Aplikace matematiky

Libuše Grygarová

Die Lösbarkeit eines linearen Optimierungsproblems unter Zufügung einer weiteren Restriktionsbedingung

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 5, 352–381,382–387

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103428`

DIE LÖSBARKEIT EINES LINEAREN OPTIMIERUNGSPROBLEMS UNTER ZUFÜGUNG EINER WEITEREN RESTRIKTIONSBEDINGUNG

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen am 7. October 1971)

In den praktischen Anwendungen der Theorie der linearen Optimierung kommen auch solche Fälle in Frage, wo – wegen einer Ausbesserung des fraglichen Models, oder, wegen der Existenz seiner Lösung – zu dem System der ursprünglichen Restriktionsbedingungen eine weitere, bzw. mehrere Restriktionsbedingungen zugefügt werden.

Die vorliegende Arbeit betrifft das Problem der Lösbarkeit eines linearen Optimierungsproblems, das aus einer vorgegebenen linearen Optimierungsaufgabe durch Zufügung einer beliebigen linearen Restriktion entsteht und es wird die Klasse derjenigen zusätzlichen Bedingungen charakterisiert, unter welchen das fragliche erweiterte lineare Optimierungsproblem lösbar ist.

Die in dieser Arbeit erreichten Ergebnisse können – durch den Übergang zu dem entsprechenden dualen Problem – zur Beantwortung der Lösbarkeitsfrage einer gewissen Klasse von linearen parametrischen Optimierungsproblemen, bei denen der Parameter in den Koeffizienten der Matrix der linearen Restriktionen auftritt, angewendet werden. Es handelt sich also um eine Problematik, die bisher in der Literatur in hinreichender Weise nicht untersucht und beantwortet wurde.

Die Arbeit stellt eine qualitative Untersuchung des gestellten Problems dar und ihr Ziel ist die theoretische Lösung dieses Problems. Die Frage einer praktischen Berechnung der Schranken der Koeffizienten der neuen zusätzlichen linearen Bedingung, die den Lösbarkeitsbereich des im obigem Sinne erweiterten linearen Optimierungsproblems bestimmen, wird hier nicht gelöst. Die erreichten theoretischen Ergebnisse weisen in dem betrachteten vereinfachten Falle (mit einer einzigen zusätzlichen Restriktion) auf einen mehr oder weniger komplizierten Charakter des gestellten Problems und dadurch auch auf ähnliche Schwierigkeiten beim Problem der Lösbarkeit von linearen parametrischen Optimierungsproblemen mit dem Parameter in der Koeffizientenmatrix der linearen Restriktionen hin.

1. FORMULIERUNG DES PROBLEMS

Betrachten wir ein lineares festgegebenes Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}! \tag{1.1a}$$

mit der Zielfunktion

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} |c_\alpha| > 0 \tag{1.1b}$$

und mit der Restriktionsmenge

$$\mathfrak{M} = \Big\{\mathbf{x}\in E_n \Big| \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r,\ x_\alpha \geqq 0\,, \tag{1.1c}$$

$$(r = 1, \ldots, m; \alpha = 1, \ldots, n)\Big\} \neq \emptyset\,,$$

wobei

$$\text{der Rang der Matrix } \|a_{r\alpha}\|_{m,n} \text{ gleich } m\,, \tag{1.2}$$

$$1 \leqq m < n \tag{1.3}$$

vorausgesetzt wird. Bezeichnen wir

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}} = \Big\{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M} \,\Big|\, f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}\Big\}\,. \tag{1.4}$$

Die Hyperebene

$$R(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \Big\{\mathbf{x}\in E_n \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha = \mu\Big\} \tag{1.5}$$

sei eine neue zusätzliche Restriktionsbedingung und mit Hilfe dieser Bedingung definieren wir eine neue Restriktionsmenge

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \Big\{\mathbf{x}\in E_n \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r,\ \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha = \mu,\ x_\alpha \geqq 0\,, \tag{1.6}$$

$$(r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\Big\}$$

und das neue Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda},\mu)} \{f(\mathbf{x})\}! \tag{1.7}$$

mit $f(\mathbf{x})$ aus (1.1b). Für jedes $(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1}$ [1]) definieren wir die Mengen

---

[1]) Im Gegensatz zu dem euklidischen Raum E_n, der mit den kartesischen Koordinaten x_α ($\alpha = 1, \ldots, n$) versehen ist, werden wir den Parameterraum mit den Koordinaten λ_α ($\alpha = 1, \ldots, n$) mit ${}'E_n$ bezeichnen. Mit einem Strich links wollen wir stets einen Parameterraum andeuten (im Gegensatz zu einen Raum von Zustandsvariablen).

$$(1.8) \qquad \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \mid f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu)} \{f(\mathbf{x})\}\} ,$$

$$(1.9) \qquad \mathfrak{A} = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset\} .$$

Wir stellen uns das Problem die Menge $\mathfrak{A}$ aus (1.9) zu charakterisieren, d. h. die analytische Beschreibung dieser Menge und ihre Grundeigenschaften anzugeben.

Falls für einen Punkt $(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1}$, $\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \emptyset$ ist, so ist entweder $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \emptyset$, oder $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset$ und die Funktion $f(\mathbf{x})$ ist über der Menge $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu)$ nach oben unbeschränkt. Wir werden zuerst die Menge

$$(1.10) \qquad S = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \mathfrak{M} \cap R(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset\} ,$$

die man auch in der Form

$$(1.11) \qquad S = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid S(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\}$$

mit

$$(1.12) \qquad S(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mu \in {}'E_1 \mid \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset\}$$

schreiben kann, betrachten.

2. CHARAKTERISTIK DER MENGE $S(\lambda)$

Es sei ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n$ beliebig und $S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ die dem Punkt ${}_0\boldsymbol{\lambda}$ nach (1.12) zugeordnete Menge. Wir betrachten die zwei folgenden Optimierungsprobleme

$$(2.1) \qquad \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\}! , \quad \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\}! ,$$

wobei $\mathfrak{M}$ die Bedeutung aus (1.1c) besitzt und

$$(2.2) \qquad f_{0\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha$$

gesetzt wird. Bezeichnen wir

$$(2.3) \qquad \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\} , \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\} ,$$

so kommt für $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ eine der folgenden vier Möglichkeiten in Frage:

$$(2.4a) \qquad \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\} , \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\} ,$$

$$(2.4b) \qquad \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = -\infty , \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\} ,$$

$$(2.4c) \qquad \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\} , \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \infty ,$$

$$(2.4d) \qquad \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = -\infty , \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \infty .$$

Satz 1. *Falls für die Menge* $\mathfrak{M}$ *aus* (1.1c) $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ *gilt,* ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n$ *festgewählt und* $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ *die Bedeutung aus* (2.3) *haben, so gilt*

$$\mu \in S({}_0\boldsymbol{\lambda}) \Leftrightarrow \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) \leqq \mu \leqq \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) . \tag{2.5}$$

Beweis. Wir werden die folgenden in Frage kommenden Möglichkeiten unterscheiden:

1) Im Falle (2.4a) kommen zwei Möglichkeiten in Frage:

a) $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \equiv \mu_0$,

b) $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) < \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$.

Im Falle a) gilt

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\} = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{0\lambda}(\mathbf{x})\}$$

und daher ist die Funktion $f_{0\lambda}(\mathbf{x})$ konstant über der Menge $\mathfrak{M}$ und es gilt daher

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha = f_{0\lambda}(\mathbf{x}) = \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \mu_0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M} .$$

Daraus und aus (1.5) folgt

$$\emptyset \neq \mathfrak{M} \subset R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) , \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{M}({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \neq \emptyset \tag{2.6}$$

und nach (1.12) $\mu_0 \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$.

Für ein beliebiges $\mu \neq \mu_0$ gilt

$$\mathfrak{M} \cap R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \mathfrak{M}({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \emptyset ,$$

da die Hyperebene $R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu)$ parallel mit der Hyperebene $R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0)$ ist und (2.6) gilt. Für $\mu \neq \mu_0$ gilt daher $\mu \notin S({}_0\boldsymbol{\lambda})$. Im Falle b) gibt es ein Punktepaar ${}_1\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, ${}_2\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, ${}_1\mathbf{x} \neq {}_2\mathbf{x}$ mit

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = f_{0\lambda}({}_1\mathbf{x}) , \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = f_{0\lambda}({}_2\mathbf{x}) , \quad f_{0\lambda}({}_1\mathbf{x}) < f_{0\lambda}({}_2\mathbf{x}) . \tag{2.7}$$

Für jeden Punkt $\mathbf{x}$ der Strecke

$$s({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in E_n \mid x_\alpha = {}_1x_\alpha + t({}_2x_\alpha - {}_1x_\alpha), \ (\alpha = 1, \ldots, n), \ t \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

gilt nach (2.7)

$$f_{0\lambda}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{f}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha[{}_1x_\alpha + t({}_2x_\alpha - {}_1x_\alpha)] = \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) + t(\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) - \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})) ,$$
$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$

und daher auch $\tilde{f}(0) = \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\tilde{f}(1) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$. Wegen $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) > \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$ ist $\tilde{f}(t)$ eine lineare monoton wachsende Funktion einer einzigen Veränderlichen t über dem Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ und es gibt daher für ein jedes festgewählte $\hat{\mu} \in \langle \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}), \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \rangle$ eindeutig eine einzige Zahl $\hat{t} \in \langle 0, 1 \rangle$ mit $\tilde{f}(\hat{t}) = \hat{\mu}$ d. h.

$$\tilde{f}(\hat{t}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha[{}_1x_\alpha + \hat{t}({}_2x_\alpha - {}_1x_\alpha)] \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha \hat{x}_\alpha = \hat{\mu} . \tag{2.8}$$

Da die Menge $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ein konvexes Polyeder darstellt, so ist $s({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \subset \mathfrak{M}$ und daher auch $\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{M}$. Daraus, aus (1.5) und aus (2.8) folgt

$$\mathfrak{M} \cap R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \hat{\mu}) = \mathfrak{M}({}_0\boldsymbol{\lambda}, \hat{\mu}) \neq \emptyset .$$

Es gilt daher $\hat{\mu} \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ für alle $\hat{\mu} \in \langle \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}), \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \rangle$.

Für ein beliebiges $\mu^* \notin \langle \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}), \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \rangle$, d.h. für $\mu^* < \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$ (bzw. $\mu^* > \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$) gilt

$$f_{0\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha \geqq \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha\, {}_1x_\alpha = \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) > \mu^*$$

$$\left(\text{bzw.}\quad f_{0\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha \leqq \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha\, {}_2x_\alpha = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) < \mu^*\right)$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ und die Menge $\mathfrak{M}$ liegt daher in dem offenen Halbraum

$$\{\mathbf{x} \in E_n | \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha > \mu^*\} \text{ (bzw. } \{\mathbf{x} \in E_n | \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha < \mu^*\}) .$$

Daraus und aus (1.5) folgt

$$R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu^*) \cap \mathfrak{M} = \emptyset ,$$

d. h. $\mu^* \notin S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ für $\mu^* \notin \langle \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}), \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \rangle$.

2) Im Falle (2.4b) gibt es ein ${}_2\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ in der Weise, dass

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = -\infty , \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = f_{0\lambda}({}_2\mathbf{x}) \tag{2.9}$$

gilt. Die Menge $\mathfrak{M}$ ist unbeschränkt und es gibt so einen Vektor $\mathbf{v} = \{v_\alpha\}$, $\sum_{\alpha=1}^{n} |v_\alpha| > 0$, dass die Halbgerade

$$p = \{\mathbf{x} \in E_n |\, x_\alpha = {}_2x_\alpha + v_\alpha t,\ (\alpha = 1, \ldots, n),\ t \geqq 0\}$$

die Eigenschaft

$$p \in \mathfrak{M} \tag{2.10}$$

besitzt und die Zielfunktion $f_{0\lambda}(\mathbf{x})$ entlang dieser Halbgerade streng monoton abnimmt. Nach (2.9) gilt

$$f_{0\lambda}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{f}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha({}_2x_\alpha + v_\alpha t) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) + t \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha v_\alpha , \quad t \geqq 0$$

für jeden Punkt $\mathbf{x} \in p$; $\tilde{f}(0) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ und $\tilde{f}(t)$ ist eine lineare streng monoton abnehmende Funktion einer einzigen Veränderlichen t über dem Intervall $\langle 0, \infty)$. Für ein jedes festgewählte $\hat{\mu} \leqq \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ gibt es daher eindeutig ein $\hat{t} \geqq 0$ in der Weise, dass $\tilde{f}(\hat{t}) = \hat{\mu}$ gilt, d. h. es ist

$$(2.11) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha({}_2x_\alpha + v_\alpha \hat{t}) \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha \hat{x}_\alpha = \hat{\mu} .$$

Daraus, aus (1.5) und aus (2.10) folgt

$$\mathfrak{M} \cap R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \hat{\mu}) \neq \emptyset$$

und daher ist $\hat{\mu} \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ für alle $\hat{\mu} \leqq \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$.

Für ein beliebiges $\mu^* > \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ gilt nach (2.9)

$$f_{0\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha \leqq \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha\, {}_2x_\alpha = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) < \mu^*$$

für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ und daher ist

$$\mathfrak{M} \subset \{\mathbf{x} \in E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0\lambda_\alpha x_\alpha < \mu^*\} .$$

Daraus und aus (1.5) folgt

$$R({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu^*) \cap \mathfrak{M} = \emptyset$$

d. h. es ist $\mu^* \notin S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ für alle $\mu^* > \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$.

