Aplikace matematiky

Jaroslav Haslinger

Sur la solution d'un problème de la plaque

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 5, 316–326

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103548`

SUR LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE LA PLAQUE

JAROSLAV HASLINGER

(Reçu le 4 octobre 1973)

§ 1. INTRODUCTION

Dans la pratique on rencontre le problème suivant: étudier le problème de la plaque encastrée, simplement appuyée au dessous par une barre rectiligne encastrée aussi. Supposons que dans son état non déformé la plaque occupe une région $\Omega = (-1,1) \times \times (-1,1) \subset R_2$, où le plan R_2 est rapporté aux axes Ox, Oy et que la barre soit répresentée par le segment $I = \{[x, y] \in R_2, x = 0, y \in (-1,1)\}$. Notons que Ω, I gardent ce sens jusqu'à la fin. Soit f la densité d'une force normale appliquée à la plaque. En utilisant le principe du minimum de l'énergie potentielle pour le déplacement u du point $[x, y] \in \Omega$, les techniciens formulent ce problème de la manière suivante: trouver le minimum de la fonctionnelle Φ du type

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ + \int_I \left(\frac{\mathrm{d}^2 u(0, y)}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 \mathrm{d}y - 2\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1.1}$$

sur l'ensemble convenable des fonctions satisfaisant aux conditions $u = \partial u/\partial n = 0$ sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω, où n est la normale extérieure vers $\partial\Omega$.

Du point de vue mathématique on peut se poser tout de suite plusieurs questions:
– donner une définition exacte de l'espace W sur lequel on cherche la solution de façon que Φ soit définie sur W et que, pour une certaine classe des forces volumiques f, il y ait une seule fonction $u \in W$ qui minimise Φ sur W;
– donner une méthode numérique pour la solution approchée du problème posé.

Dans le paragraphe suivant on donne la définition de l'espace W en examinant ses propriétés élémentaires, nottament celle de la densité des fonctions plus régulières, ce qui est une question fondamentale pour nos considérations suivantes. Dans le dernier paragraphe on propose la méthode des éléments finis conformes et on démontre la convergence des solutions approchées vers la solution exacte. Si la solution u de notre problème était assez régulière, alors la question de la convergence (éventuellement celle de l'ordre de la convergence) serait triviale. Malheuresement on ne connaît rien sur la régularité; c'est pourquoi il faut démontrer d'abord le *th.* 1.2. pour obtenir le résultat de la convergence.

§ 2. CHOIX DE L'ESPACE

D'abord quelques définitions (pour les détails voir [1]). $\mathscr{E}(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions indéfiniment continûment differentiables dans Ω et continûment prolongeables, ainsi que toutes leurs dérivées, sur la fermeture $\bar{\Omega}$ de Ω. $D(\Omega)$ est le sous-espace de $\mathscr{E}(\bar{\Omega})$ formé des fonctions à support compact dans Ω. On désigne par $H^k(\Omega)$ (k entier positif ou nul) l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω, ainsi que toutes leurs dérivées généralisées jusqu'à l'ordre k, et muni du produit scalaire:

$$(1.2)\qquad ((u, v))_{k,\Omega} = \sum_{|i| \leq k} \int_\Omega D^i u \,.\, D^i v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \left(D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}}\,,\ |i| = i_1 + i_2\right).$$

On sait que $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_{k,\Omega} = ((u, u))^{1/2}_{k,\Omega}$. $H^k_0(\Omega)$ est le sous-espace de $H^k(\Omega)$ formé des fonctions satisfaisant à $u = (\partial/\partial n)\, u = \ldots \ldots = (\partial^{k-1}/\partial n^{k-1})\, u = 0$ sur la frontière de Ω. Dans cet espace on peut introduire le produit scalaire suivant:

$$(2.2)\qquad (u, v)_{k,\Omega} = \sum_{|i| = k} \int_\Omega D^i u \,.\, D^i v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (u, v \in H^k_0(\Omega))\,.$$

Il est bien connu que, sur $H^k_0(\Omega)$, la norme $|u|_{k,\Omega} = (u, u)^{1/2}_{k,\Omega}$ est une norme équivalente à $\|u\|_{k,\Omega}$. Si l'on remplace Ω par I, les symboles $\mathscr{E}(I)$, $D(I)$, $H^k(I)$, $H^k_0(I)$ ont la signification analogue à celle de ci-dessus.

