

Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Bemerkungen zur Optimierung eines gewissen Iterationsverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 5, 315–324

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103484>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

BEMERKUNGEN ZUR OPTIMIERUNG
EINES GEWISSEN ITERATIONSVERFAHRENS

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 5. October 1972)

Die Arbeiten [3] und [4] befassten sich mit den Problemen der Konvergenz eines gewissen Iterationsverfahrens für das lineare Gleichungssystem

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Diese Arbeit knüpft eng an die Arbeiten [3] und [4] an und befasst sich mit der Bestimmung des Optimalparameters vom Gesichtspunkt der Konvergenzgeschwindigkeit des in den Arbeiten [3], [4] untersuchten Iterationsverfahrens für einige Spezialfälle.

Es wird wieder vorausgesetzt, dass die Matrix \mathbf{B} von der Form $\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$ ist, wo \mathbf{L} und \mathbf{U} die Bedingungen (5) der Arbeit [3] erfüllen. Die Iterationsvorschrift ist dann von der Form

$$(2) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\omega) \mathbf{x}_v + \mathbf{b},$$

wo $\mathbf{T}(\omega)$ die von den Matrizen \mathbf{L} , \mathbf{U} und vom Parameter ω abhängende Matrix ist und die Form

$$\mathbf{T}(\omega) = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{L} + \mathbf{U}]$$

hat. Für $\omega = 0$ geht (wie wir schon wissen) die Formel (2) in die Form

$$\mathbf{x}_{v+1} = (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \mathbf{x}_v + \mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{x}_v + \mathbf{b}$$

über (Jacobi-Verfahren) und für $\omega = 1$ bekommt man die Iterationsformel

$$\mathbf{x}_{v+1} = (\mathbf{E} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}\mathbf{x}_v + \mathbf{b}$$

Die Arbeit [4] befasste sich mit der Frage, für welche Werte des Parameters ω das Iterationsverfahren (2) konvergiert (d. h. wann der Spektralradius $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$ der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$ kleiner als 1 ist). Es wurde dabei vorausgesetzt, dass das ursprüngliche Jacobi-Verfahren konvergiert, d. h. dass $\varrho(\mathbf{B}) = \varrho(\mathbf{T}(0)) < 1$ ist. In der Arbeit [4]

wurde gezeigt, dass immer ein Intervall (a, b) mit $a < 0$, $1 < b$ existiert, sodass für $\omega \in (a, b)$ $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$ ist (siehe Satz 2 in [4]), wobei gilt: $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) \geq \varrho(\mathbf{B}) > \varrho(\mathbf{T}(1))$ für $\omega \leq 0$ (siehe Sätze 1 und 3 in [4]). In der vorliegenden Arbeit geben wir eine Teilantwort auf die Frage über die Lage des Optimalparameters ω_b , d. h. wir geben eine solche Zahl ω_b an, für die $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$ minimal ist. Es ist klar, dass $0 < \omega_b < b$ ist mit $1 < b$.

In der Arbeit [3] wurde der folgende Satz bewiesen, der den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten μ der Matrix \mathbf{B} und den Eigenwerten λ der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$ ausdrückt (siehe Satz 1 in [3]):

Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$, $\omega \neq 0$. Falls $\omega \neq 1$ oder $\omega = 1$, $\lambda \neq 0$ ist und falls die Zahl μ die Beziehung

$$(3) \quad \lambda^p = \mu^p(1 - \omega + \lambda\omega)^k$$

erfüllt, ist μ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} . Falls dagegen μ ein Eigenwert der Matrix \mathbf{B} ist, dann ist jede der Gleichung (3) ($\omega \neq 0$) genügende Zahl λ ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{T}(\omega)$. (Die Zahlen p und k werden durch die Bedingungen (5) der Arbeit [3] gegeben).

Für den Fall, wenn $p = 2$, $k = 1$ ist und wenn für alle Eigenwerte μ_i der Matrix \mathbf{B} die Ungleichungen $\mu_i^2 \geq 0$ gelten, wurde in der Arbeit [3] der Satz 4 bewiesen. Mit dem Fall wenn für alle Werte i $\mu_i^2 \leq 0$ ist, befasst sich der folgende Satz:

1. *Es sei $p = 2$, $k = 1$ und $\mu_i^2 \leq 0$ für alle i . Dann gelten folgende zwei Behauptungen:*

a) *Falls $1 + 1/\varrho^2(\mathbf{B}) < \omega < \frac{1}{2}(1 - 1/\varrho^2(\mathbf{B}))$ ist, ist $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) < 1$.*

b) *Der Parameter ω_b , für den $\varrho(\mathbf{T}(\omega))$ minimal ist, liegt im Intervall $(0,1)$ und es gilt*

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \varrho^2(\mathbf{B}))}}.$$

Dabei ist

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \frac{\varrho^2(\mathbf{B})}{1 + \sqrt{(1 - \varrho^2(\mathbf{B}))}}.$$

Den Beweis dieses Satzes werden wir nicht durchführen, da er vollständig dem Beweis des Satzes 4 in der Arbeit [3] entspricht.

