Aplikace matematiky

Petr Škoda; Jiří Neuberg

Algoritmy. 30. BRYAN. Bryanova metoda pro výpočet charakteristického polynomu matice

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 2, 137–139

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103461`

30. BRYAN

BRYANOVA METODA PRO VÝPOČET CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU MATICE

Petr Škoda, 120 00 Praha 2, Sokolská 29

Jiří Neuberg, 100 00 Praha 10, 28. pluku 56

Bryanova metoda se používá pro výpočet koeficientů charakteristického polynomu matice. Ukažme v krátkosti postup.

Mějme reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

kde $1 \leqq m \leqq n$. Předpokládejme, že známe charakteristický polynom $\Phi_m(\lambda)$, příslušný matici $\mathbf{A}_m$, řádu m. Zapišme $\mathbf{A}_{m+1}$ ve tvaru:

$$\mathbf{A}_{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m, & a_m \\ a_m^*, & \alpha_m \end{pmatrix}$$

kde α_m je číslo a a_m, a_m^* jsou vektory dimense m. Nechť $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1})^A$ je adjungovaná matice k matici $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1})$. Tedy platí:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1})(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1})\, \mathbf{I} \tag{1}$$

Napišme nyní $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1})^A$ ve vroubeném tvaru.

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1})^A = \begin{pmatrix} F_m(\lambda), & f(\lambda) \\ f_m^*(\lambda), & \Phi_m(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

kde $f_m(\lambda)$ je vektor polynomů řádu nejvýše $m - 1$. Užitím vztahů (1) a (2) odvodíme rovnice:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_m) f_m(\lambda) - a_m \Phi_m(\lambda) = 0 \tag{3}$$

$$-a_m^* f_m(\lambda) + (\lambda - \alpha_m)\, \Phi_m(\lambda) = \Phi_{m+1}(\lambda)\,, \tag{4}$$

kde z definice charakteristického polynomu máme det $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{m+1}) = \Phi_{m+1}(\lambda)$. Rovnici (3) je výhodné přepsat ještě na tvar

$$(3) \qquad \lambda f_m(\lambda) = a_m \Phi_m(\lambda) + \mathbf{A}_m f_m(\lambda) .$$

$\mathbf{A}_m$ a a_m jsou nezávislé na λ, $\Phi_m(\lambda)$ je stupně m a známý předem (v rekurenci $\Phi_1(\lambda) = \lambda - a_{11}$), prvky $f_m(\lambda)$ jsou polynomy stupně nejvýše $m - 1$. Odtud plyne, že porovnáním koeficientů u stejných mocnin λ, lze získat posloupnost vektorů koeficientů v $f_m(\lambda)$, počínaje koeficientem u λ^{m-1}, který je jednoduše a_m. Nalezneme-li tedy takto $f_m(\lambda)$, potom podle vztahu (4) lze určit $\Phi_{m+1}(\lambda)$.

Poznámka. Program byl vypracován v rámci cvičení z numerických metod pro posluchače 3. ročníku na matematicko-fyzikální fakultě v Praze.

```
Procedure BRYAN(n, A, B);
comment n: řád matice A
        A: matice, jejíž charakteristický polynom hledáme
        B: vektor koeficientů charakteristického polynomu B1λ^n + B2λ^(n-1) + ... +
        + Bnλ + B(n+1).
        C: pomocná matice, jejíž prvky jsou koeficienty u složek f(λ);
integer n; real array A, B;
begin real array C[1: n − 1, 1: n − 1];
    integer i, j, k, m; real s, v, r;
    B[1] := 1; B[2] := −A[1,1];
    for m := 1 step 1 until n − 1 do
    begin for i := 1 step 1 until m do
        C[i, 1] := A[i, m + 1] × B[1];
        for j := 2 step 1 until m do
        for i := 1 step 1 until m do
        begin s := 0;
            for k := 1 step 1 until m do
            s := s + A[i, k] × C[k, j − 1];
            C[i, j] := A[i, m + 1] × B[j] + s
        end;
        s := B[2]; B[2] := B[2] − A[m + 1, m + 1] × B[1]; B[m + 2] := 0;
        for i := 3 step 1 until m + 2 do
        begin v := 0;
            for k := 1 step 1 until m do
            v := v + A[m + 1, k] × C[k, i − 2];
            r := B[i]; B[i] := B[i] − A[m + 1, m + 1] × s − v;
            s := r
        end
    end
end BRYAN
```

Kontrolní příklady:

Pro matici

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.42 & 0.54 & 0.66 \\ 0.42 & 1.00 & 0.32 & 0.44 \\ 0.54 & 0.32 & 1.00 & 0.22 \\ 0.66 & 0.44 & 0.22 & 1.00 \end{pmatrix}$$

dává metoda charakteristický polynom

$$f(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4.752\lambda^2 - 2.111856\lambda + 0.286152\,,$$

pro matici

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

vychází charakteristický polynom

$$f(\lambda) = \lambda^4 - 18\lambda^3 + 97\lambda^2 - 180\lambda + 100$$

pro matici

$$\begin{pmatrix} 15 & 11 & 6 & -9 & -15 \\ 1 & 3 & 9 & -3 & -8 \\ 7 & 6 & 6 & -3 & -11 \\ 7 & 7 & 5 & -3 & -11 \\ 17 & 12 & 5 & -10 & -16 \end{pmatrix}$$

jsme obdrželi charakteristický polynom

$$f(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 33\lambda^3 - 51\lambda^2 + 135\lambda + 225$$

Literatura

A. S. Householder: The Theory of matrices in Numerical analysis, 1965

D. K. Faddějev, V. N. Faddějevová: Numerické metody lineární algebry, 1964

J. R. Westlake: A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Eqations.