3) Im Falle (2.4c) verläuft der Beweis ähnlich wie im Falle (2.4b).

4) Im Falle (2.4d) ergibt sich der Beweis unmittelbar aus den Beweisen in Fällen (2.4b,c).

Bemerkung 1. Durch die Äquivalenz (2.5) wird die Menge $S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ hinreichend für jedes ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n$ charakterisiert.

3. CHARAKTERISTIK DER MENGE S

Bezeichnen wir

$$(3.1) \qquad \mathfrak{M}_{1\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M} \mid f_\lambda(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_\lambda(\mathbf{x})\}\} ,$$
$$\mathfrak{M}_{2\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M} \mid f_\lambda(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_\lambda(\mathbf{x})\}\} ,$$

wo $f_\lambda(\mathbf{x})$ die Bedeutung aus (2.2) und $\mathfrak{M}$ die Bedeutung aus (1.1c) hat. Weiter bezeichnen wir

$$(3.2) \qquad \mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \mathfrak{M}_{1\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\} , \quad \mathfrak{A}_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \mathfrak{M}_{2\text{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\} ,$$

$$(3.3) \qquad \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_\lambda(\mathbf{x})\} , \quad \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_\lambda(\mathbf{x})\} .$$

Satz 2. *Die Mengen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ aus (3.2) haben die folgenden Eigenschaften*[2]:

[2]) Es wird $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ vorausgesetzt.

1) $\mathfrak{A}_1$ *(bzw.* $\mathfrak{A}_2$*) ist ein n-dimensionaler polyedrischer Kegel in* $'E_n$ *mit einem Scheitel im Koordinatenursprung* $O = \{0, \ldots, 0\}$ *in* $'E_n$.

2) *Falls* $\mathfrak{M}$ *beschränkt ist, so gilt*

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = 'E_n .$$

Falls $\mathfrak{M}$ *unbeschränkt ist,* ${}^{\nu}h$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ *alle unbeschränkten Kanten des Polyeders* $\mathfrak{M}$ *sind und* ${}^{\nu}\mathbf{h} = ({}^{\nu}h_1, \ldots, {}^{\nu}h_n)$ *ein Vektor in der Richtung der Kante* ${}^{\nu}h$ *ist, so gilt*

$$\text{(3.4)} \qquad \mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in 'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0 \quad (\nu = 1, \ldots, s)\} ,$$

$$\mathfrak{A}_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in 'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0 \quad (\nu = 1, \ldots, s)\} .$$

3) *Es gilt*

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2 .$$

4) *Falls* ${}_i\mathbf{x}$ $(i = 1, \ldots, N)$ *alle Ecken des Polyeders* $\mathfrak{M}$[3], ${}_i^{\nu}h$ $(\nu = 1, \ldots, \varkappa_i)$ *alle aus der Ecke* ${}_i\mathbf{x}$ *ausgehende Kanten des Polyeders* $\mathfrak{M}$ *sind und* ${}_i^{\nu}\mathbf{h} = ({}_i^{\nu}h_1, \ldots, {}_i^{\nu}h_n)$ *ein Vektor in der Richtung der Kante* ${}_i^{\nu}h$ *ist, so haben die Mengen*

$$\text{(3.5)} \qquad {}^{(1)}\mathfrak{A}_i = \{\boldsymbol{\lambda} \in 'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_i^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0, \ (\nu = 1, \ldots, \varkappa_i)\} , \quad i = 1, \ldots, N ,$$

$$\left(\textit{bzw. } {}^{(2)}\mathfrak{A}_i = \{\boldsymbol{\lambda} \in 'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_i^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0, \ (\nu = 1, \ldots, \varkappa_i)\} , \quad i = 1, \ldots, N\right)$$

die folgenden Eigenschaften:

a) *Jede der Mengen* ${}^{(1)}\mathfrak{A}_i$ *(bzw.* ${}^{(2)}\mathfrak{A}_i$*) stellt einen polyedrischen Kegel der Dimension n in* $'E_n$ *mit einem Scheitel im Koordinatenursprung O in* $'E_n$ *dar. Die Mengen* ${}^{(1)}\mathfrak{A}_i$ *(bzw.* ${}^{(2)}\mathfrak{A}_i$*) stellen eine Einteilung*

$$\mathfrak{A}_1 = \bigcup_{i=1}^{N} {}^{(1)}\mathfrak{A}_i , \quad {}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_1}^{\text{int}} \cap {}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_2}^{\text{int}} = \emptyset , \quad i_i \neq i_2 , \quad i_1, i_2 \in \{1, \ldots, N\}$$

$$\left(\textit{bzw. } \mathfrak{A}_2 = \bigcup_{i=1}^{N} {}^{(2)}\mathfrak{A}_i , \quad {}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_1}^{\text{int}} \cap {}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_2}^{\text{int}} = \emptyset , \quad i_1 \neq i_2 , \quad i_1, i_2 \in \{1, \ldots, N\}\right)$$

der Menge $\mathfrak{A}_1$ *(bzw.* $\mathfrak{A}_2$*) dar.*

b) *Für jedes Indexpaar* $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, N\}$ *mit* $i_1 \neq i_2$ *gilt entweder*

$${}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_1} \cap {}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_2} = \{O\} \quad \left(\textit{bzw. } {}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_1} \cap {}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_2} = \{O\}\right) ,$$

[3]) Aus (1.1c) folgt, dass das Polyeder $\mathfrak{M}$ stets Ecken besitzt, bzw. $\mathfrak{M} = \{\mathbf{x}_0\}$ ist.

oder stellt dieser Durchschnitt eine bestimmte abgeschlossene d-dimensionale Seite $(1 \leqq d < n)$, *die den beiden Polyedern* ${}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_1}$, ${}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_2}$ (*bzw.* ${}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_1}$, ${}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_2}$) *gemeinsam ist, dar.*

c) *Die Kegel* ${}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_1}$, ${}^{(1)}\mathfrak{A}_{i_2}$ (*bzw.* ${}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_1}$, ${}^{(2)}\mathfrak{A}_{i_2}$ *aus* b) *berühren sich genau dann, entlang einer* $(n-1)$*-dimensionalen Seite, wenn die entsprechenden Ecken* ${}_{i_1}\mathbf{x}$, ${}_{i_2}\mathbf{x}$ *des Polyeders* $\mathfrak{M}$ *benachbart sind.*

d) *Die Funktion* $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ (*bzw.* $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$) *aus* (3.3) *ist linear über jeder Menge* ${}^{(1)}\mathfrak{A}_i$ (*bzw.* ${}^{(2)}\mathfrak{A}_i$), $(i = 1, \ldots, N)$ *und es gilt*

$$(3.6) \qquad \begin{aligned} \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{\alpha=1}^{n} {}_i x_\alpha \lambda_\alpha \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i \quad (i = 1, \ldots, N)\,, \\ \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{\alpha=1}^{n} {}_i x_\alpha \lambda_\alpha \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i \quad (i = 1, \ldots, N)\,. \end{aligned}$$

5) *Es gilt*

$$\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i \quad (i = 1, \ldots, N)\,.$$

6) *Die Funktion* $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ (*bzw.* $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$) *ist stetig, stückweise linear und konkav* (*bzw. konvex*) *über der Menge* $\mathfrak{A}_1$ (*bzw.* $\mathfrak{A}_2$).

Beweis. Für $\boldsymbol{\lambda} = O$ ist $\mathfrak{M}_{1\text{opt}}(O) = \mathfrak{M}_{2\text{opt}}(O) = \mathfrak{M}$ und da $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ vorausgesetzt wird, folgt daraus und aus (3.2) $O \in \mathfrak{A}_1$, $O \in \mathfrak{A}_2$ und daher

$$(3.7) \qquad \mathfrak{A}_1 \neq \emptyset\,, \quad \mathfrak{A}_2 \neq \emptyset\,.$$

Das duale Problem zu dem Problem

$$(3.8) \qquad \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_\lambda(\mathbf{x})\}! \quad (\text{bzw. } \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_\lambda(\mathbf{x})\}!)$$

ist das Problem[4])

$$(3.9) \qquad \max_{\mathbf{u} \in \mathfrak{N}_1(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}! \quad (\text{bzw. } \min_{\mathbf{u} \in \mathfrak{N}_2(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}!)$$

mit

$$(3.10) \qquad g(\mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r\,,$$

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{N}_1(\boldsymbol{\lambda}) &= \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r \leqq \lambda_\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, n)\}\,, \\ \mathfrak{N}_2(\boldsymbol{\lambda}) &= \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r \geqq \lambda_\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, n)\}\,. \end{aligned}$$

Nach dem Dualitätssatz[5]) ist das Problem (3.8) genau dann lösbar, wenn das ent-

[4]) Siehe z. B. [2], Seite 143.
[5]) Siehe z. B. [2], Seite 145.

sprechende duale Problem (3.9) lösbar ist. Daraus folgt nach (3.2)

$$\mathfrak{A}_1 = \{\lambda \in {}'E_n | \max_{\mathbf{u}\in\mathfrak{R}_1(\lambda)} \{g(\mathbf{u})\}! \text{ lösbar}\}\,, \tag{3.12}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \{\lambda \in {}'E_n | \min_{\mathbf{u}\in\mathfrak{R}_2(\lambda)} \{g(\mathbf{u})\}! \text{ lösbar}\}\,.$$

Definiert man

$$'g(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r^+ + \sum_{r=1}^{m} -b_r u_r^-\,,$$

$$'\mathfrak{R}_1(\lambda) = \{(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{w}) \in E_{2m+n} | \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^+ + \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha} u_r^- + w_\alpha = \lambda_\alpha\,,$$

$$u_r^+, u_r^-, w_\alpha \geqq 0,\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}\,,$$

$$'\mathfrak{R}_2(\lambda) = \{(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \mathbf{w}) \in E_{2m+n} | \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^+ + \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha} u_r^- - w_\alpha = \lambda_\alpha\,,$$

$$u_r^+, u_r^-, w_\alpha \geqq 0,\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}\,,$$

so gilt offenbar für das Problem

$$\max_{(\mathbf{u}^+,\mathbf{u}^-,\mathbf{w})\in{}'\mathfrak{R}_1(\lambda)} \{'g(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)\}! \quad (\text{bzw.} \min_{(\mathbf{u}^+,\mathbf{u}^-,\mathbf{w})\in{}'\mathfrak{R}_2(\lambda)} \{'g(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)\}!) \tag{3.13}$$

die Äquivalenz

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathfrak{R}_1(\lambda)} \{g(\mathbf{u})\}! \text{ lösbar!} \Leftrightarrow \max_{(\mathbf{u}^+,\mathbf{u}^-,\mathbf{w})\in{}'\mathfrak{R}_1(\lambda)} \{'g(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)\}! \text{ lösbar}$$

$$(\text{bzw.} \min_{\mathbf{u}\in\mathfrak{R}_2(\lambda)} \{g(\mathbf{u})\}! \text{ lösbar} \Leftrightarrow \min_{(\mathbf{u}^+,\mathbf{u}^-,\mathbf{w})\in{}'\mathfrak{R}_2(\lambda)} \{'g(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)\}! \text{ lösbar})\ ^{6})\,.$$

Daraus und aus (3.12) folgt

$$\mathfrak{A}_1 = \{\lambda \in {}'E_n | \max_{(\mathbf{u}^+,\mathbf{u}^-,\mathbf{w})\in{}'\mathfrak{R}_1(\lambda)} \{'g(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)\}! \text{ lösbar}\}\,,$$

$$\mathfrak{A}_2 = \{\lambda \in {}'E_n | \min_{(\mathbf{u}^+,\mathbf{u}^-,\mathbf{w})\in{}'\mathfrak{R}_2(\lambda)} \{'g(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)\}! \text{ lösbar}\}\,.$$

Da das Problem (3.13) in sogenannter Gleichungsform vorgegeben ist, kann man hier die Ergebnisse aus der Arbiet [1], die so eine Art von parametrischen Problemen angeht, benutzen. Wegen (3.7) gilt nach [1], Satz 2,

$$\mathfrak{A}_1 = \{\lambda \in {}'E_n \,|\, '\mathfrak{R}_1(\lambda) \neq \emptyset\}\,, \quad \mathfrak{A}_2 = \{\lambda \in {}'E_n \,|\, '\mathfrak{R}_2(\lambda) \neq \emptyset\}$$

und nach [1], Satz 5, stellt jede der Menge $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ einen n-dimensionalen polyedrischen Kegel in $'E_n$ mit einem Scheitel im Koordinatenursprung $O = \{0, \ldots, 0\}$ in $'E_n$ dar.

---

[6]) Siehe z. B. [2], Seite 99.

Man überzeugt sich leicht, dass das duale Problem zu dem Problem (3.13) eben das entsprechende Problem aus (3.8) ist. Nach [1], Satz 5, Beh. (2) – wegen $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ – und Beh. (3) gilt die Behauptung (2) unseres Satzes.

Aus (3.4) folgt unmittelbar die Behauptung 3).