Nun werden wir uns mit weiteren Spezialfällen befassen. Es gilt der folgende Satz:

2. *Es sei p eine ungerade Zahl, $k = 1$ und $\mu_i^p \geq 0$ für alle i . Dann ist der Optimalparameter ω_b gleich 1 und es gilt*

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \varrho(\mathbf{T}(1)) = \varrho^{p/(p-1)}(\mathbf{B}).$$

Bemerkung. In diesem Falle tritt die schnellste Konvergenz für das Gauss-Seidelsche Iterationsverfahren ein.

Beweis. Für einen festgewählten Wert i hat die Gleichung (3) die Form

$$(4) \quad \lambda^p - \mu_i^p(1 - \omega + \lambda\omega) = 0.$$

Für $\omega = 1$ ist die Gleichung (4) von der Form $\lambda^p - \mu_i^p\lambda = 0$, sodass sie eine reelle Wurzel $\lambda = 0$ hat. Die übrigen Nullstellen sind dabei $(p - 1)$ -ste Wurzeln der Zahl μ_i^p . Man kann leicht beweisen, dass für $\omega < 1$ die Gleichung (4) eine reelle Wurzel $\lambda < -|\mu_i|^{p/(p-1)}$ und für $\omega > 1$ eine reelle Wurzel $\lambda > |\mu_i|^{p/(p-1)}$ hat. Für $\omega < 1$ ist nämlich der Wert der linken Seite der Gleichung (4) für $\lambda = -|\mu_i|^{p/(p-1)}$ positiv und die Gleichung muss mit Rücksicht auf ihren ungeraden Grad eine reelle Wurzel kleiner als die Zahl $-|\mu_i|^{p/(p-1)}$ haben. Ähnlicherweise für $\omega > 1$.

Es ist also $\omega_b = 1$ und $\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \varrho(\mathbf{T}(1)) = \varrho^{p/(p-1)}(\mathbf{B})$, womit der Satz 2 bewiesen ist.

3. Es sei $p = 3$, $k = 1$ und $\mu_i^3 \leq 0$ für alle i . Dann ist der Optimalparameter die Zahl

$$\omega_b = \frac{\varrho^3(\mathbf{B}) + (1 - \sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))^3})}{\varrho^3(\mathbf{B}) \sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))}}$$

(es ist offensichtlich $0 < \omega_b < 1$) und für den optimalen Spektralradius gilt

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = \sqrt{(2(\sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))} - 1))} < \varrho^{3/2}(\mathbf{B})$$

(es ist also $\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) < \varrho(\mathbf{T}(1))$).

Beweis. Es sei $\mu_i^3 < 0$. Für $\omega = 1$ ist dann die Gleichung (4) von der Form $\lambda^3 - \mu_i^3\lambda = 0$, sodass sie eine reelle Wurzel $\lambda_1 = 0$ und zwei komplex adjungierte Wurzeln $\lambda_{2,3} = \pm i|\mu_i|^{3/2}$ hat. Es ist also $\varrho(\mathbf{T}(1)) = \max_i |\mu_i|^{3/2} = \varrho^{3/2}(\mathbf{B})$.

Es sei nun $\omega \neq 1$ (wie wir schon wissen, können wir uns auf das Intervall $\omega > 0$ beschränken). Die Gleichung (4) hat dann die Form

$$(5) \quad \lambda^3 - \mu_i^3\lambda\omega - \mu_i^3(1 - \omega) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau eine reelle Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon \neq 0$ (für $\omega > 1$ ist $\varepsilon > 0$ und für $\omega < 1$ ist $\varepsilon < 0$) und zwei komplex adjungierte Wurzeln λ_2, λ_3 ($\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$). Es gilt die Beziehung

$$\mu_i^3(1 - \omega) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \varepsilon|\lambda_2|^2 = \varepsilon|\lambda_3|^2$$

d.h.

