Aplikace matematiky

František Zítek

Die gemischte Warteordnung in Bedienungssystemen mit beschränktem Warteraum

Aplikace matematiky, Vol. 19 (1974), No. 2, 90–100

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103517

DIE GEMISCHTE WARTEORDNUNG IN BEDIENUNGSSYSTEMEN MIT BESCHRÄNKTEM WARTERAUM

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Eingegangen am 27. Juli 1973)

Die gemischte Warteordnung haben wir schon mehrmalig, in verschiedenen Bedienungssystemen untersucht (s. [5], [6], [7]). Hier wollen wir diesen Begriff so erweitern, daß er sich auch in Bedienungssystemen mit beschränktem Warteraum anwenden läßt. Wir fangen dabei natürlich wieder mit den einfachsten Systemen des Typs $M/M/n$ im Gleichgewicht an.

1. Wir betrachten also ein Bedienungssystem mit $n(n \geqq 1)$ Bedienungsstellen; der Eingangsprozeß ist ein homogener Poissonprozeß mit dem Parameter λ, $0 < \lambda < \infty$, die Bedienungszeiten der Kunden sind unabhängig und exponentialverteilt, der Parameter dieser Verteilung ist μ, $0 < \mu < \infty$, derselbe für alle n Bedienungsstellen. Der Warteraum des Systems ist beschränkt, was bedeutet, daß in der Schlange vor den Bedienungsstellen höchstens m $(m \geqq 1)$ Kunden warten können.[1]

Die Gleichgewichtsverteilung der Anzahl der im System befindlichen Kunden ist für solche Systeme seit lange wohlbekannt (s. [3] und [4]). Die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, daß es im ganzen System gerade k Kunden gibt, $k = 0, 1, 2, \ldots, n + m$, ist

$$(1) \qquad p_k = p_0\beta^k/k! \quad \text{für} \quad 0 \leqq k \leqq n\,,$$

$$p_k = p_n(\beta/n)^{k-n} \quad \text{für} \quad n \leqq k \leqq n + m$$

und

$$(1') \qquad p_0 = \{\sum_{k=0}^{n}(\beta^k/k!) + (\beta^n/n!)\sum_{k=1}^{m}(\beta/n)^k\}^{-1},$$

wobei $\beta = \lambda/\mu$ ist.

---

[1]) Den Fall der Besetztsysteme, wo $m = 0$ ist, lassen wir von Anfang an als nicht interessant außer Betracht.

Mit der Wahrscheinlichkeit $\sum_{k=0}^{n-1} p_k$ geht also ein in das System eintreffender Kunde ohne Warten in die Bedienung ein; mit der Wahrscheinlichkeit $\sum_{k=0}^{m-1} p_{n+k}$ muß er auf die Bedienung warten und reiht sich dazu – den Regeln der entsprechenden Warteordnung folgend – in die Schlange ein. Die Wahrscheinlichkeit p_{n+m} wird üblicherweise auch als die Verlustwahrscheinlichkeit bezeichnet, mit der der eintreffende Kunde den Warteraum ganz besetzt auffindet und deshalb in die Schlange nicht eingenommen wird. Ohne weiteres dürfen wir das jedoch nur bei der natürlichen Warteordnung behaupten.

2. Hier aber wollen wir auch andere Warteordnungen in unserem System untersuchen, vor allem wieder die gemischte Warteordnung. Die ist bekanntlich dadurch charakterisiert, daß sich die in das System eintreffenden Kunden, die wirklich schlangestehen müssen, den Platz wählen können, auf dem sie sich in die Warteschlange einreihen. Im allgemeinen sieht das so aus, daß sich der neue Kunde mit einer festen Wahrscheinlichkeit ϑ, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, auf dem ersten Platz und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \vartheta$ auf dem letzten Platz einreiht. Diese beiden Möglichkeiten kommen natürlich nur dann vor, wenn die Anzahl der im System schon befindlichen Kunden zwischen den Grenzen n und $n + m$ liegt.[2]) Gibt es im System gerade n Kunden, so fällt der letzte Platz in der Schlange mit dem ersten zusammen: der neue Kunde hat dann also nichts zu wählen.

