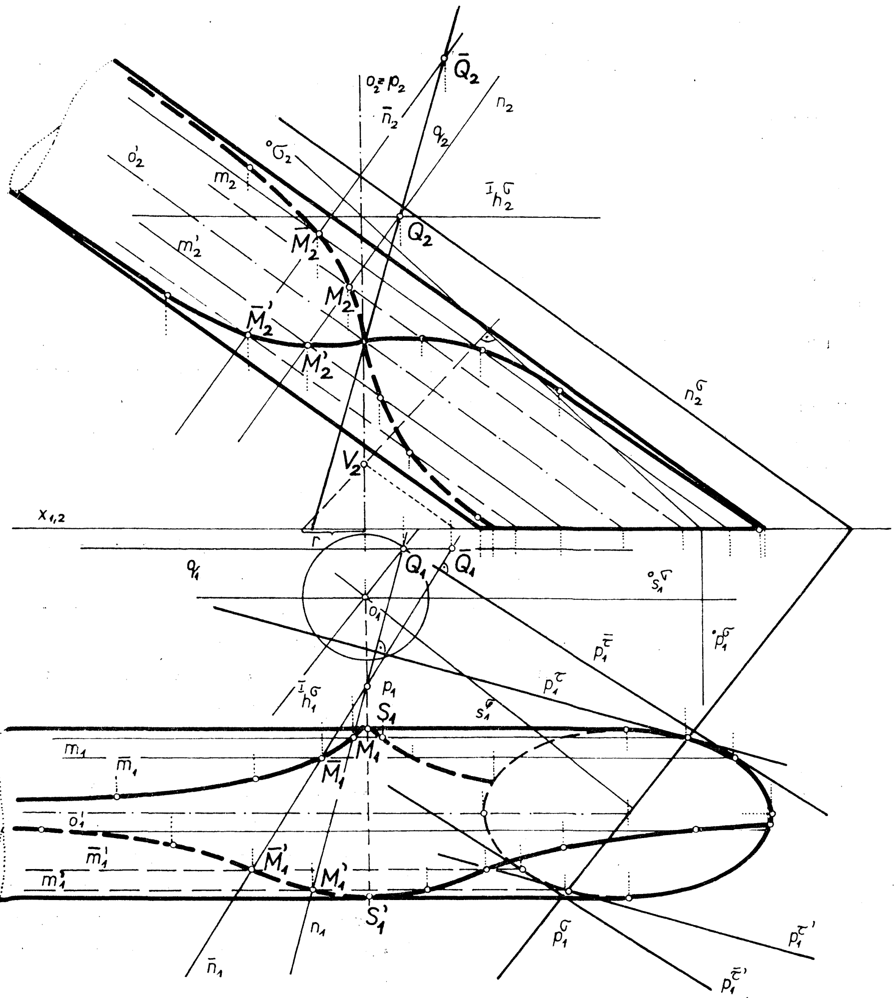

Рис. 3.

проходят через точку p_1, следовательно, характеристики s пересекают прямую $p \parallel o$, расстояние которой от оси o винтового движения равно

$$d = v_0 \, . \, \mathrm{tg}\, \alpha \quad (\text{где } \alpha = \sphericalangle oo')\,.$$

Нормаль n поверхности φ в точке характеристики e и прямая s, проходящая через эту точку пересекают друг друга и горизонтальная проекция $n_1 \equiv s_1$. Из этого следует что горизонтальные проекции нормалей в точках характеристики e также проходят через точку p_1 и нормали пересекают прямую p.