$$(6) \quad |\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\mu_i^3(1 - \omega)}{\varepsilon}.$$

Da ε die Wurzel der Gleichung (5) ist, gilt ferner $\varepsilon^3 - \mu_i^3 \varepsilon \omega - \mu_i^3(1 - \omega) = 0$, d. h.

$$(7) \quad \omega = \frac{\mu_i^3 - \varepsilon^3}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)}$$

(der Fall $\varepsilon = 1$ ist ausgeschlossen, da dann $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) \geq 1$ gelten würde). Aus (6) und (7) folgt also

$$(8) \quad |\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\varepsilon^2 - \mu_i^3}{1 - \varepsilon}.$$

Für $\omega \neq 1$ sind also die Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (5) die Zahlen

$$|\lambda_1|^2 = \varepsilon^2, \quad |\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\varepsilon^2 - \mu_i^3}{1 - \varepsilon}.$$

Die grösste von diesen Zahlen bezeichnen wir mit $\Lambda(\mu_i, \varepsilon)$. Ferner bezeichnen wir

$$(9) \quad E(\mu_i, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 - \mu_i^3}{1 - \varepsilon}$$

und werden den Verlauf der Funktion $E(\mu_i, \varepsilon)$ im Intervalle $\varepsilon \in (-\infty, 1)$ untersuchen. Man setze $\varepsilon_{\mu_i} = 1 - \sqrt{(1 - \mu_i^3)}$. Es ist offensichtlich $-1 < -|\mu_i|^{3/2} < \varepsilon_{\mu_i} < 0$, da $\mu_i^3 < 0$ ist. Durch Differenzieren der Funktion $E(\mu_i, \varepsilon)$ stellt man leicht fest, dass sie fallend im Intervalle $(-\infty, \varepsilon_{\mu_i})$ und wachsend im Intervalle $(\varepsilon_{\mu_i}, 1)$ ist, sodass sie im Intervalle $(-\infty, 1)$ ihren einzigen Minimalwert im Punkte ε_{μ_i} annimmt, welcher der Zahl

$$(10) \quad E(\mu_i, \varepsilon_{\mu_i}) = \frac{(1 - \sqrt{(1 - \mu_i^3)})^2 - \mu_i^3}{\sqrt{(1 - \mu_i^3)}} = 2(\sqrt{(1 - \mu_i^3)} - 1)$$

gleich ist. Ferner zeigt man leicht, dass im Intervalle $(-|\mu_i|^{3/2}, |\mu_i|^{3/2})$ die Ungleichung

$$(11) \quad \varepsilon^2 \leq E(\mu_i, \varepsilon)$$

gilt.

Es sei nun $|\mu_{i_0}| = \max_i |\mu_i| = -M$ (es ist also $M < 0$). Da $\mu_i^3 \leq 0$ ist für alle i , ist $\mu_{i_0}^3 = M^3 = -\varrho^3(M)$. Um nun den Optimalparameter ω_b festzustellen, muss man offensichtlich den Wert $\varepsilon \in (-|M|^{3/2}, |M|^{3/2})$ suchen, für den der Ausdruck $\max_i \Lambda(\mu_i, \varepsilon)$ minimal ist. Zuerst beweisen wir, dass für alle i und $\varepsilon \in (-|M|^{3/2}, |M|^{3/2})$ die Ungleichung

$$\Lambda(\mu_i, \varepsilon) \leq \Lambda(M, \varepsilon)$$

gilt. Aus (11) folgt vor allem, dass für alle $\varepsilon \in (-|M|^{3/2}, |M|^{3/2})$ die Ungleichung

$$(12) \quad \varepsilon^2 \leq E(M, \varepsilon)$$

gilt. Nach einigen Umformungen und mit Hilfe der Beziehung (9) beweist man ferner, dass für alle i und für $\varepsilon \in \langle -|M|^{3/2}, |M|^{3/2} \rangle$ die Ungleichung

$$(13) \quad E(\mu_i, \varepsilon) \leq E(M, \varepsilon)$$

gilt. Aus (12) und (13) folgt ferner, dass

$$A(\mu_i, \varepsilon) = \max(\varepsilon^2, E(\mu_i, \varepsilon)) \leq \max(\varepsilon^2, E(M, \varepsilon)) = E(M, \varepsilon) = A(M, \varepsilon)$$

für alle i gilt, und es ist also

$$\max_i A(\mu_i, \varepsilon) = A(M, \varepsilon) = E(M, \varepsilon).$$

Nach (10) gilt weiter

$$(14) \quad \min_{\varepsilon \in \langle -|M|^{3/2}, |M|^{3/2} \rangle} \max_i A(\mu_i, \varepsilon) = \min_{\varepsilon} E(M, \varepsilon) = E(M, \varepsilon_M) = 2(\sqrt{(1 - M^3)} - 1) = 2(\sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))} - 1).$$