Wendet man auf die Probleme (3.13) den Satz 6, [1], an, so gilt nach diesem Satz und aus dem Dualitätsprinzip im Falle $\dim \mathfrak{M} \geqq 1$ die Behauptung 4). Falls $\dim \mathfrak{M} = 0$ und daher $\mathfrak{M} = \{{}_0\mathbf{x}\}$ gilt, so ist nach [1], Bemerkung 10

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = {}'E_n\,, \quad \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha \quad (\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n)$$

und die Einteilung der Menge $\mathfrak{A}_1$ (bzw. $\mathfrak{A}_2$) ist in diesem Fall eine triviale Einteilung. Auch in diesem Fall besteht die Behauptung 4).

Die Behauptung 5) folgt unmittelbar aus der Beschreibung (3.5) der Mengen ${}^{(1)}\mathfrak{A}_i$, ${}^{(2)}\mathfrak{A}_i$, $(i = 1, \ldots, N)$.

Nach [1], Satz 8 und wegen der Dualität der Probleme (3.13), (3.8) nach dem Dualitätsprinzip ergibt sich die restliche Behauptung 6) des Satzes.

Satz 3. *Für die Menge S aus* (1.11) *gilt*

$$S = {}'E_{n+1} - (U_1 \cup U_2)\,, \tag{3.14}$$

wobei

$$U_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1, \mu < \varphi_1(\boldsymbol{\lambda})\}\,,$$
$$U_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2, \mu > \varphi_2(\boldsymbol{\lambda})\}$$

ist, wobei die Mengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und die Funktionen $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$, $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ die Bedeutung aus (3.2) *und* (3.3) *haben.*

Beweis. Es sei $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \in S$ beliebig fest gewählt. Nach (1.11), (1.12) ist dann $S({}_0\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$, $\mu_0 \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ und es gilt daher nach (2.5)

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) \leqq \mu_0 \leqq \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})\,. \tag{3.16}$$

Wir werden nun für die Elemente $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ aus (2.3) die in (2.4a) bis (2.4d) angeführte Möglichkeiten unterscheiden:

a) Falls für $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ die Möglichkeit (2.4a) vorkommt, d. h. falls

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{{}_0\lambda}(\mathbf{x})\}\,, \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f_{{}_0\lambda}(\mathbf{x})\}$$

gilt, so folgt daraus und aus (3.1), (3.2), (3.3)

$${}_0\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1\,, \quad {}_0\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2\,, \quad \varphi_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})\,, \quad \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}_0) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})\,.$$

Daraus und aus (3.16) folgt nach (3.15)

$$\varphi_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) \leqq \mu_0 \leqq \varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \Rightarrow ({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \notin (U_1 \cup U_2).$$

b) Falls für $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ die Möglichkeit (2.4b) eintritt, d. h. falls

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = -\infty\,, \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{f_{{}_0\lambda}(\mathbf{x})\}$$

gilt, so ergibt sich daraus nach (3.1), (3.2), (3.3)

$${}_0\boldsymbol{\lambda} \notin \mathfrak{A}_1\,, \quad {}_0\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2\,, \quad \varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})\,.$$

Daher folgt zuerst nach (3.15) $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \notin U_1$ und nach (3.16) (wegen $\varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \geqq \mu_0$) $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \notin U_2$. Es gilt daher wiederum $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \notin (U_1 \cup U_2)$.

c) Im Falle (2.4c) lässt sich auf ähnliche Weise beweisen, dass ebenfalls $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \notin$ $\notin (U_1 \cup U_2)$ gilt.

d) Im Falle (2.4d), d. h. falls

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = -\infty\,, \quad \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \infty$$

gilt, folgt daraus nach (3.1), (3.2), (3.3)

$${}_0\boldsymbol{\lambda} \notin \mathfrak{A}_1\,, \quad {}_0\boldsymbol{\lambda} \notin \mathfrak{A}_2$$

und daher nach (3.15) ist $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \notin (U_1 \cup U_2)$. Hiemit haben wir die Inklusion

$$S \subset {}'E_{n+1} - (U_1 \cup U_2) \tag{3.17}$$

bewiesen.

Es sei anderseits $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \in {}'E_n - (U_1 \cup U_2)$ beliebig festgewählt. Es gilt daher $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \notin (U_1 \cup U_2)$. Daraus und aus der Definition (3.15) der Mengen U_1, U_2 ergeben sich die vier folgenden Möglichkeiten:

a) Im Falle ${}_0\boldsymbol{\lambda} \notin \mathfrak{A}_1$, ${}_0\boldsymbol{\lambda} \notin \mathfrak{A}_2$ ist nach (2.3), (3.1), (3.2) $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = -\infty$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \infty$ und nach (2.5) gilt $\mu \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ für jede Zahl μ und daher auch $\mu_0 \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$. Daraus und aus (1.11) folgt $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \in S$.

b) Falls ${}_0\boldsymbol{\lambda} \notin \mathfrak{A}_1$, ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2$, $\mu_0 \leqq \varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ so tritt für die Elemente $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ die Möglichkeit (2.4b) ein und nach (3.3), (2.5) gilt dann für jedes μ mit $\mu \leqq \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) =$ $= \varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ zugleich $\mu \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$. Es ist also auch $\mu_0 \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$ und daher nach (1.11) ist $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \in S$.

c) Falls ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1$, $\mu_0 \geqq \varphi_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, ${}_0\boldsymbol{\lambda} \notin \mathfrak{A}_2$ so folgt daraus in ähnlicher Weise wie im Falle b), dass $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \in S$ ist.

d) Im Falle ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1$, $\mu_0 \geqq \varphi_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2$, $\mu_0 \leqq \varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$, kommt für die Elemente $\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda})$, $\sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ die Möglichkeit aus (2.4a) in Frage, wobei $\varphi_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) \leqq \mu_0 \leqq \varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda})$ gilt. Nach (3.3), (2.5) gilt aber

$$\sigma_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_1({}_0\boldsymbol{\lambda}) \leqq \mu \leqq \varphi_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_2({}_0\boldsymbol{\lambda}) \Rightarrow \mu \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})\,.$$

Daher gilt auch $\mu_0 \in S({}_0\boldsymbol{\lambda})$, woraus nach (1.11) $({}_0\boldsymbol{\lambda}, \mu_0) \in S$ folgt. Es gilt daher die Inklusion

$$'E_{n+1} - (U_1 \cup U_2) \subset S .$$

Aus dieser und aus (3.17) ergibt sich die Behauptung (3.14) des Satzes.

Satz 4. *Die Mengen* U_1, U_2 *aus* (3.15) *haben die folgenden Eigenschaften*:

a) $U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset, U_1 \cap U_2 = \emptyset$;

b) $\overline{U}_1$ (*bzw.* $\overline{U}_2$) *ist ein* $(n + 1)$*-dimensionaler polyedrischer Kegel in* $'E_{n+1}$ *mit einem Scheitel im Koordinatenursprung* $'O = (0, \ldots, 0)$ *in* $'E_{n+1}$;

c) *Es gilt*

$$(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \overline{U}_1 \Leftrightarrow (-\boldsymbol{\lambda}, -\mu) \in \overline{U}_2 ;$$

d) $'O \notin U_1 \; 'O \notin U_2$;

e) $\overline{U}_1^{\text{int}} \subset U_1$, $\overline{U}_2^{\text{int}} \subset U_2$.

Beweis. Da das Polyeder $\mathfrak{M}$ aus (1.1c) im Falle $\dim \mathfrak{M} > 0$ stets Ecken und Kanten besitzt, setzen wir in diesem Falle voraus dass ${}_i\mathbf{x}$, $(i = 1, \ldots, N)$ alle Ecken des Polyeders $\mathfrak{M}$ sind. Im Falle $\dim \mathfrak{M} = 0$ ist $\mathfrak{M} = \{{}_0\mathbf{x}\}$. Wir wollen nun die drei folgenden Möglichkeiten unterscheiden

1) $\mathfrak{M} = \{{}_0\mathbf{x}\}$;
2) $\mathfrak{M}$ beschränkt, $\dim \mathfrak{M} > 0$;
3) $\mathfrak{M}$ unbeschränkt.

Im Falle 1) definieren wir

$$\text{(3.18)} \qquad \begin{aligned} A_1 &= \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0\} , \\ A_2 &= \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0\} . \end{aligned}$$

Nach dem Beweis der Behauptung 4) aus Satz 2 gilt in dem betrachten Fall

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = {}'E_n , \quad \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha , \quad (\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n) .$$

Daraus und aus (3.18) folgt

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1, \; \mu < \varphi_1(\boldsymbol{\lambda})\} , \\ A_2 &= \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2, \; \mu > \varphi_2(\boldsymbol{\lambda})\} \end{aligned}$$

und daher nach (3.15) ist

$$\text{(3.19a)} \qquad \begin{aligned} U_1 &= A_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0\} , \\ U_2 &= A_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0\} . \end{aligned}$$

Offenbar ist

$$\overline{U}_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha - \mu \geqq 0\}\,, \tag{3.19b}$$
$$\overline{U}_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_0x_\alpha \lambda_\alpha - \mu \leqq 0\}\,.$$

Die Mengen U_1, U_2 aus (3.19a) sind offene Halbräume in $'E_{n+1}$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Es gilt daher die Behauptung a) des Satzes. Nach (3.19b) sind $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ abgeschlossene Halbräume die den Koordinatenursprung $'O$ als ihren Scheitelpunkt enthalten, woraus die Behauptung b) folgt. Die Behauptung d) folgt aus (3.19a). Aus (3.19a,b) ergibt sich $U_1 = \overline{U}_1^{\text{int}}$, $U_2 = \overline{U}_2^{\text{int}}$ und daher gilt die Behauptung e) des Satzes. Hiemit ist der Satz 4 für den Fall 1) bewiesen worden.

Im Falle 2) ist $\mathfrak{M}$ beschränkt, $\dim \mathfrak{M} > 0$, ${}_i\mathbf{x}$ $(i = 1, \ldots, N)$ sind alle Ecken des Polyeders $\mathfrak{M}$. Wir definieren hier

$$A_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0 \;\; (i = 1, \ldots, N)\}\,, \tag{3.20}$$
$$A_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0 \;\; (i = 1, \ldots, N)\}\,.$$

Nach der Behauptung 2) Satz 2, gilt

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = {}'E_n \tag{3.21}$$

und daher ist die Funktion $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ (bzw. $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$) aus (3.3) nach der Behauptung 6) desselben Satzes konkav (bzw. konvex) über $'E_n$. Nach Satz 2, Beh. 4) d) gilt weiter

$$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i \quad (i = 1, \ldots, N)\,, \tag{3.22}$$
$$\varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i \quad (i = 1, \ldots, N)\,.$$

Es sei $(\boldsymbol{\lambda}', \mu') \in A_1$ (bzw. $(\boldsymbol{\lambda}', \mu') \in A_2$) beliebig fest gewählt. Es gibt dann mindestens ein $j \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\boldsymbol{\lambda}' \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_j$ (bzw. $\boldsymbol{\lambda}' \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_j$) und daher nach (3.20), (3.22) ist

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha \lambda'_\alpha - \mu' > 0 \quad \Big(\text{bzw.} \;\; \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha \lambda'_\alpha - \mu' < 0\Big)\,,$$
$$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}') = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha \lambda'_\alpha \quad \Big(\text{bzw.} \;\; \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}') = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha \lambda'_\alpha\Big)\,.$$

Daraus folgt

$$\mu' < \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}') \quad (\text{bzw.} \;\; \mu' > \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}'))\,,$$

woraus und aus (3.21), (3.15) $(\boldsymbol{\lambda}', \mu') \in U_1$ (bzw. $(\boldsymbol{\lambda}', \mu') \in U_2$) folgt. Es gilt daher die Inklusion

$$A_1 \subset U_1 \quad (\text{bzw.} \;\; A_2 \subset U_2)\,. \tag{3.23}$$

Falls anderseits $({}_1\boldsymbol{\lambda}, \mu_1) \in U_1$ (bzw. $({}_1\boldsymbol{\lambda}, \mu_1) \in U_2$) beliebig ist, so ist nach (3.15)

$$(3.24) \qquad {}_1\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1\,, \quad \mu_1 < \varphi_1({}_1\boldsymbol{\lambda}) \quad (\text{bzw. } {}_1\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2\,, \ \mu_1 > \varphi_2({}_1\boldsymbol{\lambda}))\,,$$

wobei (3.21) gilt. Nach Satz 2, Beh. 4, gibt es mindestens ein Index $j \in \{1, \ldots, N\}$ in der Weise, dass ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_j$ (bzw. ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_j$) und zugleich

$$\varphi_1({}_1\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha \quad (\text{bzw. } \varphi_2({}_1\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha)$$

gilt. Daraus und aus (3.24) folgt

$$(3.25) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha - \mu_1 > 0 \quad (\text{bzw. } \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha - \mu_1 < 0)\,.$$