Der allein übrig bleibende Fall ist am interessantesten: was soll geschehen, falls der neue Kunde in einem solchen Augenblick gekommen ist, wenn der Warteraum ganz besetzt ist (im System befinden sich dann also genau $n + m$ Kunden)? Bei der natürlichen Warteordnung würde ohne weiteres *der neue Kunde* verloren gehen. Bei der gemischten Warteordnung nehmen wir jedoch an, daß auch dann der eintreffende Kunde die Möglichkeit hat, sich den Platz auszuwählen, auf welchem er sich einreihen will. Wählt er den letzten, so geht er verloren, denn am Schlangenende gibt es keinen freien Platz mehr; wählt er aber den ersten Platz, so kann er sich doch in die Schlange einreihen, die schon wartenden Kunden verschieben sich um einen Platz in der Schlange zurück und der letzte, der bisher auf dem m-ten Platz in der Schlange stand, muß dabei das System ohne Bedienung verlassen.

Bei dieser Warteordnung kommen also zwei Sorten von Kundenverlusten vor: gleich beim Eintreffen oder erst später nach einem erfolglosen Warten. Wir wollen jedoch gleich daran erinnern, daß bei $\vartheta = 0$ die gemischte Warteordnung zur natürlichen wird – dann ist nur der erste Fall möglich. Ebenso ist bei $\vartheta = 1$, d.h. bei der inversen Warteordnung (falls $m \geqq 1$ ist, was wir allerdings stets voraussetzen) nur der zweite Fall möglich.

3. Unsere erste Aufgabe wird es jetzt sein, die Verlustwahrscheinlichkeit bei der allgemeinen gemischten Warteordnung zu berechnen. Ohne weiteres können wir

[2]) Weniger als n Kunden kann es im System nicht geben, denn sonst könnte der neu eintreffende Kunde ohne Warten bedient werden.

sofort sagen, daß $(1 - \vartheta)\, p_{n+m}$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Kunde gleich bei seinem Eintreffen verloren geht.

Um die anderen Verlustwahrscheinlichkeiten zu finden, werden wir auf die übliche Weise (vgl. [5], [6]) die Irrfahrt eines Kunden $\mathscr{K}$ in der Schlange untersuchen. Seine Lage in der Schlange drücken wir wieder durch eine ganze Zahl L aus; es ist $L = k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), wenn unser Kunde $\mathscr{K}$ eben auf dem k-ten Platz in der Schlange steht. Wir setzen noch $L = 0$, wenn er schon die Bedienung erreicht hat, und $L = m + 1$, wenn er verloren gegangen ist.

Die Irrfahrt des Kunden fängt in seinem Eintreffenszeitpunkt an. Die entsprechende Anfangsverteilung

$$q_k = \mathbf{P}\{L = k\}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m + 1\,,$$

kennen wir eigentlich schon. Es ist

$$q_0 = \sum_{j=0}^{n-1} p_j\,, \qquad q_1 = p_n + \vartheta \sum_{j=1}^{m} p_{n+j}\,, \tag{2}$$
$$q_k = (1 - \vartheta)\, p_{n+k-1} \quad \text{für} \quad 1 < k \leqq m + 1\,.$$

Während der Wartezeit des Kunden ändert sich dann seine Lage, bis sie endlich einen der Werte $L = 0$ oder $L = m + 1$ erreicht.³) Die Lage L kann sich allerdings nur in solchen Augenblicken ändern, in welchen entweder ein neuer Kunde in das System eintrifft *und sich auf dem ersten Platz* — also vor $\mathscr{K}$ — *einreiht*, oder ein bedienter Kunde das System verläßt. Wenn wir die Werte L nur zu denjenigen Zeitpunkten beobachten, in welchen eben eine solche Lageänderung vorgekommen ist, so bekommen wir eine zufällige Folge, die, wie leicht einzusehen ist, die Realisierung einer Markovschen Kette bildet. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Kette sind

$$p_{00} = 1\,, \quad p_{m+1\,m+1} = 1\,, \tag{3}$$

und für $j = 1, 2, \ldots, m$ dann

$$p_{jj-1} = n\mu(n\mu + \vartheta\lambda)^{-1} = p\,, \quad p_{jj+1} = \vartheta\lambda(m\mu + \vartheta\lambda)^{-1} = q = 1 - p\,, \tag{4}$$

(vgl. auch [5] und [7]).