Nach (7) und (14) ist also

$$\min_{\omega} \varrho(\mathbf{T}(\omega)) = \varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = 2(\sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))} - 1) < \varrho^{3/2}(\mathbf{B}),$$

wo

$$\begin{aligned} \omega_b &= \frac{M^3 - \varepsilon_M^3}{M^3(1 - \varepsilon_M)} = \frac{M^3 - (1 - \sqrt{(1 - M^3)})}{M^3 \sqrt{(1 - M^3)}} = \\ &= \frac{\varrho^3(\mathbf{B}) + [1 - \sqrt{(1 + \varrho^3(\mathbf{B}))}]^3}{\varrho^3(\mathbf{B}) \sqrt{[1 + \varrho^3(\mathbf{B})]}} < 1, \end{aligned}$$

ist, was zu beweisen war.

Zum Schluss beweisen wir noch die folgende Behauptung:

4. Es sei $p = 3, k = 2$ und $\mu_i^3 \geq 0$ für alle i . Dann ist der Optimalparameter ω_b die einzige Lösung der Gleichung

$$4\varrho^3(\mathbf{B}) \omega^3 - 27(\omega - 1) = 0$$

die im Intervalle $(1, \frac{3}{2})$ liegt, und der optimale Spektralradius gleicht der Zahl

$$\varrho(\mathbf{T}(\omega_b)) = 9 \left(\frac{\omega_b - 1}{\omega_b} \right)^2.$$

Beweis. Ähnlicherweise wie im Beweise von Satz 3 wird vorausgesetzt, dass $\omega > 0$ ist. Für $\omega = 1$ und für ein festgewähltes i ist die Gleichung (3) von der Form $\lambda^3 - \mu_i^3 \lambda^2 = 0$, sodass sie eine zweifache Wurzel $\lambda = 0$ und eine reelle Wurzel $\lambda = \mu_i^3$ hat. Es ist also $\varrho(\mathbf{T}(1)) = \max_i \mu_i^3 = \varrho^3(\mathbf{B})$.

Es sei $0 < \omega < 1$ und $\mu_i^3 > 0$. Dann ist die Gleichung (3) von der Form

$$(15) \quad \lambda^3 - \mu_i^3(1 - \omega + \lambda\omega)^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat offensichtlich eine reelle Wurzel $\lambda > \mu_i^3$, da für $\lambda = \mu_i^3$ ihre linke Seite der Zahl $\mu_i^3(1 - \omega)(\mu_i^6 - 1) < 0$ gleich. Für $0 < \omega < 1$ ist also $\varrho(\mathbf{T}(\omega)) > \varrho(\mathbf{T}(1))$, sodass der Optimalparameter ω_b in diesem Intervalle nicht liegen kann.

Wir können uns also auf das Intervall $\omega > 1$ beschränken. Es sei $\mu_i^3 > 0$. Die Gleichung (15) schreiben wir in der Form

$$\lambda^3/\mu_i^3 = (1 - \omega + \lambda\omega)^2$$

und definieren die Funktionen $m(\mu_i, \lambda) = \lambda^3/\mu_i^3$, $g(\omega, \lambda) = (1 - \omega + \lambda\omega)^2$. Die graphische Darstellung der Funktion m ist eine Parabel dritten Grades mit dem Scheitelpunkt $[0,0]$ und die Funktion g stellt eine Parabel zweiten Grades dar, die durch den Punkt $[1,1]$ geht, die Achse λ im Punkte $(\omega - 1)/\omega$ berührt und deren Tangente im Punkte $\lambda = 1$ den Anstieg 2ω hat.