Es sei nun $i \in \{1, \ldots, N\}$, $i \neq j$, und ${}_2\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i^{\text{int}}$ (bzw. ${}_2\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i^{\text{int}}$). Da nach Satz 2, Beh. 6) $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ konkav (bzw. $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ konvex) über $'E_n$ ist, so gibt es einen Punkt $\boldsymbol{\lambda}^* \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i$ (bzw. $\boldsymbol{\lambda}^* \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i$) $\boldsymbol{\lambda}^* \neq {}_2\boldsymbol{\lambda}$, in der Weise, dass

$$(3.26a) \qquad \boldsymbol{\lambda}^* = \alpha_1\, {}_1\boldsymbol{\lambda} + \alpha_2\, {}_2\boldsymbol{\lambda}\,, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1\,, \quad \alpha_1 > 0\,, \quad \alpha_2 \geqq 0$$

und

$$(3.26b) \quad \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}^*) \geqq \alpha_1\, \varphi_1({}_1\boldsymbol{\lambda}) + \alpha_2\, \varphi_1({}_2\boldsymbol{\lambda}) \quad (\text{bzw. } \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}^*) \leqq \alpha_1\, \varphi_2({}_1\boldsymbol{\lambda}) + \alpha_2\, \varphi_2({}_2\boldsymbol{\lambda}))$$

gilt. Da wegen ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_j$, ${}_2\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i$, $\boldsymbol{\lambda}^* \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i$, (bzw. ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_j$, ${}_2\boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i$, $\boldsymbol{\lambda}^* \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i$) (nach Satz 2. Beh. 4) d))

$$\varphi_1({}_1\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha\,, \quad \varphi_1({}_2\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_2\lambda_\alpha\,, \quad \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}^*) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\lambda_\alpha^*$$

$$(\text{bzw. } \varphi_2({}_1\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha\,, \quad \varphi_2({}_2\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_2\lambda_\alpha\,, \quad \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}^*) = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\lambda_\alpha^*)$$

gilt, folgt daraus und aus (3.26a,b)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\lambda_\alpha^* = \alpha_1 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha + \alpha_2 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_2\lambda_\alpha \geqq \alpha_1 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha + \alpha_2 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_2\lambda_\alpha$$

$$(\text{bzw. } \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\lambda_\alpha^* = \alpha_1 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha + \alpha_2 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_2\lambda_\alpha \leqq \alpha_1 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha + \alpha_2 \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_2\lambda_\alpha)$$

d. h. es ist

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha \geqq \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha \quad (\text{bzw. } \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha \leqq \sum_{\alpha=1}^{n} {}_jx_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha)\,.$$

Daraus und aus (3.25) ergibt sich

$$(3.27) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha > \mu_1 \quad (\text{bzw. } \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha\, {}_1\lambda_\alpha < \mu_1)$$

und zwar für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$, $i \neq j$. Aus (3.27), (3.25) folgt nach (3.20) $({}_1\boldsymbol{\lambda}, \mu_1) \in A_1$ (bzw. $({}_1\boldsymbol{\lambda}, \mu_1) \in A_2$). Da aber $({}_1\boldsymbol{\lambda}, \mu_1) \in U_1$ (bzw. $({}_1\boldsymbol{\lambda}, \mu_1) \in U_2$) beliebig war, folgt daraus

$$U_1 \subset A_1 , \quad U_2 \subset A_2$$

und daher ist nach (3.23) $U_1 = A_1$, $U_2 = A_2$. Es gilt daher

$$\text{(3.28a)} \qquad U_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0 \ (i = 1, \ldots, N)\} ,$$

$$U_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0 \ (i = 1, \ldots, N)\} .$$

Man sieht leicht ein, dass $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist. Da U_1 (bzw. U_2) ein nichtleerer Durchschnitt offener Halbräume in ${}'E_{n+1}$ ist, folgt daraus, dass U_1 (bzw. U_2) konvex mit $\dim U_1 = n + 1$ (bzw. $\dim U_2 = n + 1$). Die Mengen

$$\text{(3.28b)} \qquad \bar{U}_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu \geqq 0 \ (i = 1, \ldots, N)\} ,$$

$$\bar{U}_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu \leqq 0 \ (i = 1, \ldots, N)\}$$

sind dann offenbar $(n + 1)$-dimensionale polyedrische Kegel in ${}'E_{n+1}$ mit einem Scheitel im Koordinatenursprung ${}'O$ in ${}'E_{n+1}$. Aus (3.28b) ergibt sich die Behauptung c) des Satzes, die Behauptung d) folgt aus (3.28a), die Behauptung e) dann aus (3.28a,b).

Im Falle 3) ist $\mathfrak{M}$ unbeschränkt. Sind – wie im Fall 2) – ${}_i\mathbf{x}$ $(i = 1, \ldots, N)$ alle Ecken des Polyeders $\mathfrak{M}$ und ${}^\nu h$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ alle unbeschränkten Kanten von $\mathfrak{M}$, ${}^\nu\mathbf{h} = ({}^\nu h_1, \ldots, {}^\nu h_n)$ ein Vektor in der Richtung der unbeschränkten Kante ${}^\nu h$, so definieren wir

$$A_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu h_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0 \ (\nu = 1, \ldots, s), \ \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0 \ (i = 1, \ldots, N)\} ,$$

$$A_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0 \ (\nu = 1, \ldots, s), \ \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0 \ (i = 1, \ldots, N)\} .$$

Nach Satz 2, Beh. 2), gilt dann

$$A_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1, \ \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0 \ (i = 1, \ldots, N)\} ,$$

$$A_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2, \ \sum_{\alpha=1}^{n} {}_ix_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0 \ (i = 1, \ldots, N)\} ,$$

und auf ähnliche Weise wie im Falle 2) lässt sich zeigen, dass $A_1 = U_1$, $A_2 = U_2$ gilt, d. h.

$$(3.29) \qquad U_1 = \{(\lambda, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0, \ (\nu = 1, \ldots, s),$$
$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_{i}x_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0, \ (i = 1, \ldots, N)\},$$
$$U_2 = \{(\lambda, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0, \ (\nu = 1, \ldots, s),$$
$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_{i}x_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0, \ (i = 1, \ldots, N)\}.$$

Aus der Beschreibung (3.29) der Mengen U_1, U_2 erhält man in ähnlicher Weise wie im Falle 2) leicht alle Behauptungen a) bis e) des Satzes.

Bemerkung 2. Im Beweis des Satzes 4 wurde mehr bewiesen, als der Satz verlangt, und zwar wurde hier eine explizite Beschreibung der Mengen U_1, U_2 abgeleitet ((3.19a), bzw. (3.28a), bzw. (3.29)). Die Beschreibungen (3.19a), (3.28a), (3.29) der Mengen U_1, U_2 in den im Beweis des Satzes 4 diskutierten Fällen 1), 2), 3) kann man einheitlich zusamenfassen, indem man definiert:
G sei die Menge aller Ecken des Polyeders $\mathfrak{M}$. (Falls $\mathfrak{M} = \{{}_0\mathbf{x}\}$ ist, so soll der Punkt ${}_0\mathbf{x}$ als die einzige Ecke von $\mathfrak{M}$ betrachtet werden. Wegen $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist $G \neq \emptyset$).

H sei die Menge aller unbeschränkten Kanten h des Polyeders $\mathfrak{M}$. (Falls $\mathfrak{M}$ beschränkt ist, so ist $H = \emptyset$, sonst $H \neq \emptyset$). Es gilt dann in allen im Beweis des Satzes 4 betrachteten Fällen

$$(3.30) \quad U_1 = \{(\lambda, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0, \ \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0, \ h \in H, \ \mathbf{x} \in G\},$$
$$U_2 = \{(\lambda, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0, \ \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0, \ h \in H, \ \mathbf{x} \in G\}.$$

Bemerkung 3. Aus dem Satz 4, Beh. b) und c), ergibt sich, dass die Menge $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 = \overline{U_1 \cup U_2}$ ein polyedrischer $(n+1)$-dimensionaler Doppelkegel in ${}'E_{n+1}$ der eine Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs ${}'O$ in ${}'E_{n+1}$ ausweist, ist.

Bemerkung 4. Die Menge S aus (1.10) ist offenbar eine zusammenhängende Menge in ${}'E_{n+1}$ sie ist jedoch allgemein weder konvex noch abgeschlossen in ${}'E_{n+1}$. Dies ergibt sich aus den im Satze 4 beschriebenen Eigenschaften der Mengen U_1, U_2 und aus (3.14). Durch die Sätze 3 und 4 wurde die Menge S hinreichend charakterisiert und nach Bemerkung 2 gibt es auch eine Möglichkeit die Menge S in einem konkreten Fall zu berechnen.

Durch den Satz 3 wurde bewiesen, dass für $(\lambda, \mu) \in U_1 \cup U_2$ das Problem (1.7) unlösbar ist.

Im vorigen Abschnitt 3 wurde die Menge $S = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset\}$ charakterisiert und zwar in dem Sinne, dass man die Bedingungen für $(\boldsymbol{\lambda}, \mu)$, für welche $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset$ explizit angeführt hat. Falls uns auch die Bedingungen für $(\boldsymbol{\lambda}, \mu)$, unter welchen die Restriktionsmenge aus dem entsprechenden dualen Problem nicht leer ist, bekannt wären, so würden diese Bedingungen mit den erwähnten Bedingungen aus Abschnitt 3 – nach dem Dualitätssatz – ein System von Bedingungen für $(\boldsymbol{\lambda}, \mu)$ angegeben, unter welchen das Problem (1.7) lösbar ist.

Das zu dem Problem (1.7) duale Problem ist das Problem

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda})} \{g_\mu(\mathbf{u})\}! \tag{4.1a}$$

mit

$$g_\mu(\mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r + \mu u_{m+1} \tag{4.1b}$$

$$\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, n)\}\ . \tag{4.1c}$$

Das Problem (1.7) ist also genau dann lösbar, wenn zugleich $\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset$, $\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset$ gilt. Daraus und aus (1.9) folgt daher

$$\mathfrak{A} = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \neq \emptyset,\ \mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\}\ .$$

Führen wir die Menge

$$T = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\} \tag{4.2}$$

ein, so gilt für die Menge $\mathfrak{A}$ aus (1.9)

$$\mathfrak{A} = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in S,\ \boldsymbol{\lambda} \in T\}\ . \tag{4.3}$$

Da die Menge S im Abschnitt 3 hinreichend charakterisiert wurde, wollen wir nun eine geeignete Charakteristik der Menge T finden um nachher – nach (4.3) – die Menge $\mathfrak{A}$ charakterisieren zu können.

Hilfsatz 1. *Definiert man*

$$\mathfrak{N}^*(\boldsymbol{\lambda}) = \{(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, u_{m+1}, \boldsymbol{\xi}) \in E_{2m+n+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^+ + \sum_{r=1}^{m} - a_{r\alpha} u_r^- - \xi_\alpha = \tag{4.4}$$

$$= c_\alpha - \lambda_\alpha u_{m+1},\ u_r^+, u_r^- \geqq 0,\ \xi_\alpha \geqq 0 \ (\alpha = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, m)\}\ ,$$

so gilt

$$\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{N}^*(\boldsymbol{\lambda}) \neq \emptyset\ . \tag{4.5}$$

Beweis. Falls $\mathfrak{N}(\lambda) \neq \emptyset$ und $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathfrak{N}(\lambda)$ ist, so gilt nach (4.1c)

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r \geqq c_\alpha - \lambda_\alpha \tilde{u}_{m+1} \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\,. \tag{4.6}$$

Definiert man

$$\tilde{u}_r^+ = \max(0, \tilde{u}_r)\,, \quad \tilde{u}_r^- = \max(0, -\tilde{u}_r) \quad (r = 1, \ldots, m)\,, \tag{4.7}$$

so ist

$$\tilde{u}_r = \tilde{u}_r^+ - \tilde{u}_r^-, \quad \tilde{u}_r^+, \tilde{u}_r^- \geqq 0 \quad (r = 1, \ldots, m)\,, \tag{4.8}$$

und durch Einsetzen in (4.6) erhält man

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r^+ + \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha}\tilde{u}_r^- \geqq c_\alpha - \lambda_\alpha \tilde{u}_{m+1} \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\,.$$

Definiert man noch

$$\tilde{\xi}_\alpha = \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r^+ + \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha}\tilde{u}_r^- - c_\alpha + \lambda_\alpha \tilde{u}_{m+1} \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\,, \tag{4.9}$$

so ist $\tilde{\xi}_\alpha \geqq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Für den Punkt $(\tilde{\mathbf{u}}^+, \tilde{\mathbf{u}}^-, \tilde{u}_{m+1}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \in E_{2m+n+1}$ gilt dann nach (4.4), (4.9) offenbar $(\tilde{\mathbf{u}}^+, \tilde{\mathbf{u}}^-, \tilde{u}_{m+1}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathfrak{N}^*(\lambda)$ und daher $\mathfrak{N}^*(\lambda) \neq \emptyset$.

Falls anderseits $\mathfrak{N}^*(\lambda) \neq \emptyset$ und $(\tilde{\mathbf{u}}^+, \tilde{\mathbf{u}}^-, \tilde{u}_{m+1}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathfrak{N}^*(\lambda)$ ist, so gilt nach (4.4)

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r^+ + \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha}\tilde{u}_r^- - \tilde{\xi}_\alpha = c_\alpha - \lambda_\alpha \tilde{u}_{m+1}\,, \quad \tilde{u}_r^+, \tilde{u}_r^- \geqq 0, \quad \tilde{\xi}_\alpha \geqq 0\,, \tag{4.10}$$
$$(r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\,.$$

Definiert man

$$\tilde{u}_r = \tilde{u}_r^+ - \tilde{u}_r^- \quad (r = 1, \ldots, m)\,,$$

so folgt aus (4.10)

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r - \tilde{\xi}_\alpha = c_\alpha - \lambda_\alpha \tilde{u}_{m+1}\,, \quad \tilde{\xi}_\alpha \geqq 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

und wegen $\tilde{\xi}_\alpha \geqq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ ist weiter

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r \geqq c_\alpha - \lambda_\alpha \tilde{u}_{m+1} \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\,.$$

Daraus und aus (4.1c) folgt $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathfrak{N}(\lambda)$ und daher $\mathfrak{N}(\lambda) \neq \emptyset$. Hiemit ist der Hilfssatz 1 bewiesen worden.