A première vue, il est clair qu'on ne peut pas chercher le minimum de (1.1) sur l'espace $H^2_0(\Omega)$ à cause de la présence du terme $\int_I [\mathrm{d}^2 u(0, y)/\mathrm{d}y^2]^2\, \mathrm{d}y$. Il est bien connu (par. ex. [1]), que $H^2_0(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ algébriquement et topologiquement. Donc on peut se demander si la derivée $\mathrm{d}^2 u(0, y)/\mathrm{d}y^2$ (au sens des distributions) est de carré sommable sur I. Définissons:

$$(3.2)\qquad W = \{u \in H^2_0(\Omega) \text{ telle, que } \bar{u} \in H^2_0(I)\}\,.$$

où l'on pose $\bar{u}(y) = u(0, y)$, $y \in I$. Dans ce qui suit, une barre au dessus d'une fonction signifie sa restriction au segment I.

Posons:

$$(4.2)\qquad (((u, v))) = \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_I \frac{\mathrm{d}^2 \bar{u}}{\mathrm{d}y^2}\frac{\mathrm{d}^2 \bar{v}}{\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}y = A(u, v) + B(u, v)\,,$$

où $A(u, v)$ signifie la somme sur Ω et $B(u, v)$ signife celle sur I. Soit

$$(5.2) \qquad |||u||| = (((u, u)))^{1/2} = [A(u, u) + B(u, u)]^{1/2} .$$

$B(u, v)$ coincide avec le produit scalaire sur $H_0^2(I)$ et $[A(u, u)]^{1/2}$ est une norme équivalente à $|u|_{2,\Omega}$.

Lemme 1.2. *L'espace W défini dans* (3.2) *est un espace de Hilbert muni de la norme* (5.2).

Démonstration. Soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de W. Alors $A(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$, $B(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ pour $n, m \to \infty$, d'où

$$u_n \to u \in H_0^2(\Omega) \text{ pour la norme de } H_0^2(\Omega) .$$

$$\bar{u}_n \to w \in L^2(I) \text{ pour la norme de } L^2(I) .$$

En utilisant le théorème de la trace on sait que $\bar{u}_n \to \bar{u}$ dans $L^2(I)$. Soit $\varphi \in D(I)$ quelconque. Alors:

$$\int_I \bar{u}_n \, . \, \varphi'' \, \mathrm{d}y = \int_I \bar{u}_n'' \, . \, \varphi \, \mathrm{d}y, \qquad \text{où } \bar{u}_n'' = \frac{\mathrm{d}^2\bar{u}_n}{\mathrm{d}y^2} .$$

De cela et des relations précédentes on obtient $w = \bar{u}''$.

Etudions maintenant les propriétés de l'espace W. En particulier la question de savoir quel espace de fonctions assez régulières est dense dans W. On obtient un résultat, suffisant pour nos considérations, mais peut-être n'est-il pas optimal.

Remarque 1.2. Il est évident que l'espace W défini dans (3.2) est l'espace le plus grand sur lequel la fonctionelle (1.1) soit définie.

Soient

$$\Omega_1 = (-1, 0) \times (-1,1) , \quad \Omega_2 = (0, 1) \times (-1, 1) .$$

On désigne par $D_W(\Omega)$ le sous-espace de W défini de la manière suivante: $\varphi \in D_W(\Omega)$ si et seulement si les conditions (j), (jj), (jjj) sont satisfaites —

(j) φ est une fonction à support compact dans Ω.

(jj) sa restriction sur Ω_i appartient à l'espace $\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i)$ $(i = 1, 2)$.

(jjj) $\partial\varphi/\partial x$ appartient à $C(\bar{\Omega})$.

Notre but est de démontrer le

Theorème 1.2. $D_W(\Omega)$ *est dense dans W pour la norme* (5.2).

Le théorème précédent se démontre en plusieurs étapes.