Man untersuche jetzt die Frage, für welche Werte $\omega > 1$ sich die Graphen beider Funktionen m und g berühren. Wenn man einen solchen Wert mit ω_t bezeichnet und wenn λ_t der entsprechende Berührungspunkt ist, müssen gleichzeitig die Bedingungen

$$(16) \quad \lambda_t^3/\mu_i^3 = (1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t)^2,$$

$$(17) \quad 3\lambda_t^2/\mu_i^3 = 2\omega_t(1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t)$$

erfüllt sein. Wenn man die erste bzw. zweite Gleichung durch die Zahl $2\omega_t$ bzw. $1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t$ multipliziert und die resultierenden Gleichungen addiert, bekommt man die Gleichung

$$(18) \quad (3\lambda_t^2/\mu_i^3)(1 - \omega_t + \lambda_t\omega_t) = 2\omega_t(\lambda_t^3/\mu_i^3).$$

Diese Gleichung ist vor allem für $\lambda_t = 0$ erfüllt (dann ist allerdings nach (16) $1 - \omega_t = 0$ oder $\omega_t = 1$, was ausgeschlossen wurde). Solange $\lambda_t \neq 0$ ist, ist die Gleichung (18) erfüllt, wenn

$$(19) \quad 3 - 3\omega_t + \lambda_t\omega_t = 0$$

gilt. Der Fall $\lambda_t = 3$ ist mit Rücksicht auf (18) ausgeschlossen. Es ist also $\lambda_t - 3 \neq 0$ und aus (19) folgt dann

$$(20) \quad \omega_t = \frac{3}{3 - \lambda_t}.$$

Nach Einsetzen von (20) in (16) bekommt man leicht die Gleichung

$$(21) \quad f(\lambda_t) = (\lambda_t - 3)^2 \lambda_t - 4\mu_i^3 = 0.$$

Da $f(0) = -4\mu_i^3 < 0$, $f(1) = 4 - 4\mu_i^3 > 0$, $f(3) = -4\mu_i^3 < 0$ ist, hat die Gleichung (21) eine reelle Wurzel in den Intervallen $(0,1)$, $(1,3)$ und $(3, \infty)$. Aus (20) folgt ferner, dass der Wurzel $\lambda_{t_1} \in (0,1)$ (man bezeichnet sie mit $\lambda_{t_1}(\mu_i)$) der Parameterwert $\omega_{t_1}(\mu_i) \in (1, \frac{3}{2})$ entspricht. Ähnlicherweise entspricht der Wurzel $\lambda_{t_2}(\mu_i) \in (1,3)$ bzw. $\lambda_{t_3}(\mu_i) \in (3, \infty)$ der Parameterwert $\omega_{t_2}(\mu_i) \in (\frac{3}{2}, \infty)$ bzw. $\omega_{t_3}(\mu_i) \in (-\infty, 0)$. Im Intervalle $\omega > 1$ liegen also nur die Werte $\omega_{t_1}(\mu_i)$ und $\omega_{t_2}(\mu_i)$. Um nun den Optimalparameter ω_b zu bestimmen, werden wir zuerst die Frage lösen, für welchen Wert $\omega > 1$ das Maximum der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) minimal ist. Es gilt dabei, dass $1 < \omega_{t_1}(\mu_i) < \omega_{t_2}(\mu_i)$.

Für $\omega \geq \omega_{t_2}(\mu_i)$ stellt man leicht fest, dass die Gleichung (15) eine reelle Wurzel hat, die grösser oder gleich der Zahl $\lambda_{t_2}(\mu_i) > \lambda_{t_1}(\mu_i) > 1$ ist. Dazu genügt zu beweisen, dass für $\omega \geq \omega_{t_2}(\mu_i)$ und $\lambda = \lambda_{t_2}(\mu_i)$ die linke Seite der Gleichung (15) nichtpositiv ist, d. h. dass $\lambda_{t_2}^3(\mu_i) - \mu_i^3(1 - \omega + \lambda_{t_2}(\mu_i)\omega)^2 \leq 0$ gilt. Das folgt aus der Tatsache, dass für $\omega = \omega_{t_2}(\mu_i)$ die Gleichheit eintritt und dass die Ableitung der Funktion auf der linken Seite der Ungleichung der negativen Zahl $-2\mu_i^3[\omega(\lambda_{t_2}(\mu_i) - 1) + 1]$ gleicht. Wir können uns also auf das Intervall $1 < \omega < \omega_{t_2}(\mu_i)$ beschränken. Zur Abkürzung werden wir im weiteren λ_{t_i} und ω_{t_i} statt $\lambda_{t_i}(\mu_i)$ und $\omega_{t_i}(\mu_i)$ schreiben.

Es sei jetzt $1 < \omega < \omega_{t_1}$. Wir werden beweisen, dass dann die Gleichung (15) eine reelle Wurzel $\lambda > \lambda_{t_1}$ besitzt. Es genügt zu beweisen, dass die linke Seite dieser Gleichung für $\lambda = \lambda_{t_1}$ negativ ist. Würde die umgekehrte Ungleichung $\lambda_{t_1}^3 - \mu_i^3(1 - \omega + \lambda_{t_1}\omega)^2 \geq 0$ gelten, würde mit Rücksicht auf (16) $\omega_{t_1} \leq \omega$ gelten, was aber ein Widerspruch ist.