Es handelt sich also um die klassische Irrfahrt auf einer endlichen Strecke, mit zwei absorbierenden Grenzen 0 und $m + 1$. Die entsprechende Theorie ist wohlbekannt (s. z.B. [1]). Für die Wahrscheinlichkeiten B_j ($j = 0, 1, \ldots, m + 1$) dafür, daß ein Kunde, der seine Irrfahrt auf dem j-ten Platz in der Schlange angefangen hat, diese auf dem Platz 0 beendet, d.h. daß er überhaupt einmal die Bedienung erreicht,

³) Falls $L = 0$ oder $L = m + 1$ gleich beim Eintreffen ist, kommen natürlich keine Lageänderungen mehr vor. Die Zustände $L = 0$ und $L = m + 1$ sind absorbierend.

erhalten wir die Formel ($\varrho = \lambda/n\mu$)

$$B_j = \frac{1 - (\vartheta\varrho)^{m-j+1}}{1 - (\vartheta\varrho)^{m+1}}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \tag{5}$$

mit $B_{m+1} = 0$; für die entsprechenden Verlustwahrscheinlichkeiten V_j eines solchen Kunden gilt dann

$$V_j = \frac{(\vartheta\varrho)^{m-j+1} - (\vartheta\varrho)^{m+1}}{1 - (\vartheta\varrho)^{m+1}} \tag{6}$$

für alle $j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1$; es ist natürlich $B_j + V_j = 1$ für $j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1$.

Damit sind wir auch imstande, die gesamte, unbedingte Verlustwahrscheinlichkeit P_V eines *beliebigen* Kunden bei der allgemeinen gemischten Warteordnung zu berechnen. Es ist

$$P_V = \sum_{j=0}^{m+1} q_j V_j\,;$$

aus (2), (1) und (6) ergibt sich nach einigen Umformungen die Gleichheit

$$\begin{aligned} P_V &= p_n V_1 + \vartheta \sum_{j=1}^{m} p_{n+j} V_1 + (1 - \vartheta) \sum_{j=1}^{m} p_{n+j} V_{j+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{m} p_{n+j} [\vartheta V_1 + (1 - \vartheta) V_{j+1}] = p_n \varrho^m = p_{n+m}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Das bedeutet, daß die Verlustwahrscheinlichkeit P_V vom Wert des Parameters ϑ gar nicht abhängt. Dieses Ergebnis sollte uns jedoch nicht überraschen, denn die durchschnittliche Leistung des Bedienungssystems ist natürlich von der Reihenfolge, in welcher die Kunden bedient werden, unabhängig.

Die Verlustwahrscheinlichkeit $P_V = p_{n+m}$ ist offensichtlich die Summe der Wahrscheinlichkeit $(1 - \vartheta)\, p_{n+m}$ eines sofortigen Verlustes beim Eintreffen und der Wahrscheinlichkeit ϑp_{n+m} eines Verlustes nach erfolglosem Warten. Die Wahrscheinlichkeit P_W dafür, daß der eintreffende Kunde überhaupt in der Schlange warten wird, ist bekanntlich gleich

$$P_W = \sum_{j=0}^{m-1} p_{n+j} + \vartheta p_{n+m}\,.$$

Das erste Glied $\sum_{j=0}^{m-1} p_{n+j}$ stellt also die Wahrscheinlichkeit dar, mit welcher das Warten mit Erfolg in der Bedienung enden wird.