Aus (4.5), (4.2) folgt $T = \{\lambda \in {}'E_n \mid \mathfrak{N}^*(\lambda) \neq \emptyset\}$ und daher nach (4.4) ist

$$T = \Big\{\lambda \in {}'E_n \;\Big|\; u_{m+1}\lambda_\alpha = c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}u_r^+ - \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha}u_r^- + \xi_\alpha\,, \tag{4.11}$$
$$u_r^+, u_r^- \geqq 0,\ \xi_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\Big\}\,.$$

Satz 5. *Es gilt*

(4.12) $$T = 'E_n$$

genau dann, wenn das Problem (1.1a), *d. h.* $\max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}}\{f(\mathbf{x})\}!$ *lösbar ist.*

Beweis. Falls $T = 'E_n$ ist, so ist auch ${}_0\boldsymbol{\lambda} = (0, \dots, 0)$ aus T und nach (4.2), (4.1c) ist

(4.13) $$\mathfrak{N}({}_0\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}u_r \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n)\} \neq \emptyset .$$

Das duale Problem zu dem Problem (1.1a) ist nach (1.1b,c) das Problem

(4.14a) $$\min_{\mathbf{u}\in\mathfrak{N}}\{g(\mathbf{u})\}!$$

mit

(4.14b) $$g(\mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r$$

und mit

(4.14c) $$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}u_r \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n)\} .$$

Daraus und aus (4.13) folgt $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Da $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ vorausgesetzt wurde und $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ ist, ergibt sich daraus nach dem Dualitätssatz, dass die dualen Probleme (1.1a) und (4.14a) zugleich lösbar sind.

Falls andereseits das Problem (1.1a) lösbar ist, so ist das zugehörige duale Problem (4.14a) ebenfalls lösbar und daher ist $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Es sei $\hat{\mathbf{u}} \in \mathfrak{N}$ und ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in 'E_n$ beliebig. Nach (4.14c) gilt

$$c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\hat{u}_r \leqq 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n) .$$

Definiert man $\hat{u}_r^+ = \max(0, \hat{u}_r)$, $\hat{u}_r^- = \max(0, -\hat{u}_r)$ $(r = 1, \dots, m)$, so gilt

(4.15) $$c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\hat{u}_r^+ - \sum_{r=1}^{m} - a_{r\alpha}\hat{u}_r^- \leqq 0 , \quad \hat{u}_r^+, \hat{u}_r^- \geqq 0 ,$$
$$(\alpha = 1, \dots, n;\ r = 1, \dots, m) .$$

Setzt man

(4.16) $$u_{m+1} = 0 , \quad {}_1\xi_\alpha = -c_\alpha + \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\hat{u}_r^+ + \sum_{r=1}^{m} - a_{r\alpha}\hat{u}_r^- \quad (\alpha = 1, \dots, n) ,$$

so ist

$$u_{m+1}\ {}_1\lambda_\alpha = 0 = c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\hat{u}_r^+ - \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha}\hat{u}_r^- + {}_1\xi_\alpha$$
$$(\alpha = 1, \dots, n) ,$$

wobei $\hat{u}_r^+, \hat{u}_r^- \geqq 0$, ${}_1\xi_\alpha \geqq 0$ $(r = 1, \dots, m\ ;\ \alpha = 1, \dots, n)$ nach (4.15), (4.16) gilt. Daraus und aus (4.11) folgt ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in T$. Da ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in 'E_n$ beliebig war, ergibt sich daraus $T = 'E_n$. Hiemit ist der Satz 5 bewiesen.

Bemerkung 5. Falls das Problem (1.1a) unlösbar ist, so ergibt sich aus dem Dualitätsprinzip $\mathfrak{N} = \emptyset$ (wo $\mathfrak{N}$ aus (4.14c) ist), da $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ vorausgesetzt wurde. Wäre nun $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \in T$ ein solcher Punkt, zu dem $\tilde{u}_{m+1}$ mit $\tilde{u}_{m+1} = 0$ existiert, so gäbe es nach (4.11) einen Punkt $(\tilde{\mathbf{u}}^+, \tilde{\mathbf{u}}^-, \tilde{u}_{m+1}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \in E_{2m+n+1}$ mit

$$\tilde{\lambda}_\alpha \tilde{u}_{m+1} = 0 = c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \tilde{u}_r^+ - \sum_{r=1}^{m} - a_{r\alpha} \tilde{u}_r^- + \tilde{\xi}_\alpha ,$$

$$\tilde{u}_r^+, \tilde{u}_r^- \geqq 0 , \quad \tilde{\xi}_\alpha \geqq 0 \quad (r = 1, \ldots, m; \; \alpha = 1, \ldots, n)$$

und daher wäre

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \tilde{u}_r^+ + \sum_{r=1}^{m} - a_{r\alpha} \tilde{u}_r^- - \tilde{\xi}_\alpha = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

und wegen $\tilde{\xi}_\alpha \geqq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \tilde{u}_r^+ + \sum_{r=1}^{m} - a_{r\alpha} \tilde{u}_r^- \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n) .$$

Definiert man $\tilde{u}_r = \tilde{u}_r^+ - \tilde{u}_r^-$ $(r = 1, \ldots, m)$, so würde

$$\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \tilde{u}_r \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

sein und daher nach (4.14c) $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathfrak{N}$. Dies steht aber im Widerspruch mit $\mathfrak{N} = \emptyset$. Daraus folgt, dass im Falle, wo das Problem (1.1a) unlösbar ist, in der Beschreibung (4.11) der Menge T nur Zahlen u_{m+1} mit $|u_{m+1}| > 0$ in Frage kommen.

Hilfssatz 2. *Falls das Problem (1.1a) unlösbar ist, so gilt für die Menge T aus* (4.11)

(4.17) $$T = T' \cup T''$$

mit

(4.18) $$T' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \lambda_\alpha = \omega_0 c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\omega_r + \eta_\alpha, \; \omega_0 > 0, \; \eta_\alpha \geqq 0,$$
$$\omega_r \in (-\infty, \infty), \; (r = 1, \ldots, m; \; \alpha = 1, \ldots, n)\},$$

$$T'' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \lambda_\alpha = \omega_0(-c_\alpha) + \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\omega_r - \eta_\alpha, \; \omega_0 > 0, \; \eta_\alpha \geqq 0,$$
$$\omega_r \in (-\infty, \infty), \; (r = 1, \ldots, m; \; \alpha = 1, \ldots, n)\},$$

wobei

(4.19) $$\boldsymbol{\lambda} \in T' \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in T''$$

gilt.

Beweis. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ und das Problem (1.1a) unlösbar ist, folgt daraus nach dem Dualitätssatz, dass die Restriktionsmenge $\mathfrak{N}$ aus (4.14c) des zu dem Problem (1.1a) dualen Problems (4.14) leer sein muss. Es gibt daher keine Zahlen $u_r^+ \geqq 0$, $u_r^- \geqq 0$, $\xi_\alpha \geqq 0$ $(r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)$ mit

$$(4.20) \qquad c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^+ + \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^- + \xi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

denn sonst würde aus (4.20)

$$c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r \leqq 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

folgen und daher wäre $\mathbf{u} \in \mathfrak{N}$, was ein Widerspruch ist. Daraus und aus der Beschreibung (4.11) der Menge T folgt unmittelbar, dass für den Koordinatenursprung O in $'E_n$

$$O \notin T$$

gilt, und weiter (auch nach der Bemerkung 5), dass die zu einem Punkt $\boldsymbol{\lambda} \in T$ zugehörige Zahl u_{m+1} die Eigenschaft

$$(4.21) \qquad u_{m+1} \neq 0$$

hat. Wegen (4.21) kann die Menge T aus (4.11) in zwei Teilmengen

$$T' = \{\boldsymbol{\lambda} \in T \mid u_{m+1} > 0\}, \quad T'' = \{\boldsymbol{\lambda} \in T \mid u_{m+1} < 0\}$$

eingeteilt werden und aus (4.11) folgt dann

$$(4.22a) \quad T' = \left\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \lambda_\alpha = \frac{1}{u_{m+1}} c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \frac{u_r^+}{u_{m+1}} + \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \frac{u_r^-}{u_{m+1}} + \frac{1}{u_{m+1}} \xi_\alpha,\right.$$
$$\left. u_{m+1},\ u_r^+, u_r^- \geqq 0,\ \xi_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\right\},$$

(4.22b)

$$T'' = \left\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \lambda_\alpha = -\frac{1}{u_{m+1}}(-c_\alpha) + \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\left(-\frac{u_r^+}{u_{m+1}}\right) - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\left(-\frac{u_r^-}{u_{m+1}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{-u_{m+1}} \xi_\alpha,\ -u_{m+1},\ u_r^-,\ u_r^+ \geqq 0,\ \xi_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\right\}.$$

Setzt man

$$\frac{1}{u_{m+1}} = \omega_0, \quad \omega_r = \frac{u_r^+}{u_{m+1}} - \frac{u_r^-}{u_{m+1}}, \quad \eta_\alpha = \frac{\xi_\alpha}{u_{m+1}} \quad (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)$$

in (4.22a) und

$$-\frac{1}{u_{m+1}} = \omega_0\,, \quad \omega_r = -\frac{u_r^+}{u_{m+1}} + \frac{u_r^-}{u_{m+1}}\,, \quad \eta_\alpha = -\frac{\xi_\alpha}{u_{m+1}} \quad (r=1,\ldots,m;\ \alpha=1,\ldots,n)$$

in (4.22b), so erhält man daraus die Beschreibung (4.18) der Mengen T', T'', woraus ihre Eigenschaft (4.19) folgt.

Hilfssatz 3. *Jede der Mengen*

$$(4.23)\qquad T_1 = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \,\Big|\, \lambda_\alpha = \omega_0 c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\omega_r + \eta_\alpha,\ \omega_0 \geqq 0,\ \eta_\alpha \geqq 0 \quad (r = 1,\ldots,m;\ \alpha = 1,\ldots,n)\Big\}$$

$$T_2 = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \,\Big|\, \lambda_\alpha = \omega_0(-c_\alpha) + \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\omega_r - \eta_\alpha,\ \omega_0 \geqq 0,\ \eta_\alpha \geqq 0 \quad (r = 1,\ldots,m;\ \alpha = 1,\ldots,n)\Big\}$$

stellt im Falle $\mathfrak{N} = \emptyset$ [7]) *einen n-dimensionalen polyedrischen Kegel mit einem Scheitel im Koordinatenursprung O in* $'E_n$ *dar, wobei*

$$(4.24)\qquad \boldsymbol{\lambda} \in T_1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in T_2$$

gilt. Die Menge

$$(4.25)\qquad {}^*T_1 = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\lambda_\alpha \leqq 0,\ \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\lambda_\alpha = 0,\ \lambda_\alpha \leqq 0\,, \quad (r = 1,\ldots,m;\ \alpha = 1,\ldots,n)\Big\}\,,$$

$$\Big(\textit{bzw.}\ \ {}^*T_2 = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\lambda_\alpha \geqq 0,\ \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\lambda_\alpha = 0,\ \lambda_\alpha \geqq 0\,, \quad (r = 1,\ldots,m;\ \alpha = 1,\ldots,n)\Big\}\Big)$$

stellt den zu dem Kegel T_1 (*bzw.* T_2) *polaren Kegel dar, der mindestens eine Kante besitzt. Falls* ${}^\nu k$ $(\nu = 1,\ldots,\varrho)$ *alle Kanten des Kegels* ${}^*T_1$ *und* ${}^\nu\mathbf{k} = \{{}^\nu k_1,\ldots,{}^\nu k_n\}$ *ein Vektor in der Richtung der Kante* ${}^\nu k$ *ist, so gilt*

$$(4.26)\qquad T_1 = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha\lambda_\alpha \leqq 0 \quad (\nu = 1,\ldots,\varrho)\Big\}\,,$$

$$T_2 = \Big\{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha\lambda_\alpha \geqq 0 \quad (\nu = 1,\ldots,\varrho)\Big\}\,.$$

---

[7]) D.h. im Falle, wo das Problem (1.1a) unlösbar ist.

Beweis. Aus der Definition (4.23) der Mengen T_1, T_2 folgt unmittelbar, dass sie polyedrische Kegel mit einem Scheitel O in $'E_n$ darstellen, wobei der Kegel T_1 die Punkte $(0, \ldots, 0)$, $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$, der Kegel T_2 die Punkte $(0, \ldots, 0)$, $(-1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, -1)$ enthält. Daraus folgt $\dim T_1 = \dim T_2 = n$. Aus (4.23) folgt ebenfalls, dass die Kegel T_1, T_2 den linearen Unterraum

$$(4.27) \qquad {}_0L = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \lambda_\alpha = -\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\omega_r\,, \quad \omega_r \in (-\infty, \infty)\,, \\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}$$

enthalten.