Soient

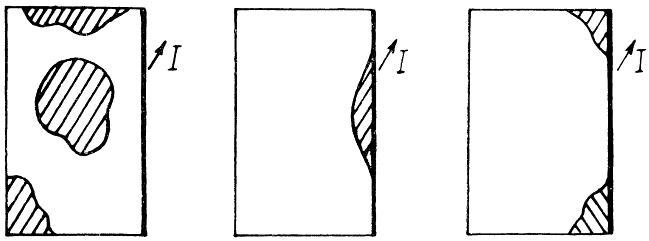
$$\Gamma_i = \partial\Omega_i - I \quad \text{et} \quad W_i = \left\{ u \in H^2(\Omega_i) \, ; \quad u \,|_{\partial\Omega_i} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_i} = 0 \right\}$$

et $D_{W_i} = \{u \in \mathscr{E}(\bar{\Omega}_i)$, nulles sur I et dont le support est dans

$$\Omega_i \text{ et ne coupe pas } \Gamma_i\} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Lemme 2.2. *D_{W_i} est dense dans W_i pour la norme $H_0^2(\Omega_i)$.*

Démonstration. Par ex. pour $i = 1$. Soit $u \in W_1$ arbitraire et $\{G_i\}_{i=1}^k$ le système des ouverts recouvrant Ω_1, qui contient des ouverts de 3 types (cf. fig. 1).



type I type II type III

Soient $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ une partition de l'unité correspondant au système $\{G_i\}_{i=1}^k$. On a $u = \sum_{j=1}^k u_j$, où $u_j = \psi_j . u$. Si G_j est un ouvert du premier type, alors $u_j \in H_0^2(\Omega_1)$ et l'on peut trouver $\varphi_h^j \in D(\Omega_1)$ telles, que $\varphi_h^j \to u_j$ si $h \to 0$ pour la norme de $H_0^2(\Omega_1)$. Si G_j est un ouvert du type II, on peut définir U_j de la manière suivante:

$$U_j(x, y) = \left\langle \begin{array}{ll} u_j(x, y) & [x, y] \in \Omega_1 \\ -u_j(-x, y) & [x, y] \in \Omega_2\,, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire le prolongement impair de u_j sur Ω. Comme $\bar{u}_j = 0$, on a $U_j \in H_0^2(\Omega)$ et U_j est la fonction à support compact dans Ω. La régularisée Φ_h^j de U_j (cf. [1], p. 58) appartient à $D(\Omega)$ et de plus $\bar{\Phi}_h^j = 0$, parce qu'il s'agit de la régularisée d'une fonction impaire. Posons $\varphi_h^j = \Phi_h^j/_{\Omega_1}$. Alors on a $\varphi_h^j \to u_j$ pour la norme de $H_0^2(\Omega_1)$.

Soit enfin G_j un ouvert du type III et U_j son prolongement impair sur Ω. On a $U_j \in H_0^2(\Omega)$. Définissons $U_{j,L}(x, y) = U_j(x, y + a \,.\, L)$, où $a = \pm 1$ et $L > 0$ assez petit. Le signe de a est choisi de façon que $U_{j,L} \in H_0^2(\Omega)$ et $U_{j,L}$ soit nulle au voisinage de $\partial\Omega$. Evidemment $U_{j,L}(0, y) = 0$. Du théorème de la continuité en moyenne (cf. [1]) il vient $U_{j,L} \to U_j(L \to 0)$ pour la norme $H_0^2(\Omega)$. La régularisée $\Phi_{L,h}^j$ de $U_{j,L}$ appartient à $D(\Omega)$ et $\bar{\Phi}_{L,h}^j = 0$ pour la même raison que ci-dessus. En posant $\varphi_{L,h}^j = \Phi_{L,h}^j/_{\Omega_1}$ on a $\varphi_{L,h}^j \to U_{j,L}/_{\Omega_1}$ pour $h \to 0$ et la norme de $H_0^2(\Omega_1)$. Les fonctions de la forme $\sum_{j \in I_1} \varphi_h^j + \sum_{j \in I_2} \varphi_{L,h}^j$, où I_1 est l'ensemble d'indices des ouverts du type I, II et I_2 celui des ouverts du type III, appartiennent à D_{W_1} et approchent la fonction $u \in W_1$ avec une précision arbitraire pour h, $L > 0$, suffisament petits.