4. Wieder dem Beispiel unserer früheren Untersuchungen folgend (vgl. [5], [6]) wollen wir uns jetzt auch für die Wartezeitverteilung interessieren. Es sei $\chi_j(s)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ die charakteristische Funktion der noch nachfolgenden Wartezeit eines Kunden[4]), der eben als j-ter in der Schlange steht. Wir setzen noch

(8) $$\chi_0(s) \equiv 1, \quad \chi_{m+1}(s) \equiv 1 ,$$

dann können wir wieder die folgenden Gleichungen für die Funktionen $\chi_j(s)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, schreiben

$$\chi_j(s) = \frac{n\mu + \lambda}{n\mu + \lambda - is} \left\{ \frac{n\mu}{n\mu + \lambda} \chi_{j-1}(s) + \frac{(1 - \vartheta)\lambda}{n\mu + \lambda} \chi_j(s) + \frac{\vartheta\lambda}{n\mu + \lambda} \chi_{j+1}(s) \right\},$$

(vgl. (3.1) in [6] oder (5.22) in [5]), oder noch einfacher

$$\chi_j(s) = \frac{n\mu + \vartheta\lambda}{n\mu + \vartheta\lambda - is} \left\{ \frac{n\mu}{n\mu + \vartheta\lambda} \chi_{j-1}(s) + \frac{\vartheta\lambda}{n\mu + \vartheta\lambda} \chi_{j+1}(s) \right\},$$

(vgl. (4)). Daraus ergibt sich dann das Gleichungssystem

(9) $$(n\mu + \vartheta\lambda - is)\,\chi_j(s) = n\mu\,\chi_{j-1}(s) + \vartheta\lambda\,\chi_{j+1}(s), \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

(vgl. (3.2) in [6]).

Um die Gleichungen (9) mit den Randbedingungen (8) zu lösen, kann man verschiedenerweise vorgehen. Der einfachste Fall $m = 1$ ist fast trivial, denn in einem solchen System kann jederzeit nur ein Kunde warten und nur so lange, bis sich seine Lage in der „Schlange" zum ersten Mal ändern soll. Es ist da

$$\chi_1(s) = (n\mu + \vartheta\lambda)(n\mu + \vartheta\lambda - is)^{-1}.$$

Auch für $m = 2$ ist es noch nicht schwer, das System (9) direkt zu lösen; es lautet

$$(n\mu + \vartheta\lambda - is)\,\chi_1(s) = n\mu + \vartheta\lambda\,\chi_2(s),$$
$$(n\mu + \vartheta\lambda - is)\,\chi_2(s) = n\mu\,\chi_1(s) + \vartheta\lambda$$

und die Lösung ist dann

$$\chi_1(s) = \frac{(n\mu + \vartheta\lambda)^2 - n\mu\vartheta\lambda - n\mu is}{(n\mu + \vartheta\lambda - is)^2 - n\mu\vartheta\lambda},$$

$$\chi_2(s) = \frac{(n\mu + \vartheta\lambda)^2 - n\mu\vartheta\lambda - \vartheta\lambda is}{(n\mu + \vartheta\lambda - is)^2 - n\mu\vartheta\lambda}.$$

In dem allgemeinen Fall werden wir jedoch lieber einen Umweg machen. Wir kehren nämlich wieder zu der Irrfahrt zurück, welche der wartende Kunde in der Schlange ausübt. Es sei nun $w(j, k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kunde, welcher eben auf dem j-ten Platz ($j = 0, 1, \ldots, m + 1$) in der Schlange steht, seine

[4]) Besser gesagt der Zeit, die er in der Schlange noch zu verbringen hat; ob der Kunde dann wirklich bedient wird oder verloren geht, ist hier unwichtig.