Die Eigenschaft (4.24) folgt unmittelbar aus (4.23). Offenbar gilt auch

$$T_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \lambda_\alpha = \omega_0 c_\alpha + \sum_{r=1}^{m} (-a_{r\alpha})\,\omega_r^+ + \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\omega_r^- + \eta_\alpha\,, \\ \omega_0, \omega_r^+, \omega_r^- \geqq 0\,, \quad \eta_\alpha \geqq 0 \quad (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}\,.$$

Daraus folgt dann die Beschreibung (4.25) des polaren Kegels $*T_1$ und da wegen (4.24)

$$(4.28) \qquad \boldsymbol{\lambda} \in *T_1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in *T_2$$

gilt, ebenfalls die Beschreibung des Kegels $*T_2$ aus (4.25).

Da die Variablen λ_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ in der Definition (4.25) des Kegels $*T_1$ (bzw. $*T_2$) vorzeichen-beschränkt sind, ergibt sich daraus, dass dieser Kegel keine Gerade enthält und deshalb besitzt der Kegel $*T_1$ (bzw. $*T_2$) eine einzige Ecke, die dann mit dem Koordinatenursprung O in $'E_n$ zusammenfällt.

Wäre $T_1 = {}'E_n$, so wäre auch $T_1^{\text{int}} = {}'E_n$. Da aber nach (4.23), (4.18) $T' \supset T_1^{\text{int}}$ gilt, wäre dann ebenfalls $T' = {}'E_n$ und nach (4.19) zugleich $T'' = {}'E_n$. Daraus und aus Satz 5 würde sich ergeben, dass das Problem (1.1a) lösbar ist, was unserer Voraussetzung widerspricht. Es gilt daher $T_1 \neq {}'E_n$, woraus dann folgt, dass der polare Kegel $*T_1$ zu dem Kegel T_1 sich nicht auf einen einzigen Punkt – in unserem Fall auf den Punkt O – reduzieren kann. Daraus folgt $\dim *T_1 \geqq 1$ und wegen (4.28) ebenfalls $\dim *T_2 \geqq 1$. Da O die einzige Ecke des Kegels $*T_1$ (bzw. $*T_2$) ist und $\dim *T_1 = \dim *T_2 \geqq 1$ gilt, ergibt sich daraus, dass der Kegel $*T_1$ (bzw. $*T_2$) mindestens eine Kante besitzt.

Es seien ${}^\nu k$ $(\nu = 1, \ldots, \varrho)$ alle Kanten des Kegels $*T_1$, ${}^\nu\mathbf{k} = ({}^\nu k_1, \ldots, {}^\nu k_n)$ ein Vektor in der Richtung der Kante ${}^\nu k$. Aus den bekannten Eigenschaften des polaren Kegels[8]) ergibt sich die Beschreibung (4.26) des Kegels T_1. Wegen (4.28) folgt dann daraus die Beschreibung des Kegels T_2 aus (4.26).

Hilfssatz 4. *Unter der Voraussetzung* $\mathfrak{N} = \emptyset$ *gilt*

$$(4.29) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha c_\alpha \leqq 0 \quad (\nu = 1, \ldots, \varrho)$$

[8]) Sieh z. B. [1].

wo ${}^{\nu}\mathbf{k}$ $(\nu = 1, \ldots, \varrho)$ *die Kantenvektoren aus dem Hilfssatz* 3 *sind. Definiert man die Hyperebene*

$$R_{\mathrm{c}} = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \lambda_\alpha = 0\} \tag{4.30}$$

in ${}'E_n$ *und führt man die Indexmenge*

$$I_1 = \{\nu \in \{1, \ldots, \varrho\} \mid {}^{\nu}k \notin R_{\mathrm{c}}\}\,, \quad I_2 = \{\nu \in \{1, \ldots, \varrho\} \mid {}^{\nu}k \in R_{\mathrm{c}}\} \tag{4.31}$$

ein, so gilt

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha c_\alpha < 0 \Leftrightarrow \nu \in I_1\,. \tag{4.32}$$

Beweis. Aus (4.23) folgt, dass der Vektor $\mathbf{c} = \{c_\alpha\}$ der Menge T_1 angehört. Daraus und aus (4.26) folgt unmittelbar die Behauptung (4.29). Die Hyperebene R_{c} aus (4.30) berührt offenbar der zu dem Kegel T_1 polaren Kegel ${}^*T_1$, wie es sich aus der Tatsache, dass ${}^*T_1$ der polare Kegel zu dem Kegel T_1 und $\mathbf{c}$ eine Kante von T_1 ist, ergibt. Die Hyperebene R_{c} enthält deshalb mindestens eine Kante des Kegels ${}^*T_1$. Ist ${}^{\nu}k \in R_{\mathrm{c}}$ und daher $\nu \in I_2$, so gilt nach (4.30) $\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\, {}^{\nu}k_\alpha = 0$. Andereseits, wenn $\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\, {}^{\nu}k_\alpha = 0$ gilt, so ist ${}^{\nu}k \in R_{\mathrm{c}}$. Es gilt daher

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha c_\alpha = 0 \Leftrightarrow \nu \in I_2\,. \tag{4.33}$$

Daraus und aus (4.29) folgt (4.32).

Hilfssatz 5. *Falls das Problem* (1.1a) *unlösbar ist und* T', T'' *die Bedeutung aus* (4.18), *die Vektoren* ${}^{\nu}\mathbf{k}$ $(\nu = 1, \ldots, \varrho)$ *die Bedeutung aus Hilfssatz* 3 *und die Indexmengen* I_1, I_2 *die Bedeutung aus Hilfssatz* 4 *haben, so gilt*

$$T' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha < 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_1\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_2\}\,, \tag{4.34a}$$

$$T'' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha > 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_1\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_2\}\,. \tag{4.34b}$$

Beweis. Wegen (4.19) genügt es offenbar die Behauptung (4.34b) zu beweisen. Wir definieren die Menge

$${}^*T' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha < 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_1\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_2\} \tag{4.35}$$

und wir werden zeigen — um den Satz zu beweisen — dass

$$(4.36) \qquad {}^*T' = T'$$

gilt, wobei T' die Bedeutung aus (4.18) und ${}^*T'$ die Bedeutung aus (4.35) hat.

Es sei ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in T'$ beliebig. Da aus (4.18), (4.23)

$$(4.37) \qquad T' \subset T_1$$

folgt, gilt nach (4.26)

$$(4.38) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \, {}_0\lambda_\alpha \leqq 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, \varrho .$$

Wegen ${}_0\boldsymbol{\lambda} \in T'$ gibt es nach (4.18) Zahlen ${}_0\omega_0 > 0$, ${}_0\omega_r \in (-\infty, \infty)$, ${}_0\eta_\alpha \geqq 0$ $(r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)$ mit

$${}_0\lambda_\alpha = {}_0\omega_0 c_\alpha - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \, {}_0\omega_r + {}_0\eta_\alpha , \quad (\alpha = 1, \ldots, n) .$$

Daraus und aus (4.38) folgt

$$(4.39) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \, {}_0\lambda_\alpha = {}_0\omega_0 \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha c_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \Big[- \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \, {}_0\omega_r + {}_0\eta_\alpha\Big] \leqq 0 , \quad (\nu = 1, \ldots, \varrho) .$$

Daraus folgt nach (4.32) wegen ${}_0\omega_0 > 0$

$$(4.40) \qquad {}_0\omega_0 \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha c_\alpha < 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_1 .$$

Setzen wir voraus, dass es ein $\tilde{\nu} \in I_1$ mit

$$(4.41) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\tilde{\nu}}k_\alpha \, {}_0\lambda_\alpha = 0$$

gibt. Unter dieser Voraussetzung folgt aus (4.39), (4.40)

$$(4.42) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\tilde{\nu}}k_\alpha \Big[- \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \, {}_0\omega_r + {}_0\eta_\alpha\Big] > 0 .$$

Da aber der Punkt $\hat{\lambda}$ mit

$$\hat{\lambda}_\alpha = - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \, {}_0\omega_r + {}_0\eta_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

nach (4.23) der Menge T_1 angehört, folgt daraus und aus (4.26)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \hat{\lambda}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \Big[- \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} \, {}_0\omega_r + {}_0\eta_\alpha\Big] \leqq 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, \varrho ,$$

was im Widerspruch mit (4.42) steht. Die Voraussetzung (4.41) kann daher nicht gelten und deshalb folgt daraus nach (4.38)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} < 0 \quad \text{für alle} \quad \nu \in I_1 .$$

Aus diesen Ungleichungen und aus (4.38), (4.35) folgt ${}_{0}\boldsymbol{\lambda} \in {}^{*}T'$ und da ${}_{0}\boldsymbol{\lambda} \in T'$ beliebig war, so gilt

$$T' \subset {}^{*}T' . \tag{4.43}$$

Falls anderseits ${}_{0}\boldsymbol{\lambda} \in {}^{*}T'$ beliebig ist, so gilt nach (4.35)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} < 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_1 , \quad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} \leqq 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_2 . \tag{4.44}$$

Aus (4.35), (4.26) ergibt sich

$${}^{*}T' \subset T_1 \tag{4.45}$$

und es ist daher ${}_{0}\boldsymbol{\lambda} \in T_1$. Daraus und aus (4.23) ergibt sich die Existenz von Zahlen ${}_{0}\omega_0 \geqq 0$, ${}_{0}\omega_r \in (-\infty, \infty)$, ${}_{0}\eta_{\alpha} \geqq 0$ $(r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)$ mit

$${}_{0}\lambda_{\alpha} = {}_{0}\omega_0 c_{\alpha} - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\, {}_{0}\omega_r + {}_{0}\eta_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, n) . \tag{4.46}$$

Falls ${}_{0}\omega_0 > 0$ ist, so folgt daraus nach (4.18) ${}_{0}\boldsymbol{\lambda} \in T'$. Betrachten wir also noch den Fall ${}_{0}\omega_0 = 0$ d. h.

$${}_{0}\lambda_{\alpha} = - \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\, {}_{0}\omega_r + {}_{0}\eta_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, n) . \tag{4.47}$$

Definieren wir

$$\tilde{\omega} = \min_{\nu \in I_1} \left\{ \frac{t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha}}{(t-1) \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_{\alpha} c_{\alpha}} \right\} \quad \text{mit festem} \quad t > 1. \tag{4.48}$$

Aus (4.48), (4.44), (4.32) folgt dann

$$\tilde{\omega} > 0 . \tag{4.49}$$

Definieren wir weiter den Punkt ${}^{*}\boldsymbol{\lambda} = \{{}^{*}\lambda_{\alpha}\}$ folgendermassen:

$${}^{*}\lambda_{\alpha} = 1/2\tilde{\omega} c_{\alpha} + t\Big[- \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\, {}_{0}\omega_r + {}_{0}\eta_{\alpha} - 1/2\tilde{\omega} c_{\alpha}\Big] . \tag{4.50a}$$

Aus (4.50a), (4.47) folgt

$${}^{*}\lambda_{\alpha} = 1/2\tilde{\omega}(1-t)\, c_{\alpha} + t\, {}_{0}\lambda_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, n) . \tag{4.50b}$$

Daraus folgt

$$(4.51) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}^{*}\lambda_{\alpha} = 1/2\, \tilde{\omega}(1-t) \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha} c_{\alpha} + t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} \,.$$

Da nach (4.49) $\tilde{\omega} > 0$ nach (4.48) $t > 1$ und nach (4.44), (4.32)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha} c_{\alpha} < 0 \,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} < 0 \quad \text{für} \quad v \in I_1$$

ist, gilt

$$(4.52) \qquad 1/2\, \tilde{\omega}(1-t) \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha} c_{\alpha} > 0 \,, \quad t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} < 0 \,, \quad v \in I_1 \,.$$

Aus (4.48) folgt

$$1/2\, \tilde{\omega}(1-t) \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha} c_{\alpha} \leqq 1/2 \frac{(1-t)\, t}{t-1} \cdot \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha} c_{\alpha}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha} c_{\alpha} =$$

$$= -1/2 \,.\, t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} < -t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} \quad \text{für} \quad v \in I_1 \,,$$

woraus sich nach (4.51) die Abschätzung

$$(4.53a) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}^{*}\lambda_{\alpha} < -t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} + t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} = 0 \quad \text{für} \quad v \in I_1$$

ergibt. Aus (4.51), (4.33), (4.44) folgt weiter

$$(4.53b) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}^{*}\lambda_{\alpha} = t \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{v}k_{\alpha}\, {}_{0}\lambda_{\alpha} \leqq 0 \quad \text{für} \quad v \in I_2 \,.$$

Aus (4.53a,b) und aus (4.35) folgt dann ${}^{*}\boldsymbol{\lambda} \in {}^{*}T'$ und daraus weiter nach (4.45) ${}^{*}\boldsymbol{\lambda} \in T_1$. Wegen ${}^{*}\boldsymbol{\lambda} \in T_1$ gibt es nach (4.23) Zahlen ${}^{*}\omega_0 \geqq 0$, ${}^{*}\omega_r \in (-\infty, \infty)$, ${}^{*}\eta_{\alpha} \geqq$ $\geqq 0$ $(r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)$, so dass

$${}^{*}\lambda_{\alpha} = {}^{*}\omega_0 c_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\, {}^{*}\omega_r + {}^{*}\eta_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gilt. Daraus und aus (4.50b) folgt

$$(4.54) \qquad {}^{*}\omega_0 c_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\, {}^{*}\omega_r + {}^{*}\eta_{\alpha} = 1/2\, \tilde{\omega}(1-t)\, c_{\alpha} + t_0\lambda_{\alpha} \quad \text{d. h.}$$

$$t_0\lambda_{\alpha} = \left[{}^{*}\omega_0 + 1/2(t-1)\, \tilde{\omega}\right] c_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\, {}^{*}\omega_r + {}^{*}\eta_{\alpha} \,, \quad (\alpha = 1, \ldots, n) \,.$$

Setzt man noch

$$\hat{\omega} = \frac{{}^{*}\omega_0 + 1/2(t-1)\, \tilde{\omega}}{t} \,, \quad \hat{\omega}_r = \frac{{}^{*}\omega_r}{t} \,, \quad \hat{\eta}_{\alpha} = \frac{{}^{*}\eta_{\alpha}}{t} \quad (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n) \,,$$

so ist wegen $*\omega_0 \geqq 0$, $\tilde{\omega} > 0$, $t > 1$, $*\eta_\alpha \geqq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$

$$\hat{\omega} > 0\,, \quad \hat{\eta}_\alpha \geqq 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \ldots, n \tag{4.55}$$

und nach (4.54)

$$_0\lambda_\alpha = \hat{\omega} c_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} \hat{\omega}_r + \hat{\eta}_\alpha\,, \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\,,$$

wobei (4.55) gilt. Daraus folgt nach (4.18), dass $_0\boldsymbol{\lambda} \in T'$ gilt. Da aber $_0\boldsymbol{\lambda} \in *T'$ beliebig war, folgt daraus weiter $*T' \subset T'$ und mit Hinsicht auf (4.43) ist dann $T' = *T'$. Hiemit ist der Hilfssatz 5 bewiesen.