$$\text{Soient} \quad W_0 = \{u \in H_0^2(\Omega),\ \bar{u} = 0\} \quad \text{et}$$
$$D_0 = \{u \in D_W(\Omega),\ \bar{u} = 0\}\ .$$

Lemme 3.2. *D_0 est dense dans W_0 pour la norme de $H_0^2(\Omega)$.*

Conséquence 1.2. D_0 est dense dans W_0 aussi pour la norme (5.2).

Démonstration du lemme. Soit $u \in W_0$ tel, que

$$(6.2) \qquad (u, \psi)_{2,\Omega} = \sum_{|i|=2} \int_\Omega D^i u \,.\, D^i \psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{pour chaque} \quad \psi \in D_0\ .$$

On veut démontrer que $u = 0$ sur Ω. Soit $\varphi \in D_{W_1}$ arbitraire. On peut définir le prolongement impair Φ de φ sur Ω_2. Evidement $\Phi \in D_0$ et d'après (6.2):

$$(7.2) \quad 0 = (u, \Phi)_{2,\Omega} = \sum_{|i|=2} \int_{\Omega_1} D^i u \,.\, D^i \Phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \sum_{|i|=2} \int_{\Omega_2} D^i u \,.\, D^i \Phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ .$$

Après la substitution $x \mapsto -x$, $y \mapsto y$ dans la deuxième somme, on obtient:

$$0 = \int_{\Omega_1} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (\varphi, g)_{2,\Omega_1}$$

pour chaque $\varphi \in D_{W_1}$, où $g(x, y) = u(x, y) - u(-x, y)$ appartient à W_1. Mais d'après le lemme 2.2 $g \equiv 0$ sur Ω_1, c'est-à-dire

$$(8.2) \qquad u(x, y) = u(-x, y) \quad [x, y] \in \Omega_1\ .$$

Donc, necessairement, une telle fonction u est paire dans Ω. Mais $u \in H_0^2(\Omega)$ d'où $\partial u/\partial x$ appartient à $H^1(\Omega)$, et de (8.2) on obtient que $\partial u/\partial x$ est une fonction impaire dans Ω. D'après la définition de Beppo Levi des espaces de Sobolev (cf. [1]) on obtient $\partial u(0, y)/\partial x = 0$ p.p. sur I, c'est-à-dire $u \in H_0^2(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$.

Soit $\varphi \in D(\Omega_1)$ arbitraire. Posons

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & [x, y] \in \Omega_1 \\ 0 & [x, y] \in \Omega_2 \end{cases}$$

Alors $\tilde{\varphi} \in D_0$ et d'après (6.2) $0 = (u, \tilde{\varphi})_{2,\Omega} = (u, \varphi)_{2,\Omega_1}$ pour chaque $\varphi \in D(\Omega_1)$. En utilisant la densité de $D(\Omega_1)$ dans $H_0^2(\Omega_1)$ nous obtenons l'assertion du lemme 3.2.

Soit $u \in W$ arbitraire mais fixe. Parce que $\bar{u} \in H_0^2(I)$, on sait qu'il existe des fonctions $\psi_n \in D(I)$ telles, que $\psi_n \to \bar{u}$ dans $H_0^2(I)$. Prenons la fonction $\varphi(x) \in D(\langle -1, 1 \rangle)$ telle, que $\varphi(x) = 1$ pour $x \in \langle -1 + \alpha, 1 - \alpha \rangle$ $(\alpha \in (0, 1))$ et $0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$ ailleurs et posons $\Phi(x, y) = \varphi(x)$ pour $[x, y] \in \Omega$. Enfin définissons:

$$\tilde{\Psi}_n(x, y) = \psi_n(y) \tag{9.2}$$

$$\tilde{U}(x, y) = \bar{u}(y) \tag{10.2}$$

$$\Psi_n(x, y) = \tilde{\Psi}_n(x, y) \,.\, \Phi(x, y) \tag{11.2}$$

$$U(x, y) = \tilde{U}(x, y) \,.\, \Phi(x, y)\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{12.2}$$

Lemme 4.2. $\Psi_n \to U$ *pour la norme* (5.2).