Irrfahrt nach genau k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) nachfolgenden Schritten im Zustand 0 (d.h. in der Bedienung) beendet. Es ist natürlich $w(0, 0) = 1$, $w(m + 1, k) = 0$ für alle $k \geqq 0$; $w(j, k) = 0$ für $k < j$ und auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} w(j, k) = B_j\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1\,. \tag{10}$$

Die Wahrscheinlichkeiten $w(j, k)$ erfüllen außerdem die rekurrente Gleichung

$$w(j, k) = \frac{\vartheta\lambda}{n\mu + \vartheta\lambda}\, w(j + 1, k - 1) + \frac{n\mu}{n\mu + \vartheta\lambda}\, w(j - 1, k - 1) \tag{11}$$

für $j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Der explizite Ausdruck für $w(j, k)$ ist von der allgemeinen Theorie der klassischen Irrfahrt her wohlbekannt (s. z. B. [1], § XIV. 5). Für unsere Zwecke werden jedenfalls die entsprechenden erzeugenden Funktionen genügen, die wir allerdings auch in [1] finden können. Für diese Funktionen

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w(j, k)\, z^k\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m + 1\,,$$

folgt aus unseren Bedingungen $g_0(z) \equiv 1$, $g_{m+1}(z) \equiv 0$ und für $j = 1, 2, \ldots, m$ dann aus (11) die Gleichung

$$\vartheta\lambda z\, g_{j+1}(z) - (n\mu + \vartheta\lambda)\, g_j(z) + n\mu z\, g_{j-1}(z) = 0\,. \tag{12}$$

Den fast trivialen Spezialfall der natürlichen Warteordnung, wo $\vartheta = 0$ ist, so daß $w(j, j) = 1$ und

$$\chi_j(s) = \left(\frac{n\mu}{n\mu - is}\right)^j$$

für alle $j = 0, 1, \ldots, m$ gilt, dürfen wir vielleicht ohne weiteres außer Betracht lassen.

Im allgemeinen Fall hat (12) die Lösung (s. [1])

$$g_j(z) = (\vartheta\varrho)^{-j}\, \frac{\alpha_1^{m+1-j}(z) - \alpha_2^{m+1-j}(z)}{\alpha_1^{m+1}(z) - \alpha_2^{m+1}(z)}\,, \tag{13}$$

wo $\alpha_1(z)$ und $\alpha_2(z)$ die zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\vartheta\lambda z\alpha^2 - (n\mu + \vartheta\lambda)\, \alpha + n\mu z = 0 \tag{14}$$

bezeichnen.

Ähnlicherweise kann man auch die erzeugenden Funktionen

$$h_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(j, k)\, z^k\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1\,,$$

finden, wo $v(j, k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Kunde, welcher eben als j-ter in der Schlange steht, nach genau k folgenden Schritten aus der Schlange am Ende ausfallen (verloren gehen) wird. Es ist (s. wieder [1])

$$h_j(z) = (\vartheta\varrho)^{m+1-j} \frac{\gamma_1^j(z) - \gamma_2^j(z)}{\gamma_1^{m+1}(z) - \gamma_2^{m+1}(z)},$$

wobei $\gamma_1(z)$ und $\gamma_2(z)$ die zwei Wurzeln der Gleichung

$$n\mu z\gamma^2 - (n\mu + \vartheta\lambda)\,\gamma + \vartheta\lambda z = 0$$

sind. Man sieht sofort, daß

$$\gamma_{1,2}(z) = \vartheta\varrho\,\alpha_{1,2}(z) = [\alpha_{2,1}(z)]^{-1}$$

ist. Daraus ergibt sich für die Funktionen $h_j(z)$ die Formel

$$h_j(z) = \frac{\alpha_1^j(z) - \alpha_2^j(z)}{\alpha_1^{m+1}(z) - \alpha_2^{m+1}(z)}. \tag{15}$$

Die Zeitlücken zwischen den einzelnen Schritten der Irrfahrt sind zufällig und haben alle dieselbe Exponentialverteilung mit dem Parameter $n\mu + \vartheta\lambda$. Besteht die ganze Irrfahrt aus genau k Schritten, so hat ihre gesamte Länge eine Erlang-Verteilung mit den Parametern k und $n\mu + \vartheta\lambda$. Für die charakteristische Funktion $\varphi_j(s)$ der in der Schlange verbrachten Zeit eines Kunden, welcher seine Irrfahrt auf dem j-ten Platz ($j = 0, 1, \ldots, m + 1$) begann und zuletzt wirklich die Bedienung erreichte, erhalten wir also die Gleichung

$$B_j\varphi_j(s) = \sum_{k=0}^{\infty} [w(j, k)\,(n\mu + \vartheta\lambda)^k\,(n\mu + \vartheta\lambda - is)^{-k}] = g_j\left(\frac{n\mu + \vartheta\lambda}{n\mu + \vartheta\lambda - is}\right).$$

