Aplikace matematiky

Bohuslava Haňková

Lösung einiger Integralgleichungen erster Art. III. Die Fragen der Lösbarkeit

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 3, 183–190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103408`

LÖSUNG EINIGER INTEGRALGLEICHUNGEN ERSTER ART III. DIE FRAGEN DER LÖSBARKEIT

BOHUSLAVA HAŇKOVÁ

(Eingegangen am 25. Februar 1971)

Manche Aufgaben der Elastizitätstheorie, der Wärmeleitung und andere Aufgaben der mathematischen Physik, in welchen die gemischten Randbedingungen auftreten, kann man mittels der Integralgleichungen erster Art lösen. Im Artikel [3] wurden die technischen Probleme eingeführt, für deren Lösung schon früher (siehe die in [3] zitierte Literatur) solche Integralgleichungen zusammengestellt wurden, die verschiedene physikalische Beziehungen ausdrücken, aber vom mathematischen Standpunkt sehr verwandt sind. In vereinfachter Form kann man sie folgenderweise schreiben:

$$(1) \qquad \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi \, . \, \sin ns}{n} \, y(s) \, \mathrm{d}s = f(\varphi) \, , \quad 0 \leqq \varphi \, , \ s \leqq a < \pi \, .$$

In den Artikeln [3] und [4] wurde die Existenz genau einer solchen Lösung $y \in L_2(0, a)$ bewiesen, die die gegebene Integralgleichung im klassischen Sinne erfüllt. Dabei hat man solche rechten Seiten der Gleichung (1) genommen, die hinsichtlich der Ingenieursanwendungen interessant waren. Diesbezüglich wurde das Problem befriedigend aufgelöst. Vom mathematischen Standpunkt ist die Frage der Lösbarkeit der Gleichung (1) für eine „beliebige“ rechte Seite offen geblieben. Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Bestimmung eines solchen Raumes der rechten Seiten, dass in einem gewissen Raum eine einzige Lösung der Gleichung (1) existiert.

Zuerst führen wir zwei definitionen ein

Definition 1. *Erwägen wir eine lineare Mannigfaltigkeit L der Funktionen* $y \in L_2(-\pi, \pi)$, *die auf dem Intervall* $(-\pi, \pi)$ *ungerade sind und ausser dem Intervall* $(-a, a)$, $0 < a < \pi$, *verschwinden. Bezeichnen wir* y_n *die Fourierkoeffizienten der Funktion y und definieren in L die Norm durch die Beziehung* $\|y\| = (\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2/n)^{1/2}$. *Die Abschliessung der gegebenen linearen Mannigfaltigkeit bezüglich dieser Norm bezeichnen wir* $W^{-1/2}$.

Definition 2. *Sei M die Untermenge solcher Funktionen f von der linearen Mannigfaltigkeit L, dass $\sum_{n=1}^{\infty} nf_n^2 < \infty$ ist, wobei f_n die Fourierkoeffizienten der Funktion f sind. Definieren wir in M die Norm durch die Beziehung $\|f\| = (\sum_{n=1}^{\infty} nf_n^2)^{1/2}$. Die Abschliessung der linearen Mannigfaltigkeit M bezüglich dieser Norm bezeichnen wir $W^{1/2}$.*

Die rechte Seite f der Integralgleichung (1) wurde für die Veränderliche $\varphi \in \langle 0, a\rangle$ gegeben. Erweitern wir sie auf das Intervall $\langle -a, a\rangle$ als eine ungerade Funktion und bezeichnen $h(\varphi) = f(\varphi)$ für $\varphi \in \langle -a, a\rangle$, $h(\varphi) = 0$ für $\varphi \in (-\pi, -a) \cup (a, \pi\rangle$. Im Weiterem erwägen wir solche Funktionen $f(\varphi)$, für die $h(\varphi) \in W^{1/2}$ ist.