Démonstration. D'abord Ψ_n, U appartiennent à W et

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_n}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_n}{\partial x^2} = 0 \tag{13.2}$$

par définition de $\tilde{U}$, $\tilde{\Psi}_n$ et d'après le théorème de Fubini on obtient $\partial^2 \tilde{\Psi}_n / \partial y^2 \to$ $\to \partial^2 \tilde{U} / \partial y^2$ dans $L^2(\Omega)$ et à cause de (13.2) $\tilde{\Psi}_n \to \tilde{U}$ aussi dans $H_0^2(\Omega)$. De ceci et de l'inégalité de Fridrichs nour obtenons $\Psi_n \to U$ dans $H_0^2(\Omega)$. Mais $\bar{\Psi}_n = \tilde{\Psi}_n(0, y)\,.$ $.\, \Phi(0, y) = \psi_n(y)$ et de même $\bar{U} = \bar{u}$, donc nous avons aussi $\bar{\Psi}_n \to \bar{U}$ dans $H_0^2(I)$.

On désigne par D_1 l'espace de toutes les fonctions U, construites par (12.2).

Démonstration du théorème 1.2: Soit $u \in W$. Alors, en écrivant $u = U + Z$, où U est défini par (12.2) nous avons aussi $Z \in W_0$. Construissons $\Psi_n \in D_1$ comme dans (11.2). En utilisant le lemme 4.2, on a $\Psi_n \to U$ pour la norme (5.2). De plus, d'après la conséquence 1.2, il existe des fonctions $\zeta_n \in D_0$ telles que $\zeta_n \to Z$ pour la norme (5.2). En posant $\varphi_n = \Psi_n + \zeta_n (\in D_W)$ on obtient:

$$|||u - \varphi_n||| = |||U + Z - \Psi_n - \zeta_n||| \leqq |||U - \Psi_n||| + |||Z - \zeta_n||| \to 0\,,$$

pour $n \to \infty$.

§ 3. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Maintenant nous avons à notre disposition l'espace W sur lequel la fonctionnelle (1.1) est bien définie. La question de l'existénce et de l'unicité est un problème bien connu. Le problème est le suivant: trouver $u \in W$ tel, que

$$\Phi(u) = \min_{v \in W} [A(v, v) + B(v, v) - 2(f, v)] \tag{1.3}$$

où $f \in W'$ et $(.,.)$ est la dualité entre W' et W. Le problème (1.3) est plus général que celui du § 1.

Théorème 1.3. *Il existe une solution $u \in W$, unique du problème* (1.3).

Désignons par

$$a(u, v) = A(u, v) + B(u, v) \tag{2.3}$$

la forme bilinéaire, définie sur $W \times W$ et cherchons la solution du problème suivant: trouver une fonction $u \in W$ telle que

$$a(u, v) = (f, v) \quad \text{pour chaque} \quad v \in W. \tag{3.3}$$

Ce problème admet une solution unique et de plus on a:

Théorème 2.3. *Les problèmes* (1.3) *et* (3.3) *sont équivalents, c'est-à-dire la solution du problème* (1.3) *satisfait à* (3.3) *et réciproquement.*

§ 4. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Nous utilisons la méthode des éléménts finis conformes pour trouver la solution approchée. Rappelons d'abord quelques faits bien connus (cf. [2]).

Soient V un espace de Hilbert, $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue sur $V \times V$ et V-elliptique, soit $\{V_h\}$ $(V_h \subset V)$ le système des sous-espaces fermés dans V. Désignons par u_h l'élément de V_h, qui satisfait

$$a(u_h, v) = (f, v) \quad \text{pour chaque} \quad v \in V_h\,. \tag{1.4}$$

Il est bien connu que ce problème admet une solution unique et

$$\|u - u_h\|_V \leqq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V\,, \tag{2.4}$$

où C est une constante independante de h. En supposant qu'il existe un sous-espace $\mathscr{V} \subset V$ dense dans V et une application r_h de $\mathscr{V}$ dans V_h telle que $\|v - r_h v\|_V = O(h^\alpha)$ $(\alpha > 0)$ pour chaque $v \in \mathscr{V}$, on obtient de (2.4) soit

$$\|u - u_h\|_V = O(h^\alpha) \quad \text{si la solution appartient à } \mathscr{V}\,, \tag{3.4}$$

soit

$$\|u - u_h\|_V \to 0 \quad \text{pour} \quad h \to 0 \tag{4.4}$$

sans aucune information sur la régularité de la solution.