Satz 6. *Falls das Problem* (1.1a) *d. h.* $\max\limits_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!$ *unlösbar ist, so stellt jede der Mengen*

$$*T_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\lambda_\alpha = 0,\ \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0,\ \lambda_\alpha \leqq 0,\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}\,,$$

$$*T_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha}\lambda_\alpha = 0,\ \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0,\ \lambda_\alpha \geqq 0,\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}$$

einen polyedrischen Kegel in $'E_n$ *mit dem einzigen Scheitel im Koordinatenursprung* O *in* $'E_n$, *der die Eigenschaft* $\dim *T_1 = \dim *T_2 \geqq 1$ *besitzt, dar. Falls* $^\nu k$ $(\nu = 1, \ldots, \varrho)$ *alle Kanten des Kegels* $*T_1$ *und* $^\nu\mathbf{k} = \{^\nu k_1, \ldots, {}^\nu k_n\}$ *ein Vektor in der Richtung der Kante* $^\nu k$ *ist, so gilt für die Menge* T *aus* (4.11)

$$T = T' \cup T''$$

mit

$$T' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha \lambda_\alpha < 0 \ \text{für}\ \nu \in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0 \ \text{für}\ \nu \in I_2\}\,,$$

$$T'' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha \lambda_\alpha > 0 \ \text{für}\ \nu \in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0 \ \text{für}\ \nu \in I_2\}\,,$$

wobei

$$I_1 = \{\nu \in \{1, \ldots, \varrho\} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha c_\alpha < 0\},\quad I_2 = \{1, \ldots, \varrho\} - I_1$$

ist. Für die Menge $\overline{T}$ *gilt*

$$\overline{T} = T_1 \cup T_2$$

mit

$$T_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0 \ (\nu = 1, \ldots, \varrho)\}\,,$$

$$T_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0 \ (\nu = 1, \ldots, \varrho)\}\,,$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in T_1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in T_2$$

und $\overline{T}$ *stellt einen polyedrischen Doppelkegel in* $'E_n$ *mit den folgenden Eigenschaften dar:*

1) $\overline{T} \neq {'E_n}$;
2) *Der lineare Unterraum*

$$L_0 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {'E_n} \mid \lambda_\alpha = \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r,\ u_r \in (-\infty, \infty)\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}$$

stellt die Menge aller Scheitel des Doppelkegels $\overline{T}$ dar;

3) $\dim \overline{T} = \dim T = n$;
4) $\overline{T}^{\text{int}} \subset T$.

Beweis. Die Behauptungen des Satzes ergeben sich unmittelbar aus den Hilfssätzen 2 bis 5, bzw. aus den Zwischenergebnissen in den Beweisen dieser Hilfssätze und nach dem bekannten Satz über polyedrische Kegel[9]).

Satz 7. *Falls $\mathfrak{M}$ unbeschränkt und ${}^{\nu}h$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ alle unbeschränkten Kanten des Polyeders $\mathfrak{M}$ sind, ${}^{\nu}\mathbf{h} = \{{}^{\nu}h_1, \ldots, {}^{\nu}h_n\}$ ein Vektor in der Richtung der Kante ${}^{\nu}h$ ist, so gilt*

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}! \text{ lösbar} \Leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha c_\alpha \leqq 0 \quad (\nu = 1, \ldots, s)\,.$$

Beweis. Setzen wir zuerst voraus, dass $\max\limits_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!$ unlösbar ist. Der Kegel

$$Q = \{\boldsymbol{\lambda} \in {'E_n} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} \lambda_\alpha = 0,\ \lambda_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\} \tag{4.56}$$

stellt den polaren Kegel zu dem Kegel

$$P = \{\boldsymbol{\lambda} \in {'E_n} \mid \lambda_\alpha = \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r - \eta_\alpha,\quad \eta_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\} \tag{4.57}$$

dar und nach (4.25) gilt

$$^{*}T_2 \subset Q\,. \tag{4.58}$$

Zwischen dem Kegel Q und dem Polyeder $\mathfrak{M}$ gibt es den folgenden Zusammenhang[10]): Ein Vektor ${}^{\nu}\mathbf{h}$ ist ein Vektor in der Richtung einer unbeschränkten Kante von $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn er einen Vektor in der Richtung einer Kante des Kegels Q darstellt. Da im Falle $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, $\max\limits_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!$ unlösbar, das Polyeder $\mathfrak{M}$ stets unbeschränkte Kanten besitzt, so hat auch der Kegel Q aus (4.56) diese Eigenschaft. Bezeichnet man wiederum mit ${}^{\nu}h$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ alle unbeschränkten Kanten des Poly-

[9]) Falls ein polyedrischer Kegel einen d-dimensionalen linearen Unterraum ($d \geqq 1$) als seine Seite enthält, so enthält er keine Seite einer kleineren Dimension und der fragliche lineare Unterraum stellt die Menge aller Scheitel des betreffenden Kegels dar.

[10]) Siehe [1], Hilfssatz 5, wobei das ursprüngliche Problem (3.8) auf das äquivalente Problem (3.13) überführt wurde, damit die Ergebnisse aus der Arbeit [1] benutzt werden könnten.

eders $\mathfrak{M}$, ${}^{\nu}\mathbf{h} = \{{}^{\nu}h_1, \ldots, {}^{\nu}h_n\}$ einen Vektor in Richtung der Kante ${}^{\nu}h$, so gilt

$$P = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0, \ (\nu = 1, \ldots, s)\} \tag{4.59}$$

und nach (3.4) ist

$$P = \mathfrak{A}_2 . \tag{4.60}$$

Wäre nun $\mathbf{c} = \{c_\alpha\} \in P$, so gibt es nach (4.57) Zahlen $\tilde{u}_r \in (-\infty, \infty)$, $\tilde{\eta}_\alpha \geqq 0$ $(r = 1, \ldots$ $\ldots, m; \alpha = 1, \ldots, n)$ mit

$$c_\alpha = \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r - \tilde{\eta}_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

und daher

$$c_\alpha \leqq \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r .$$

Daraus und aus (4.14c) folgt $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathfrak{N}$ und daher ist $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Da aber $\mathfrak{N}$ die Restriktionsmenge des zu dem Problem (1.1a) dualen Problems und $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist, folgt daraus nach dem Dualitätsprinzip, dass das Problem (1.1a) lösbar ist, was der Voraussetzung des Satzes widerspricht. Es gilt daher $\mathbf{c} \notin P$ und nach (4.60) ist $\mathbf{c} \notin \mathfrak{A}_2$. Daraus und aus (4.59) ergibt sich, dass die Indexmenge

$$*I = \{\nu \in \{1, \ldots, s\} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha c_\alpha > 0\} \tag{4.61}$$

die Eigenschaft

$$*I \neq \emptyset$$

hat.

Falls anderseits $\max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!$ lösbar ist, so ist $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Daraus und aus (4.14c) ergibt sich die Existenz von $\tilde{\mathbf{u}} \in E_m$ in der Weise, dass

$$c_\alpha \leqq \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r , \quad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{4.62}$$

gilt, voraus die Existenz die Zahlen $\tilde{\eta}_\alpha \geqq 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ mit

$$\eta_\alpha = \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}\tilde{u}_r - c_\alpha , \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

folgt. Nach (4.57) ist $\mathbf{c} \in P$ und nach (4.59) folgt daraus

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha c_\alpha \leqq 0 \quad (\nu = 1, \ldots, s) .$$

Bemerkung 6. Es lässt sich zeigen, dass im Falle, wo das Problem (1.1a) unlösbar ist, für die Menge T aus (4.11)

$$T = (T_1 \cup T_2) - \bigcup_{\nu \in I_1} R_\nu$$

gilt, wobei

$$R_\nu = \{\lambda \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^\nu k_\alpha \lambda_\alpha = 0\}, \quad \nu \in I_1$$

diejenigen Hyperebenen sind, die den Vektor $\mathbf{c} = \{c_\alpha\}$ nicht enthalten, jedoch in welchen diejenigen Seiten des Kegels T_2 (bzw. T_1) aus (4.26), die zugleich Seiten des Kegels $\mathfrak{A}_2$ (bzw. $\mathfrak{A}_1$) aus (3.2) sind, liegen.

Bemerkung 7. Durch Satz 6 und Bemerkung 6 ist die Menge T aus (4.11) in hinreichender Weise charakterisiert worden. Dies bietet ebenfalls gewisse Möglichkeit der Bestimmung der Menge T in konkreten Fällen.

Satz 8. *Für die Menge*

$$\mathfrak{A} = \{(\lambda, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\lambda, \mu) \neq \emptyset\}$$

gilt:

a) *Falls das Problem* (1.1a) *d. h.* $\max\limits_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!$ *lösbar ist, so ist*

$$\mathfrak{A} = S,$$

wobei S die Bedeutung aus dem Satz 3 *hat*;

b) *Falls das Problem* (1.1a) *unlösbar ist, so gilt*

$$\mathfrak{A} = \{(\lambda, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid (\lambda, \mu) \in S, \ \lambda \in T\},$$

wo T die Bedeutung aus (4.2) *hat und durch* (4.17), (4.34a,b) *charakterisiert ist.*

Beweis. Die Behauptungen a) und b) des Satzes ergeben sich aus (4.3), aus Satz 5 und Satz 6.

Bemerkung 8. Da im Abschnitt 3 die Menge S aus (1.11) hinreichend charakterisiert und die Menge T aus (4.2) in diesem Abschnitt ebenfalls auf Grund ihrer impliziten Darstellung geeignet geometrisch interpretiert (und zugleich analytisch beschrieben) wurde, ergeben sich daraus und aus dem Satz 8 die Grundeigenschaften der Menge $\mathfrak{A}$. Hiemit ist eine Charakteristik des Lösbarkeitsbereiches $\mathfrak{A}$ aus (1.9) für das Problem (1.7) aufgestellt worden.

Die Frage der Lösbarkeit des Problems

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\lambda, \mu)} \{f(\mathbf{x})\}!,$$

sowie der Fall, wo die Restriktionsmenge $\mathfrak{M}$ des ursprünglichen Optimierungsproblems (1.1a) nicht in Gleichungsform vorgegeben ist, soll da nicht angegangen werden, da man diese Fälle in einfacher Art und Weise auf das oben betrachtete Problem überführen kann.