Nach einer Zusammenfassung der höher angeführten Fälle bekommt man die Behauptung, dass der Maximalwert der Quadraten der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) für $\omega \in (0, \omega_{t_1})$ und $\omega \in (\omega_{t_2}, \infty)$ grösser als die Zahl $|\lambda_{t_1}|^2$ ist. Es bleibt der Fall zu untersuchen, wenn $\omega_{t_1} \leq \omega < \omega_{t_2}$ ist.

Es sei zuerst $\omega = \omega_{t_1}$. Wir beweisen jetzt, dass der Maximalwert der Quadraten der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) der Zahl $|\lambda_{t_1}|^2$ gleicht. Aus (16) und (17) folgt, dass die Gleichung (15) für $\omega = \omega_{t_1}$ eine zweifache reelle Wurzel λ_{t_1} und eine weitere reelle Wurzel $\varepsilon_{t_1}(\mu_i)$ (im weiteren schreiben wir kurz ε_{t_1}) hat. Aus der Beziehung $\mu_i^3(1 - \omega_{t_1})^2 = \lambda_{t_1}^2 \varepsilon_{t_1}$ folgt, dass

$$(22) \quad \varepsilon_{t_1} = \frac{\mu_i^3(1 - \omega_{t_1})^2}{\lambda_{t_1}^2}$$

ist. Es gilt dabei, dass $\varepsilon_{t_1} < \lambda_{t_1}$ ist. Wenn nämlich die umgekehrte Ungleichung gelten würde, würde nach (22) $\lambda_{t_1}^3 - \mu_i^3(1 - \omega_{t_1})^2 \leq 0$ gelten und nach (16) würde ferner $\mu_i^3 \lambda_{t_1}^2 \omega_{t_1}^2 - 2\mu_i^3(1 - \omega_{t_1}) \lambda_{t_1} \omega_{t_1} \leq 0$ gelten. Aus dieser Ungleichung und aus (20) würde nach Umformungen die Ungleichung $\lambda_{t_1} \leq 0$ folgen, was ein Widerspruch ist; dadurch ist die Behauptung bewiesen.

Es sei jetzt $\omega_{t_1} < \omega < \omega_{t_2}$. Da die linke Seite der Gleichung (15) für $\lambda = 0$ negativ und für $\lambda = (\omega - 1)/\omega$ ($0 < (\omega - 1)/\omega < 1$) positiv ist, hat die Gleichung (15)

eine reelle Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon < (\omega - 1)/\omega < 1$ (ε hängt allerdings von μ_i und ω ab). Das ist aber die einzige reelle Wurzel im Intervalle $(0, (\omega - 1)/\omega)$, da die Funktion m hier wachsend und die Funktion g fallend ist. Es ist offensichtlich $0 < \varepsilon_{t_1} < \varepsilon < \varepsilon_{t_2} < 1$, wo ε_{t_2} die einzige reelle Wurzel der Gleichung (15) für $\omega = \omega_{t_2}$ bezeichnet. Die Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon$ ist ferner die einzige Wurzel der Gleichung (15). Das kann man folgenderweise beweisen: Die Diskriminante der Gleichung (15) (das ist eine Gleichung dritten Grades) gleicht der Zahl $4\mu_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1)$. Die Zahlen ω_{t_1} , ω_{t_2} und ω_{t_3} sind ferner die reellen Wurzeln der Gleichung $4\mu_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1) = 0$ mit Rücksicht auf die Beziehungen (20) und (21). Da $\omega_{t_3} < \omega_{t_1} < \omega_{t_2}$ ist, muss für $\omega_{t_1} < \omega < \omega_{t_2}$ die Ungleichung $4\mu_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1) < 0$ gelten. Da die Diskriminante der kubischen Gleichung (15) negativ ist, muss diese Gleichung für $\omega_{t_1} < \omega < \omega_{t_2}$ ausser der reellen Wurzel $\lambda_1 = \varepsilon$ noch zwei komplex adjungierte Wurzeln λ_2, λ_3 ($\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$) besitzen, die für $\omega \rightarrow \omega_{t_1}$ offensichtlich in die zweifache Wurzel λ_{t_1} übergehen.