Construction de V_h. On donne ici seulement deux examples d'espaces V_h, en utilisant les éléments finis rectangulaires (ex. no. 1) ou triangulaires (ex. no. 2).

Example 1. Soit K un rectangle de côtés parallèles aux axes Ox, Oy et de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 et soient A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ seize paramétres réels. Alors on peut construire une seule fonction $p(x, y)$ de la forme

(5.4) $$p(x, y) = \sum_{0 \leqq i, j \leqq 3} a_{i,j} x^i y^i$$

telle que

$$p(a_i) = A_i, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(a_i) = B_i, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(a_i) = C_i, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \, \partial y}(a_i) = D_i .$$

On désigne le système des fonctions de la forme (5.4) par Q_3. Soit $u \in H^4(K)$ et $\Pi_K u \in Q_3$ son interpolé de Hermite, c'est-à-dire:

(6.4) $$\Pi_K u(a_i) = u(a_i), \qquad \frac{\partial}{\partial x} \Pi_K u(a_i) = \frac{\partial}{\partial x} u(a_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Pi_K u(a_i) = \frac{\partial}{\partial y} u(a_i), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \Pi_K u(a_i) = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} u(a_i), \quad (i = 1, \ldots, 4) .$$

Alors on a l'estimation suivante:

(7.4) $$\|u - \Pi_K u\|_{m,K} \leqq C h_K^{4-m} . \|u\|_{4,K}, \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

pour chaque $u \in H^4(K)$ en supposant que

(8.4) $$\frac{h_K}{\varrho_K} \leqq C ,$$

où C est une constante indépendante de h_K, h_K est le diamètre de K et ϱ_K est la plus petite hauteur de K. Etant donné un paramètre $h > 0$, destiné à tendre vers zéro, on associe à h un recouvrement de $\bar{\Omega}$ R_h par des rectangles fermés $K_j \subset \bar{\Omega}$ $(j = 1, 2, \ldots \ldots, N(h))$ de côtés paralléles aux axes Ox, Oy ayant les propriétés suivantes:

(i) diam $(K_i) \leqq h(i = 1, \ldots, N(h))$

(ii) Deux rectangles distincts K_i et K_j de R_h ont
- soit une intersection vide
- soit une intersection réduite à un sommet
- soit une intersection réduite à un côté commun.

(iii) La quadrangulation est régulière, c'est-à-dire la condition (8.4) est satisfaite avec une constante C indépendante aussi de $K_i \in R_h$.

(iv) Le segment I n'est à l'intérieur d'aucun élément $K_i \in R_h$.

Remarque 1.4. On peut utiliser la technique isoparamètrique.

Soit $\hat{K}$ le carré de sommets $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$ où $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$ $\hat{a}_3 = (1, 1)$, $\hat{a}_4 = (0, 1)$. On peut construire facilement les fonctions de base sur $\hat{K}$ („shape fonctions" dans la terminologie de Zienkiewicz). Soit F une application $R_2 \to R_2$ de la forme suivante: $F(x) = Dx + b$, où D est la matrice diagonale et $b \in R_2$. Alors chaque $K_i \in R_h$ peut s'écrire sous la forme $K_i = F(\hat{K})$. Les fonctions de base p_j sur K_i sont données par $p_j = \hat{p}_j F^{-1}$, où $\hat{p}_j$ sont celles sur $\hat{K}$ et F^{-1} est l'application inverse de F.

