Vlado Čech

Algoritmy. 33. Krylov. Určenie charakteristického polynomu matice Krylovovou metódou

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 6, 465–468

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103503`

ALGORITMY

33. KRYLOV

URČENIE CHARAKTERISTICKÉHO POLYNÓMU MATICE KRYLOVOVOU METÓDOU

VLADO ČECH, MFFUK, Praha

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica rádu n, $\mathbf{v}$ nenulový vektor. Nech vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{Av}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}$ sú lin. nezávislé, ale spolu s vektorom $\mathbf{A}^k\mathbf{v}$ nech sú už lin. závislé. Uvažujme sústavu k lin. rovníc s k neznámymi $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{v} + b_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v} + \ldots + b_0\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Ak $k = n + 1$, tak riešením sústavy (1) sú koeficienty charakteristického polynómu $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$ matice $\mathbf{A}(b_n = 1)$.

Ak $k \leqq n$, dôjde k *štiepeniu*: podľa [2] riešením sústavy (1) sú koeficienty niektorého deliteľa char. polynómu a existuje matica rádu $n - k + 1$, s ktorou sa postup zopakuje. Tak určíme niekoľko deliteľov char. polynómu (takých, že ich vynásobením vznikne char. polynóm), tj. miesto polynómu stupňa n určíme najmenej dva polynómy nižších stupňov, čo je výhodné pre neskoršie hľadanie koreňov.

Procedúra pracuje s pevným počiatočným vektorom $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ a k štiepeniu dochádza vždy, ak je matica blokovodiagonálna, alebo vznikla z blokovodiagonálnej matice permutáciou.

procedure *KRYLOV*(n, A, m, eps, P, Q, *INVMAT*, *SUCIN*);
value n;
integer m, n; **real** eps; **integer array** P; **array** Q;
procedure *INVMAT*, *SUCIN*;
comment n ... rád matice

A ... pole, deklarované v hlavnom programe s rozmermi $1 : n$, $1 : n$, obsahuje prvky matice, prácou procedúry sa jeho pôvodný obsah zničí

m ... výstupný parameter, udáva, koľko zložiek je obsadených v poliach P, Q

eps ... ak $|x| \leqq eps$, tak reálne x pokladáme za nulové, voľba eps závisí na počítači

P, Q ... výstupné parametre, polia, deklarované v hlavnom programe s rozmerom $1 : 2 \times n$, zložka $P[i]$ obsahuje celé číslo, udávajúce pri ktorej mocnine premennej v char. polynóme (či jeho deliteli) stojí koeficient uložený v $Q[i]$ ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$), údaje o polynóme sú uložené v poradí od najvyššej mocniny po abs. člena a ak došlo k štiepeniu, tak údaje o príslušných deliteľoch char. polynómu sú uložené v poliach P, Q bezprostredne za sebou (pozri príklad)

INVMAT ... procedúra na inverziu matice s parametrami n (**integer**), A, B (**array** $A, B[1 : n, 1 : n]$) v tomto poradí, určí inverznú maticu k matici A a uloží ju do B