Nun gilt die Beziehung $\mu_i^3(1 - \omega)^2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \varepsilon|\lambda_2|^2 = \varepsilon|\lambda_3|^2$, d. h.

$$(23) \quad |\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = \frac{\mu_i^3(1 - \omega)^2}{\varepsilon}.$$

Da ε eine Wurzel der Gleichung (15) ist, gilt die Beziehung

$$\varepsilon^3 - \mu_i^3\varepsilon^2\omega^2 - 2\mu_i^3\varepsilon\omega(1 - \omega) - \mu_i^3(1 - \omega)^2 = 0$$

d. h. (mit Rücksicht auf $\varepsilon \neq 1$)

$$\omega^2 - \frac{2}{1 - \varepsilon}\omega + \frac{\mu_i^3 - \varepsilon^3}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)^2} = 0.$$

Die quadratische Gleichung für ω hat die Wurzeln

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^3}{\mu_i^3}\right)} \right) = \frac{\mu_i^3 \pm \sqrt{(\varepsilon^3 \mu_i^3)}}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)}.$$

Da die Wurzel ε , wie wir schon wissen, im Intervalle $(0, (\omega - 1)/\omega)$ liegt, kommt nur die Wurzel

$$(24) \quad \omega = \frac{\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon^3 \mu_i^3)}}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)}$$

in Betracht. (Für die zweite Wurzel gilt nämlich die Ungleichung $(\omega - 1)/\omega < \varepsilon$, was nicht möglich ist.) Aus (23) und (24) folgt

$$(25) \quad |\lambda_2|^3 = |\lambda_3|^3 = \frac{\varepsilon(\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon \mu_i^3)})^2}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)^2}.$$

Man führe folgende Bezeichnungen an

$$(26) \quad E(\mu_i, \varepsilon) = \frac{\varepsilon(\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon\mu_i^3)})^2}{\mu_i^3(1 - \varepsilon)^2}$$

und bezeichne den Maximalwert der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) mit $A(\mu_i, \varepsilon)$. Es ist also

$$A(\mu_i, \varepsilon) = \max(\varepsilon^2, E(\mu_i, \varepsilon)).$$

Untersucht man nun den Verlauf der Funktion $E(\mu_i, \varepsilon)$ im Intervalle $\langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2} \rangle$ (das dem Intervalle $\omega_{t_1} \leq \omega < \omega_{t_2}$ entspricht), ist diese Funktion im Intervalle $(0, 1)$ (und umso mehr im Intervalle $\langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2} \rangle$) wachsend, wie man leicht durch Differenzieren der Funktion E feststellt, und es gilt ferner, dass

$$(27) \quad \varepsilon^2 < E(\mu_i, \varepsilon)$$

ist (aus der Ungleichung $\varepsilon^2 \geq E(\mu_i, \varepsilon)$ und aus (26) folgt nämlich die Ungleichung $\varepsilon^2(\varepsilon - 2) > \mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon\mu_i^3)}$, was zu einem Widerspruch führt, da $\varepsilon - 2 < 0$ ist).

Da für $\omega \rightarrow \omega_{t_1}$ die komplex adjungierten Wurzeln λ_2, λ_3 in die zweifache Wurzel λ_{t_1} übergehen und $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{t_1}$, gilt offensichtlich nach (25), dass

$$(28) \quad E(\mu_i, \varepsilon_{t_1}) = \frac{\varepsilon_{t_1}(\mu_i^3 + \sqrt{(\varepsilon_{t_1}\mu_i^3)})^2}{\mu_i^3(1 - \varepsilon_{t_1})^2} = \lambda_{t_1}^2$$

ist. Im Intervalle $\langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2} \rangle$, das dem Intervalle $\langle \omega_{t_1}, \omega_{t_2} \rangle$ entspricht, gelten nach (27) und (28) die Beziehungen

$$\min_{\varepsilon \in \langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2} \rangle} A(\mu_i, \varepsilon) = \min_{\varepsilon \in \langle \varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2} \rangle} E(\mu_i, \varepsilon) = E(\mu_i, \varepsilon_{t_1}) = \lambda_{t_1}^2.$$

Der Maximalwert der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln der Gleichung (15) nimmt also im Intervalle $\omega_{t_1} \leq \omega < \omega_{t_2}$ für $\omega = \omega_{t_1}$ sein Minimum an, das der Zahl $\lambda_{t_1}^2$ gleicht.