Maintenant l'espace V_h se définit de la manière suivante:

$$(9.4)\qquad V_h = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)\,, \quad \text{tel que} \quad u|_{K_i} \in Q_3, K_i \in R_h\}\,.$$

Il est clair que $V_h \subset W$. Pour les fonctions appartenant à D_W on peut définir l'application r_h de D_W dans V_h de la manière suivante:

$$(10.4)\qquad r_h u = \Pi_{K_i} u \quad \text{sur} \quad K_i \in R_h\,,$$

où $\Pi_{K_i} u \in Q_3$ est l'interpolé de Hermite sur K_i de la fonction u, construit dans (6.4). Evidemment $r_h u \in V_h$ et (n'oublions pas que la fonction $u \in D_W$ appartient à $H^4(K_i)$) aussi:

$$(11.4)\qquad \|u - r_h u\|_{2,\Omega}^2 = \sum_{K_i \in R_h} \|u - r_h u\|_{2,K_i}^2 = \sum_{K_i \in R_h} \|u - \Pi_{K_i} u\|_{2,K_i}^2 \leqq ch^4 \|u\|_{4,\Omega}^2$$

pour chaque $u \in D_W$ en utilisant l'estimation (7.4). Mais simultanément $\overline{r_h u} = r_h u|_I$ est une fonction à une variable y, qui interpole $\bar{u}$ sur I et l'estimation analogue à celle de (11.4) a lieu:

$$(12.4)\qquad \|\bar{u} - \overline{r_h u}\|_{2,I} \leqq ch^2 \|\bar{u}\|_{4,I} \quad \text{pour chaque} \quad \bar{u} \in H^4(I)\,.$$

Si la solution de notre problème est assez régulière (par. ex. si $u \in H^4(K_i)$, $\bar{u} \in H^4(I)$ pour chaque $K_i \in R_h$ et $r_h u$ défini dans (10.4) appartient à V_h), alors d'après (3.4)

$$(13.4)\qquad |||u - u_h||| \leqq |||u - r_h u||| \leqq ch^2[\|u\|_{4,\Omega} + \|\bar{u}\|_{4,I}]$$

Si l'on ne sait rien sur la régularité de la solution, on obtient simplement:

$$(14.4)\qquad |||u - u_h||| \to 0 \quad \text{pour} \quad h \to 0\,.$$

Remarque 2.4. La condition (iv) pour la rectangulation de $\bar{\Omega}$ est très importante. Le découvrement de $\bar{\Omega}$, pour n'importe quel type des éléments finis, doit satisfaire à la condition suivante:

– soit $I \cap K_i = \phi$

– soit de $I \cap K_i = \phi$, vient $I \subset \partial K_i$.

Example 2. Soit T un triangle de sommets a_1, a_2, a_3 et $u \in H^6(T)$. Alors il existe un polynôme $\Pi_T u$ unique de degré 5, à deux varibales x, y tel, que

$$\Pi_T u(a_i) = u(a_i)\,, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Pi_T u(a_i) = \frac{\partial}{\partial x} u(a_i)\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Pi_T u(a_i) = \frac{\partial}{\partial y} u(a_i)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Pi_T u(a_i) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(a_i)\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Pi_T u(a_i) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} u(a_i)\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Pi_T u(a_i) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(a_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\Pi_T u(a_{i,j}) = \frac{\partial}{\partial n} u(a_{i,j})\,,$$

où $a_{i,j}$ est le milieu du côté $a_i a_j$ $(i = 1, 2, 3;\ 1 \leqq i < j \leqq 3)$, et l'estimation suivante a lieu (cf. par. ex. [2], [3]):

$$\|u - \Pi_T u\|_{m,T} \leqq c h_T^{6-m} \|u\|_{6,T} \quad \text{pour chaque} \quad u \in H^6(T)\,, \; m = 0, \ldots, 5\,, \tag{15.4}$$

en supposant que

$$\frac{h_T}{\varrho_T} \leqq c \tag{16.4}$$

(c une constante ind. de h), où h_T est le diamètre de T, ϱ_T le diamètre du cercle inscrit dans T.

Soit $\mathscr{T}_h$ la triangulation de $\bar{\Omega}$, satisfaisant aux conditions analogues à celles de (i)–(iv) de l'ex. 1, en remplaçant les mots „quadrangulation", „rectangle" par „triangulation", „triangle" respectivement et où la définition de triangulation régulière est prise au sens de (16.4).