SUCIN ... procedúra na násobenie matíc s parametrami p, q, r (**integer**), A, B, C (**array** $A[1 : p, 1 : q]$, $B[1 : q, 1 : r]$, $C[1 : p, 1 : r]$) v tomto poradí, vynásobí maticu A maticou B a výsledok uloží do C;

```
begin   integer i, j, l, r, s; real w;
        integer array Z[1 : n]; array B[1 : n + 1, 1 : n], K, V[1 : n, 1 : n + 1];
        m := Z[1] := 1;
    LA: for i := 2 step 1 until n do
          begin Z[i] := i; V[i, 1] := 0 end;
        V[1, 1] := 1.0; j := 1;
    LB: l := j; j := j + 1;
        for i := 1 step 1 until n do
          begin V[i, j] := 0;
                for r := 1 step 1 until n do
                  V[i, j] := A[i, r] × V[r, l] + V[i, j];
                B[j, i] := V[i, j]
          end;
        for i := l step −1 until 2 do
          begin w := B[j, i]; B[j, i] := B[j, Z[i]]; B[j, Z[i]] := w end;
        K[1, j] := −B[j, 1];
        for i := 2 step 1 until l do
          begin K[i, j] := −B[j, i]/B[i, i];
                for r := i + 1 step 1 until n do
                  B[j, r] := K[i, j] × B[i, r] + B[j, r]
          end;
        for i := j step 1 until n do
          if abs (B[j, i]) > eps then go to LC;
        go to LD;
```

```
LC: if i = j then go to LB;
    r := Z[j]; Z[j] := Z[i]; Z[i] := r;
    for r := 2 step 1 until j do
      begin w := B[r, j]; B[r, j] := B[r, i]; B[r, i] := w end;
    go to LB;

LD: for r := 2 step 1 until l do
      begin K[r, 2] := 0;
            for s := j - r + 1 step 1 until l do
              K[r, 2] := K[j - r, s] × K[s, j] + K[r, 2]
      end;

    for r := 3 step 1 until l do
      for s := 3 step 1 until r do
        begin K[r, s] := 0;
              for i := j - r + 1 step 1 until j - s + 1 do
                K[r, s] := K[j - r, i] × K[j - i, s - 1] + K[r, s]
      end;

    P[m] := l; Q[m] := 1.0; m := m + 1;
    for i := j - 2 step -1 until 0 do
      begin P[m] := i; Q[m] := K[i + 1, j]; s := l - i;
            for r := 2 step 1 until s do Q[m] := Q[m] + K[s, r];
            m := m + 1
      end;

    if l = n then go to LE;
    for i := j step 1 until n do
      begin for r := 1 step 1 until n do K[i, r] := 0;
            K[i, i] := 1.0
      end;

    for i := j step 1 until n do
      for r := 1 step 1 until n do
        V[r, i] := B[r, i - l] := K[i, Z[r]];

    INVMAT(n, V, K); SUCIN(n, n, n, K, A, V); SUCIN(n, n, n - l, V, B, K);
    n := n - l;
    for i := 1 step 1 until n do
      for r := 1 step 1 until n do A[i, r] := K[l + i, r];
    go to LA;

LE: m := m - 1
end;
```

Príklad: *KRYLOV*(7, *A*, *m*, $_{10}-7$, *P*, *Q*, *INVMAT*, *SUCIN*);

$$\text{matica } A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.0 & 6.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.36 & -0.5 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 2.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 0.4 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 7.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 10.0 & 8.0 & 7.0 \\ 6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 & 10.0 & 9.0 \\ 5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 7.0 & 9.0 & 10.0 \end{pmatrix}$$

výsledok $m = 9$

i	P	Q
1	4	1.00000000
2	3	$-3.09999482_{10}1$
3	2	$2.59984474_{10}1$
4	1	$3.24000000_{10}2$
5	0	$-2.70983642_{10}2$
6	3	1.00000000
7	2	-2.36000000
8	1	7.42000004
9	0	-9.77200004

Teda char. polynóm matice A je súčinom polynómov

$$x^4 - 30.9999482x^3 + 25.9984474x^2 + 324x - 270.983642$$

a

$$x^3 - 2.36x^2 + 7.42000004x - 9.77200004.$$

Spočítanie tohto príkladu (s tlačou matice a výsledkov) trvalo na počítači MINSK 22 4,03 min, kým napr. spočítanie príkladov s maticami 4. rádu bez štiepenia trvalo okolo 50 s.

Rýchlosť procedúry *KRYLOV* je pri štiepení značne ovplyvnená rýchlosťou procedúry *INVMAT*.

Procedúra bola vytvorená v rámci cvičenia z num. matematiky na MFFUK.

Literatúra

[1] *Fadďejev, Fadďejevová:* Numerické metody lin. algebry, SNTL, Praha 1964.

[2] *A. S. Householder:* The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London 1965.

OPRAVA

V algoritmu č. 29 LAGUER, uveřejněném v Aplikacích matematiky 18 (1973) č. 1 na str. 75 ve 4. řádku shora má být 3.50000000 místo 2.50000000. a na str. 74 v 13. řádku shora má být $i := 1$ místo $i :=$ **step**.