BEISPIEL

Betrachten wir ein konkretes Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!$$

mit

$$f(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2 ,$$

$$\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in E_2 \mid -x_1 + x_2 \leqq 4,\ 2x_1 + 5x_2 \geqq 10,\ x_1, x_2 \geqq 0\} .$$

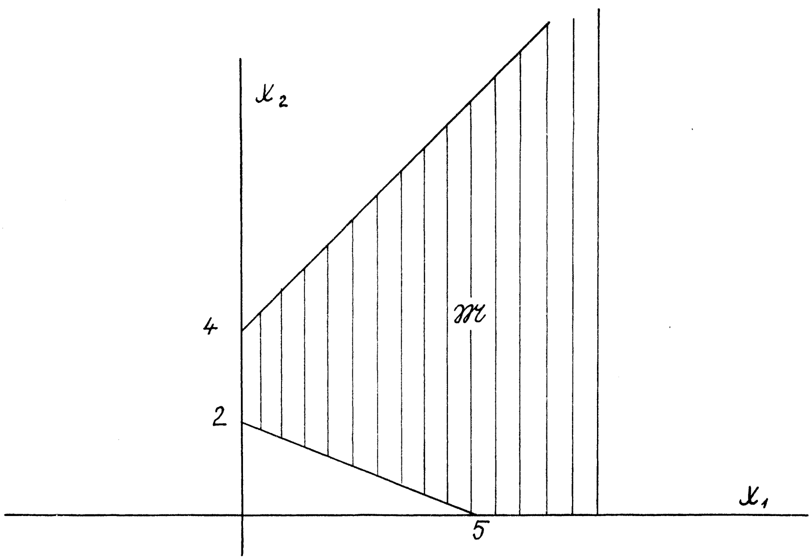

Abb. 1

Das gegebene Problem führen wir auf ein äquivalentes Optimierungsproblem in Gleichungsform über, in dem wir der Menge $\mathfrak{M}$ die Menge $'\mathfrak{M}$ eindeutig zuordnen. (Es ist klar, dass eine Kante von $\mathfrak{M}$ eindeutig einer Kante von $'\mathfrak{M}$ zugeordnet wird. Eine ähnliche Aussage betrifft auch die Ecken von $\mathfrak{M}$ und $'\mathfrak{M}$.)

$$'\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in E_4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 4,\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = 10,\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0\} .$$

Die Voraussetzungen aus (1.1b,c), (1.2), (1.3) sind hier offenbar erfüllt. Um eine anschauliche Vorstellung zu haben, betrachten wir die neue zusätzliche Bedingung in der Form

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \mu .$$

Es soll die Menge $\mathfrak{A}$ aus (1.9) für diese konkrete Aufgabe bestimmt werden.

Wir betrachten zuerst die Probleme

$$\min_{\mathbf{x}\in{}'\mathfrak{M},\boldsymbol{\lambda}\in{}'E_2} \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}!\,, \qquad \max_{\mathbf{x}\in{}'\mathfrak{M},\boldsymbol{\lambda}\in{}'E_2} \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}!\,,$$

wo jedes von ihnen ein zweiparametrisches Optimierungsproblem mit den Parametern in der Zielfunktion darstellt. Die Bestimmung des Lösbarkeitsbereiches bei diesen Problemen kann man entweder auf Grund des Vorgehens aus der Arbeit [3] (das entsprechende Programm für den Rechenautomaten Minsk 22 ist in [4] angeführt), oder, man kann die theoretischen Ergebnisse der Arbeit [1], die im Satz 2 der vorliegenden Arbeit zusammengefasst worden sind, anwenden. Da wir aber die Möglichkeit haben aus der Abbildung 1 unmittelbar alle Ecken und Vektoren in der Richtung aller Kanten des Polyeders $'\mathfrak{M}$ festzustellen, werden die zweite Möglichkeit benutzen.

Die Vektoren in der Richtung der unbeschränkten Kanten $'\mathfrak{M}$ sind hier die Vektoren $(1, 1, 0, 7)$, $(1, 0, 1, 2)$ und daher, nach (3.4) ist

$$\mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 \geqq 0\}\,,$$
$$\mathfrak{A}_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 \leqq 0,\ \lambda_1 \leqq 0\}\,.$$

Aus der Abbildung 1 sieht man, dass der Polyeder $'\mathfrak{M}$ die drei folgenden Ecken $\mathbf{x}_1 = (5, 0, 9, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 2, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 4, 0, 10)$ besitzt und dass aus der Ecke $\mathbf{x}_1$ die Kanten mit den Kantenvektoren $(1, 0, 1, 2)$, $(-5, 2, -7, 0)$ aus der Ecke $\mathbf{x}_2$ die mit den Kantenvektoren $(0, 1, -1, 5)$, $(5, -2, 7, 0)$ und schliesslich aus der Ecke $\mathbf{x}_3$ die mit den Kantenvektoren $(1, 1, 0, 7)$, $(0, -1, 1, -5)$ herausgehen. Daraus und aus (3.5) folgt

$$^{(1)}\mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid -5\lambda_1 + 2\lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 \geqq 0\}\,,$$
$$^{(1)}\mathfrak{A}_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0\}\,,$$
$$^{(1)}\mathfrak{A}_3 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_2 \leqq 0\}\,,$$
$$^{(2)}\mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid -5\lambda_1 + 2\lambda_2 \leqq 0,\ \lambda_1 \leqq 0\}\,,$$
$$^{(2)}\mathfrak{A}_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \leqq 0,\ \lambda_2 \leqq 0\}\,,$$
$$^{(2)}\mathfrak{A}_3 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 \leqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0\}\,.$$

Nach (3.6) ergibt sich für die Funktionen $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$, $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ aus (3.3)

$$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = 5\lambda_1 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_1\,, \quad \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = 2\lambda_2 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_2\,,$$
$$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = 4\lambda_2 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_3\,,$$
$$\varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = 5\lambda_1 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_1\,, \quad \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = 2\lambda_2 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_2\,,$$
$$\varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = 4\lambda_2 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_3\,.$$

Die in (3.15) definierten Mengen haben daher nach (3.30) die Beschreibung

$$U_1 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_3 \mid \lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 \geqq 0,\ 5\lambda_1 - \mu > 0,$$
$$2\lambda_2 - \mu > 0,\ 4\lambda_2 - \mu > 0\}\,,$$

$$U_2 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_3 \mid \lambda_1 + \lambda_2 \leqq 0,\ \lambda_1 \leqq 0,\ 5\lambda_1 - \mu < 0,$$
$$2\lambda_2 - \mu < 0,\ 4\lambda_2 - \mu < 0\}\,.$$

Für die gesuchte Menge S aus (1.10) erhält man nach (3.14)

(5.1) $$S = {}'E_3 - (U_1 \cup U_2)\,.$$

Es bleibt noch übrig die Menge T aus (4.2) zu bestimmen um die Menge $\mathfrak{A}$ laut (4.3) zu beschreiben. Das ursprüngliche Problem $\max\limits_{\mathbf{x} \in {}'\mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!$ ist unlösbar (denn die Vektoren in der Richtung der unbeschränkten Kanten von $'\mathfrak{M}$ gleich ${}^1\mathbf{h} = (1, 1, 0, 7)$, ${}^2\mathbf{h} = (1, 0, 1, 2)$ sind und die Summen $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_{\alpha} c_{\alpha}$, $\nu = 1, 2$ liefern $1 - 2 = -1 < 0$, $1 + 0 = 1 > 0$, voraus nach Satz 7 die Unlösbarkeit folgt). Daraus und aus Satz 5 folgt $T \neq {}'E_2$. Für die Mengen $^*T_1$, $^*T_2$ aus (4.25) erhalten wir

$$^*T_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid \lambda_1 - 2\lambda_2 \leqq 0,\ \ -\lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0,\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \leqq 0,\ \lambda_1, \lambda_2 \leqq 0\}\,,$$
$$^*T_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid \lambda_1 - 2\lambda_2 \geqq 0,\ \ -\lambda_1 + \lambda_2 \leqq 0,\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0\}\,.$$

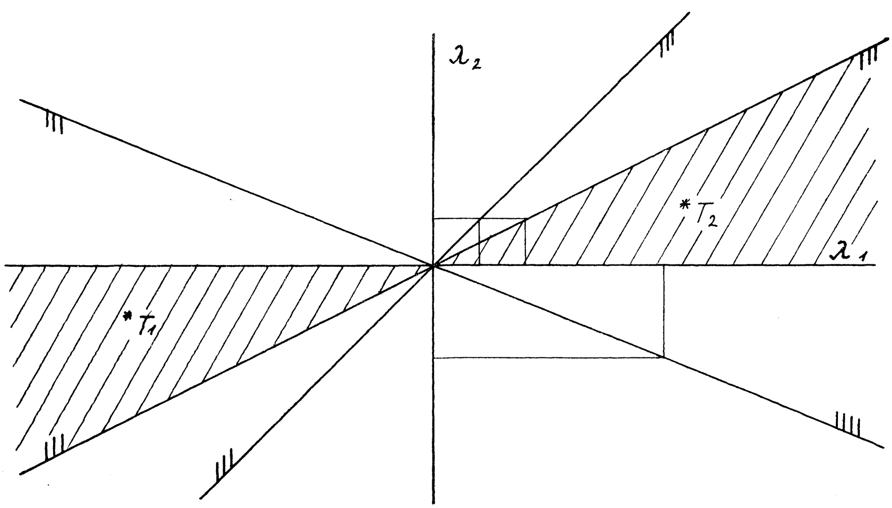

Abb. 2

Nach der Abbildung 2 stellen wir fest, dass die Vektoren in der Richtung der Kanten des Kegels $*T_1$ die Vektoren ${}^1\mathbf{k} = (-1, 0)$, ${}^2\mathbf{k} = (-2, -1)$ sind. Die Formel (4.33) liefert $-1 < 0 \Rightarrow 1 \in I_1$, $-2 + (-1)(-2) = 0 \Rightarrow 2 \in I_2$. Nach (4.34a,b) und (4.17) ist

$$T = T' \cup T'', \tag{5.2}$$

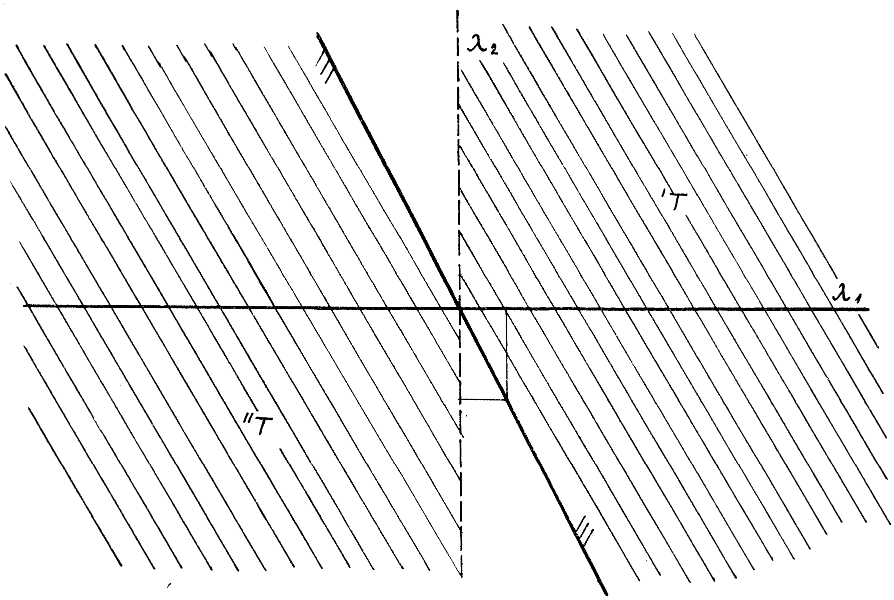

Abb. 3

wo

$$T' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid -\lambda_1 < 0,\ -2\lambda_1 - \lambda_2 \leqq 0\},$$
$$T'' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_2 \mid -\lambda_1 > 0,\ -2\lambda_1 - \lambda_2 \geqq 0\}.$$

Die Menge T aus (5.2) und S aus (5.1) bestimmen nach (4.3) die gesuchte Menge $\mathfrak{A}$.

Literatur

[1] Manuscript des Buches *F. Nožička* und Mitarbeiter: Theorie der parametrischen Optimierung. Kapitel 5.

[2] *Dantzig G. B.:* Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1966.

[3] *Grygarová L.:* Qualitative Untersuchung des I. Optimierungsproblems in mehrparametrischer Programmierung. Aplikace matematiky, čís. 4/15 (1970).

[4] *Maryšková J.:* Diplomarbeit. MFF (1971) (tschechisch).

Souhrn

OBOR ŘEŠITELNOSTI PROBLÉMU LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ S PŘIDÁNÍM DALŠÍ OMEZUJÍCÍ PODMÍNKY

LIBUŠE GRYGAROVÁ

Máme dán obyčejný problém lineárního programování

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}!\,, \tag{1}$$

kde

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha\,, \quad \mathfrak{M} = \{\mathbf{x}\in E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r,\ x_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\}$$

přičemž pouze předpokládáme, že $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ a zajímá nás řešitelnost problému

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda},\mu)} \{f(\mathbf{x})\}! \tag{2}$$

kde

$$\mathfrak{M}(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \{\mathbf{x}\in\mathfrak{M} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha = \mu\}$$

a

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha = \mu$$

je zcela libovolná přidaná omezující podmínka.

Pro obor řešitelnosti $\mathfrak{A}$ tohoto problému (2) platí:

a) $\mathfrak{A} = S$

v případě, že problém (1) je řešitelný;

b) $\mathfrak{A} = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in S,\ \boldsymbol{\lambda} \in T\}$

v případě, že problém (1) řešitelný není.

Přitom

$$\begin{aligned}
S &= {}'E_n - (U_1 \cup U_2)\,,\\
U_1 &= \{\boldsymbol{\lambda}\in{}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{A}_1,\ \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) > \mu\}\,, \quad U_2 = \{\boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{A}_2,\ \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) < \mu\}\,,\\
T &= T' \cup T''\,,\\
T' &= \{\boldsymbol{\lambda}\in{}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha < 0\ \nu\in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0\ \nu\in I_2\}\,,\\
T'' &= \{\boldsymbol{\lambda}\in{}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha > 0\ \nu\in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0\ \nu\in I_2\}\,.
\end{aligned}$$

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Libuše Grygarová*, CSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Malostranské nám. 25, Praha 1.