Die charakteristische Funktion $\psi_j(s)$ der in der Schlange verbrachten Zeit eines Kunden, welcher als j-ter zu warten anfing, dessen Warten jedoch ohne Erfolg verblieb und mit seinem Verlust endete, ist nun durch die Formel

$$\psi_j(s) = \frac{1}{V_j}\,h_j\left(\frac{n\mu + \vartheta\lambda}{n\mu + \vartheta\lambda - is}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, m + 1,$$

gegeben.

Jetzt können wir aber schon wieder zu unseren Funktionen $\chi_j(s), j = 0, 1, \ldots, m + {}$ $+ 1$, zurückkehren; es ist nämlich

$$\chi_j(s) = B_j\,\varphi_j(s) + V_j\,\psi_j(s) = g_j\left(\frac{n\mu + \vartheta\lambda}{n\mu + \vartheta\lambda - is}\right) + h_j\left(\frac{n\mu + \vartheta\lambda}{n\mu + \vartheta\lambda - is}\right) \tag{16}$$

für alle $j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1$. Die Substitution $z = (n\mu + \vartheta\lambda)(n\mu + \vartheta\lambda - is)^{-1}$ kann man auch so durchführen, daß man in den Formeln (13) und (15) für g_j und

h_j anstatt der Wurzeln $\alpha_{1,2}(z)$ der Gleichung (14) die Wurzeln $\alpha^*_{1,2}(z)$ der Gleichung

$$(17) \qquad \vartheta\lambda\alpha^2 - (n\mu + \vartheta\lambda - is)\,\alpha + n\mu = 0$$

einsetzt.

Es bleibt nur noch übrig zu überprüfen, ob die durch (16) bestimmten Funktionen $\chi_j(s)$, $j = 0, 1, \ldots, m + 1$ wirklich die Gleichung (9), bzw. die Randbedingungen (8) erfüllen. Falls $j = 0$ oder $j = m + 1$ ist, so genügt es, in (16) nach (13) und (15) einzusetzen; wir sehen dann sofort, daß (8) tatsächlich erfüllt ist, da $g_0(z) \equiv 1$, $h_0(z) \equiv 0$, $g_{m+1}(z) \equiv 0$, $h_{m+1}(z) \equiv 1$ ist. Setzen wir nach (16) in (9) ein, so wird die Gleichung (9) zu einer Summe von vier Gleichungen, von denen jede auf (17) reduzierbar ist; somit ist auch (9) verifiziert.

Die charakteristische Funktion $\chi_W(s)$ der gesamten Wartezeit (s. wieder [4])) eines beliebigen (zufällig gewählten) Kunden ist nun eine lineare Kombination der Funktionen $\chi_j(s)$; die Koeffizienten sind durch die Anfangsverteilung (2) gegeben. Es ist also

$$(18) \quad \chi_W(s) = \sum_{j=0}^{m+1} q_j\,\chi_j(s) = \sum_{j=0}^{n-1} p_j + (p_n + \vartheta \sum_{j=1}^{m} p_{n+j})\,\chi_1(s) + (1 - \vartheta) \sum_{j=1}^{m} p_{n+j}\,\chi_{j+1}(s)$$