Этим свойством можно воспользоваться для упрощенного построения дальнейших точек характеристики e (рис. 3). Выберем произвольную прямую $\bar{n}_1$ проходящую через точку p_1 и пересекающую прямую q_1 в точке $\bar{Q}_1$. Она является горизонтальной проекцией нормали $\bar{n}$, фронтальная проекция $\bar{n}_2$ которой проходит через точку $\bar{Q}_2$ на прямой q_2 и перпендикулярна o'_2. В горизонтальной проекции строим перпендикулярно $\bar{n}_1$ касательные прямые эллипса, в котором пересекаются плоскость π и поверхность φ. Они являются следами $p_1^{\bar{\tau}}, p_1^{\bar{\tau}'}$ касательных плоскостей поверхности φ и точки соприкосновения их с эллипсом являются следами образующих прямых $\bar{m}, \bar{m}'$ поверхности φ, горизонтальные проекции которых пересекает $\bar{n}_1$ в точках $\bar{M}_1, \bar{M}'_1$. Фронтальные проекции $\bar{M}_2, \bar{M}'_2$ находятся на перпендикуляре оси x и на $\bar{n}_2$. Они являются проекциями других точек характеристики e.

Нормали n в точках характеристики e пересекают прямую p и также прямую q. Так как фронтальные проекции нормалей перпендикулярны o'_2, и следовательно, параллельны друг другу, нормали пересекают прямые p, q в рядах точек, подобоных друг другу отсюда следует теорема.

Теорема 3. *Нормали n прямой круговой цилиндрической поверхности φ с осью o' в точках характеристики e огибающей винтовой поверхности Φ, образованной поверхностью φ при данном винтовом движении образуют одну систему прямых гиперболического параболоида, определенного прямыми p, q и плоскостью параллелизма перпендикулярной o'.*

Характеристика e может считаться линией пересечения прямой круговой цилиндрической поверхности φ и упомянутого гиперболического параболоида. Она является пространственной кривой четвертого порядка; касательную прямую в точке характеристики e можно построить как линию пересечения касательных плоскостей поверхности φ и гиперболического параболоида в заданной точке.

Литература

[1] *О. Галло:* Свойства некоторых огибающих винтовых поверхностей. Aplikace matematiky, 11—1966, 2.

[2] *Й. Войтех:* Проективная геометрия. JČMF, Praha, 1932.

[3] *Посвянский А. Д.:* Ортогональное проектирование на кривые поверхности и его приложения к вопросам геометрии пространственных зубчатых зацеплений. Сборник статей. Методы начертательной геометрии и ее приложения. Москва 1965.

[4] *О. Галло:* Свойства характеристики огибающей винтовой поверхности образованной цилиндрической поверхностью вращения. Sborník vedeckých prác VŠT, Košice sv. 1, 1967.

Súhrn

PRÍSPEVOK KU KONŠTRUKCII BODOV CHARAKTERISTIKY OBALOVEJ SKRUTKOVEJ PLOCHY

ONDREJ GALLO

V článku je vysvetlená metóda konštrukcie bodov charakteristiky *e* obalovej skrutkovej plochy Φ, ktorá vznikne skrutkovým pohybom rozvinuteľnej priamkovej plochy φ.

Bod *M* charakteristiky *e* na ľubovoľnej tvoriacej priamke určujúcej plochy φ zostrojíme pomocou lineárneho komplexu priamok určeného normálami daného skrutového pohybu. Určíme normálu *n* plochy φ, ležiacu v rovine σ, prechádzajúcej tvoriacou priamkou *m* kolmo na dotykovú rovinu τ pozdĺž tvoriacej priamky *m*, ktorá je aj priamkou spomínaného lineárneho komplexu priamok. V rovine σ leží celý zväzok priamok lineárneho komplexu so stredom v póle *Q* roviny σ. Kolmica z bodu *Q* na dotykovú rovinu τ je hľadanou normálou *n* a pretína tvoriacu priamku *m* v bode *M* charakteristiky *e*.

V ďalšom sú odvodené niektoré vlastnosti charakteristiky *e*, ak určujúcou plochou φ je valcová alebo rotačná valcová plocha.

Адрес автора: RNDr. *Ondrej Gallo,* Katedra deskriptívnej geometrie Strojníckej fakulty Vysokej školy technickej, Zbrojnícka 7, 041 87 Košice.