L'espace V_h se définit maintenant de la manière suivante:

$$V_h = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)\,, \quad \text{telle} \quad \text{que} \quad u|_{T_i} \in P_5,\, T_i \in \mathscr{T}_h\}\,. \tag{17.4}$$

où P_5 est l'ensemble des polynomes de degré 5. Pour $u \in D_W$ (et c'est-à-dire $u \in H^6(T_i)$) on peut définir l'application r_h de D_W dans V_h:

$$r_h u = \Pi_{T_i} u \quad \text{sur} \quad T_i \in \mathscr{T}_h\,, \tag{18.4}$$

où $\Pi_{T_i} u$ est défini ci-dessus. Evidemment $r_h u \in V_h$.

Remarque 3.4. Ici on utilise aussi pour la construction de $r_h u$ les valeurs $(\partial^2/\partial x^2)\, u(a_i)$. Pour $u \in D_W$ la fonction $(\partial^2/\partial x^2)\, u$ *n*'est pas, en général, continue sur $\bar{\Omega}$. Mais heuresement, à cause de la position particulière de I, on n'a pas besoin de valeurs de $(\partial^2/\partial x^2)\, u(a_i)$ avec $a_i \in I$ pour que $r_h u$ appartienne à $H^2(\Omega)$.

Si la solution de notre problème est assez régulière (par. ex. $u \in H^6(T_i)$, $\bar{u} \in H^6(I)$ pour chaque $T_i \in \mathscr{T}_h$ et $r_h u$ défini dans (18.4) appartient à V_h) on a l'estimation suivante:

$$|||u - u_h||| \leqq c h^4 [\|u\|_{6,\Omega} + \|\bar{u}\|_{6,I}]\,, \tag{19.4}$$

ou

$$|||u - u_h||| \to 0 \quad \text{pour} \quad h \to 0\,, \tag{20.4}$$

si l'on ne sait rien sur la régularité de la solution.

Théorème 1.4. Soit R_h (resp. $\mathscr{T}_h$) une quadrangulation (resp. triangulation) de $\bar{\Omega}$ satisfaisant (i)–(iv) de l'ex. 1. Soit $u \in W$ la solution exacte du problème (1.1) et u_h la solution approchée dans nos espaces V_h de dimension finite. Alors on a $|||u - u_h||| \to 0$ pour $h \to 0$.

Je remercie prof. J. Nečas pour ses conseils et l'intérêt à ce travail.

Références

[1] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Prague 1967.
[2] *Ciarlet, P. G. - P. A. Raviart:* General Lagrange and Hermite interpolation in R_n with applications to finite element methods, Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972), 217—249.
[3] *Zlámal M.:* On the finite element method, Numer. Math. 12 (1968), 394—409.

Souhrn

O ŘEŠENÍ JEDNOHO PROBLÉMU DESKY

JAROSLAV HASLINGER

V práci je řešen problém vetknuté desky, prostě podepřené tyčí uprostřed a vetknuté na koncích. Použitím klasického principu minima potenciální energie vede tento problém na úlohu hledání minima kvadratického funkcionálu Φ typu (1.1) na prostoru W definovaném vztahem (3.2). V § 2 se dokazují elementární vlastnosti W. Jedná se zejména o otázku hustoty jisté třídy hladších funkcí v W. V § 3 je krátce pojednáno o existenci a jednoznačnosti řešení. V § 4 je navržena metoda konečných prvků pro přibližné řešení našeho problému. Pokud bychom a priori předpokládali jistou hladkost daného řešení (např. $u \in H^4(\Omega)$), potom otázka konvergence (resp. řádu konvergence) metody jest triviální. Dělat takové předpoklady o regularitě řešení není realistické. Proto bylo třeba dokázat větu 1.2., aby se dokázala konvergence přibližných řešení u_h k přesnému řešení u, bez jakýchkoli dalších předpokladů o hladkosti u.

Adresse de l'auteur: Jaroslav Haslinger, Matematicko-fysikální fakulta KU, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.