Es sei jetzt $|\mu_{i_0}| = \max_i |\mu_i| = M$. Es ist also $\mu_{i_0}^3 = M^3 = \varrho^3(\mathbf{B})$. Man untersucht nun die Gleichung (15), wo $\mu_i = \mu_{i_0}$ ist, d. h. die Gleichung

$$\lambda^3 - M^3(1 - \omega + \lambda\omega)^2 = 0.$$

Der Maximalwert der Quadrate der Absolutbeträge der Wurzeln dieser Gleichung hat, wie wir schon wissen, sein Minimum im Punkte $\omega_{t_1}(M)$, und dieses Minimum gleicht der Zahl $\lambda_{t_1}^2(M)$. Wir zeigen nun, dass für den der Zahl $\omega_{t_1}(M)$ entsprechenden Wert $\varepsilon_{t_1}(M)$ die Ungleichung $A(\mu_i, \varepsilon_{t_1}(M)) \leq \lambda_{t_1}^2(M)$ für alle i gilt. Aus (21) folgt nämlich, dass für alle i $\lambda_{t_1}(\mu_i) \leq \lambda_{t_1}(M)$ ist. Aus (20) folgt ferner, dass für alle i $\omega_{t_1}(\mu_i) \leq \omega_{t_1}(M)$ ist. Aus (22) und (20) folgt nun, dass $\varepsilon_{t_1}(\mu_i) = \frac{1}{9}(\mu_i^3 \omega_{t_1}^2(\mu_i))$ ist; d. h. es gilt

$$(29) \quad \varepsilon_{t_1}(\mu_i) \leq \varepsilon_{t_1}(M)$$

für alle i . Ferner gilt für alle i die Ungleichung

$$(30) \quad E(\mu_i, \varepsilon_{t_i}(M)) \leq E(M, \varepsilon_{t_i}(M)).$$

Wenn nämlich für irgendein i die umgekehrte Ungleichung gelten würde, würde man aus (26) nach Umformungen die Ungleichung

$$\mu_i^3 + 2\sqrt{(\varepsilon_{t_i}(M)\mu_i^3)} > M^3 + 2\sqrt{(\varepsilon_{t_i}(M)M^3)}$$

bekommen, was ein Widerspruch ist, da $\mu_i^3 \leq M^3$ für alle i gilt.

Aus (29) und (30) folgt nun, dass

$$A(\mu_i, \varepsilon_{t_i}(M)) = E(\mu_i, \varepsilon_{t_i}(M)) \leq E(M, \varepsilon_{t_i}(M)) = \lambda_{t_i}^2(M)$$

ist für alle i . Der Optimalparameter gleicht also der Zahl $\omega_b = \omega_{t_i}(M)$, was die einzige reelle Wurzel der Gleichung $4M_i^3\omega^3 - 27(\omega - 1) = 0$ im Intervalle $(0, \frac{3}{2})$ ist, und der optimale Spektralradius ist dann die Zahl $\lambda_{t_i}^2(M)$ und nach (20) ist $\lambda_{t_i}^2(M) = 9((\omega_{t_i}(M) - 1)/\omega_{t_i}(M))^2$. Dadurch ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] Kjellberg, G.: On the successive over-relaxation method for cyclic operators. Numerische Math., 3, 1961, 87–91.
- [2] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC, 1962.
- [3] Šisler, M.: Über ein Iterationsverfahren für zyklische Matrizen. Aplikace Matematiky, 17, 1972, 225–233.
- [4] Šisler, M.: Über die Konvergenz eines gewissen Iterationsverfahrens für zyklische Matrizen. Aplikace matematiky, 18, 1973, 89–98.

Souhrn

POZNÁMKY K OPTIMALIZACI JISTÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

Práce se zabývá jistou iterační metodou pro řešení soustavy lineárních rovnic s cyklickou maticí, která byla definována a zkoumána v pracích [3] a [4] téhož autora. Iterační předpis je tvaru $\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{T}(\omega)\mathbf{x}_v + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{T}(\omega)$ je jistá matice závislá na reálném parametru ω . Pro $\omega = 0$ přechází tato metoda v Jacobiho a pro $\omega = 1$ v Gauss-Seidelovu metodu. Práce se zabývá optimalisací této iterační metody v jistých speciálních případech. Optimální parametr, tj. parametr ω , pro který je spektrální poloměr matice $\mathbf{T}(\omega)$ minimální, je vyjádřen jako funkce spektrálního poloměru matice $\mathbf{T}(0)$ odpovídající Jacobiho metodě.

Anschrift des Verfassers: Dr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1.