Somit ist die Aufgabe, die wir uns am Anfang dieses Absatzes gestellt haben, gelöst. Sie wäre etwas leichter gewesen, hätten wir auf die Wartezeitverteilung verzichtet und uns nur mit den entsprechenden Mittelwerten begnügt. Wenn wir das Gleichungssystem (9) differenzieren, so bekommen wir für die Mittelwerte

$$M_j = -\,i\,\chi'_j(0)\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1\,,$$

das Gleichungssystem

$$(19) \qquad (n\mu + \vartheta\lambda)\,M_j - 1 = n\mu M_{j-1} + \vartheta\lambda M_{j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

die Randbedingungen (8) ergeben dazu noch

$$(20) \qquad M_0 = M_{m+1} = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung des Systems (19) mit den Bedingungen (20) hat die Form

$$(21) \qquad M_j = \frac{j}{n\mu + \vartheta\lambda} - \frac{m + 1}{n\mu - \vartheta\lambda}\,(\vartheta\lambda)^{m+1-j}\,\frac{(n\mu)^j - (\vartheta\lambda)^j}{(n\mu)^{m+1} - (\vartheta\lambda)^{m+1}}$$

für $j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1$.

Auch für die zweiten Momente

$$S_j = -\,\chi''_j(0)\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m + 1,$$

bekommt man ähnlicherweise die Gleichungen

$$(n\mu + \vartheta\lambda) S_j - 2M_j = n\mu S_{j-1} + \vartheta\lambda S_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

mit den Randbedingungen

$$S_0 = S_{m+1} = 0 .$$

Wenn wir dann M_j und S_j kennen, können wir auch die Varianz $D_j = S_j - M_j^2$ der Wartezeit des auf dem j-ten Platz in der Schlange stehenden Kunden berechnen. Der Leser kann selbst diese Ergebnisse in den einfacheren Fällen (z.B. für $m = 2$) konkretisieren.

5. In unseren früheren Arbeiten haben wir uns auch für das (aktive und passive) Überholen der Kunden in der Schlange interessiert (s. [5], [6], [7]); diese Fragen wollen wir jetzt auch für unser System mit beschränktem Warteraum berühren.

Wie immer ist auch hier das Problem viel einfacher, soweit es sich um das aktive Überholen handelt. Die Verteilung der Anzahl der aktiven Überholungen eines beliebig gewählten Kunden ist wieder[5])

$$(22) \qquad P_{akt}(k) = \vartheta p_{n+k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$P_{akt}(0) = \sum_{j=0}^{m} p_j + (1 - \vartheta) \sum_{j=1}^{m} p_{n+j} .$$

Aber auch der Fall der passiven Überholungen ist hier nicht mehr so schwierig, da wir ja schon die Wahrscheinlichkeiten $w(j, k)$ und $v(j, k)$ kennen. Es ist wirklich nicht schwer einzusehen, daß $w(j, 2k + j)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein auf dem j-ten Platz in der Schlange stehender Kunde noch genau k-mal überholt wird und dann die Bedienung erreicht. Ähnlicherweise ist dann $v(j, 2k + m + 1 - j)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er nach genau k passiven Überholungen am Ende der Schlange verloren geht. Für die Verteilung der Gesamtanzahl der passiven Überholungen eines beliebigen Kunden erhalten wir also die Formel

$$(23) \qquad P_{pas}(k) = \sum_{j=1}^{m} q_j [w(j, 2k + j) + v(j, 2k + m + 1 - j)]$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und

$$(24) \qquad P_{pas}(0) = q_0 + \sum_{j=1}^{m} q_j \, w(j, j) + q_{m+1} .$$

Man sieht auch leicht ein, wie man die Formeln (23) und (24) umwandeln muß, wenn man die Verteilung der Anzahl der passiven Überholungen eines Kunden

---

[5]) Es ist dabei zu verstehen, daß ein Kunde, welcher gleich beim Eintreffen verloren geht, auch keinen anderen überholt.

bekommen will, von dem man weiß, wie er geendet hat (ob mit Verlust oder in der Bedienung).

6. Je größer der Warteraum des Systems ist (d.h. je größer m ist), desto kleiner ist der Unterschied zwischen unserem System und dem gewöhnlichen Wartesystem $M/M/n$ ohne Verluste. Man kann auch leicht sehen, daß bei $m \to \infty$ die Wahrscheinlichkeiten B_j und V_j (s. (5) und (6)) gegen die entsprechenden Grenzwerte konvergieren, also $B_j \to 1$, $V_j \to 0$, $(j \leqq m)$.

Ebenso konvergieren auch die Wahrscheinlichkeiten $w(j, k)$ zur Lösung $w^*(j, k)$ der Gleichung (11) in der ganzen Halbebene $j \geqq 0$, $k \geqq 0$, mit den Randbedingungen $w^*(0, 0) = 1$, $w^*(j, 0) = 0$ für $j > 0$, und $w^*(j, k) = 0$ für $k < j$. Die Gleichheit (10) wird dabei zu $\sum_{k=0}^{\infty} w^*(j, k) = 1$ für alle $j \geqq 1$. Die Lösung ist bekannt. In [1] finden wir, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^*(j, k)\, z^k = [\alpha(z)]^j$$

ist, wobei

$$\alpha(z) = \{(n\mu + \vartheta\lambda) - [(n\mu + \vartheta\lambda)^2 - 4n\mu\vartheta\lambda z^2]^{1/2}\}\,(2\vartheta\lambda z)^{-1}\,.$$

In [5] haben wir jedoch die Wahrscheinlichkeiten $P(k, j)$ – s. die Formel (6.14) in [5] – berechnet. Es ist nun wieder $P(k, j) = w^*(j, 2k + j)$, so daß

$$w^*(j, k) = P(\tfrac{1}{2}(k - j), j) = \frac{(\vartheta\varrho)^{(k-j)/2}}{(1 + \vartheta\varrho)^k} \binom{k}{(k - j)/2} \frac{j}{k}\,. \tag{25}$$

Die Wahrscheinlichkeiten $v(j, k)$ konvergieren bei $m \to \infty$ natürlich alle gegen Null.

Die Aufgabe, die Konvergenz und das Übereinstimmen der Grenzwerte mit den für das Wartesystem ohne Verluste bekannten Ergebnissen weiter zu verifizieren, überlassen wir dem Leser.

Literaturverzeichnis

[1] *W. Feller:* An Introduction to Probability Theory and its Applications, I. J. Wiley, New York 1961.

[2] *F. Ferschl:* Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse. Physica-Verlag, Wien—Würzburg 1964.

[3] *H. Störmer:* Wartezeitlenkung in handbedienten Vermittlungsanlagen. Archiv der elektrischen Übertragung, 10 (1956), 58—64.

[4] *F. Zítek:* Příspěvek k theorii smíšených systémů hromadné obsluhy. Aplikace matematiky, 2 (1957), 154—159.

[5] *F. Zítek*: Über die Kundenreihenfolge in Bedienungssystemen. Aplikace matematiky, 15 (1970) 356—383.

[6] *F. Zítek:* Über die Kundenreihenfolge in Systemen $M/E_r/1$. Aplikace matematiky, 17 (1972), 191—208.
[7] *F. Zítek:* Sur l'ordre des clients dans les systèmes d'attente. Proceedings of the Fourth Braşov Conference on Probability Theory. Editura Academiei R.S.R., Bucureşti 1973, 607—619.

Souhrn

SMÍŠENÝ FRONTOVÝ REŽIM V SYSTÉMECH HROMADNÉ OBSLUHY S OMEZENOU DÉLKOU FRONTY

FRANTIŠEK ZÍTEK

Pojem smíšeného frontového režimu (viz [5], [7]) je zde rozšířen pro případ systému $M/M/n$ s omezenou frontou, kde dochází ke ztrátám zákazníků, a to jednak ihned v okamžiku příchodu do systému, jednak až po určité době čekání, když je zákazník z fronty vytlačen později přišlými zákazníky, kteří se však (při smíšeném režimu) zařadí do fronty před něho. Jsou nalezeny pravděpodobnosti ztráty, rozložení doby čekání a rozložení počtu aktivních i pasivních předstihů (srv. [5], [6], [7]) zákazníka v stabilisovaném systému.

Anschrift des Verfassers: Dr *František Zítek*, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.