Bezeichnen wir $\lambda(r, \varphi)$ die auf dem Einheitskreis K harmonische Funktion, die im Sinne der Spuren die Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\lambda(1, \varphi) = h(\varphi) && \text{für} \quad \varphi \in \langle -a, a\rangle\,, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial r}(1, \varphi) = 0 && \text{für} \quad \varphi \in (-\pi, -a) \cup (a, \pi\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

erfüllt. Da $h \in W^{1/2}$ ist, existiert eine einzige Lösung $\lambda \in W_2^{(1)}(K)$ (siehe [2], wo auch die Definition des Raumes $W_2^{(1)}$ eingeführt ist). Dabei gilt ([2])

$$\|\lambda\|_{W_2^{(1)}(K)} \leqq C(\|u_0\|_{W_2^{(1)}(K)} + \|g\|_{L_2(K^\bullet)})\,, \tag{3}$$

wobei $K^\bullet$ die Grenze des Kreises K ist, C ist eine nur von gegebenem Gebiet abhängende Konstante, $g \equiv 0$ in unserem Fall und u_0 ist eine Funktion aus $W_2^{(1)}(K)$, für welche $u_{0/K^\bullet} = h$ im Sinne der Spuren gilt. Da $h \in W^{1/2}$ ist, kann man u_0 so konstruieren, dass $\|u_0\|_{W_2^{(1)}(K)} \leqq C_1\|h\|_{W^{1/2}}$ ist, wobei C_1 nur von gegebenem Gebiet abhängt. Aus (3) folgt

$$\|\lambda\|_{W_2^{(1)}(K)} \leqq C_2\|h\|_{W^{1/2}}\,. \tag{4}$$

Aus den Randbedingungen (2) folgt, dass die Funktion λ eine ungerade Funktion bezüglich der Veränderlichen φ ist, deshalb kann man $\lambda(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi$ schreiben, wobei a_n vorläufig die unbekannten reellen Koeffizienten sind. Nach der Definition der Norm im Raum $W_2^{(1)}$ ([2]) gilt

$$\|\lambda\|^2_{W_2^{(1)}(K)} = \iint_K \lambda^2 \,\mathrm{d}K + \iint_K \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \lambda}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right] \mathrm{d}K \geqq \sum_{n=1}^{\infty} na_n^2\,;\ *)$$

---

*) Für $\lambda(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi$ gilt $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 [(\partial\lambda/\partial r)^2 + (1/r\ \partial\lambda/\partial\varphi)^2]\, r\, \mathrm{d}r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} na_n^2$.

deshalb gilt für die Koeffizienten a_n nach (4) die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 \leqq C_3 \|h\|_{W^{1/2}}^2 ; \tag{5}$$

dabei hängt die Konstante C_3 von $h \in W^{1/2}$ nicht ab.

Definieren wir

$$y_n = n a_n . \tag{6}$$

Nach (5) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2}{n} \leqq C_3 \|h\|_{W^{1/2}}^2 < \infty . \tag{7}$$

Setzen wir zuerst voraus, dass die Lösung λ so glatt ist (und die Koeffizienten a_n solche sind), dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\varphi$ auf $K^\bullet$ gleichmässig konvergieren. Da die Folge $\{r^n\}$ für $r < 1$ eigentlich monoton ist, sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} \sin n\varphi$ auf $\bar{K}$ gleichmässig konvergent und aus den Randbedingungen (2) folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi = h(\varphi) \quad \text{für} \quad \varphi \in \langle -a, a \rangle , \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\varphi = 0 \quad \text{für} \quad \varphi \in (-\pi, -a) \cup (a, \pi \rangle . \tag{9}$$

Definieren wir die Funktion y auf $K^\bullet$ mittels der Gleichung

$$y(s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin ns . \tag{10}$$

Nach (8) ist $y \equiv 0$ für $\varphi \in (-\pi, -a) \cup (a, \pi\rangle$. Also für $\varphi \in \langle 0, a \rangle$ gilt

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi \,.\, \sin ns}{n} y(s) \, ds = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi \,.\, \sin ns}{n} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin ks \, ds =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} y_n \int_0^\pi \sin^2 ns \, ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi = h(\varphi) .$$

Wenn also alle diese Operationen „zulässig“ sind, ist die durch (6) und (10) definierte Funktion die Lösung der Gleichung (1). In Weiterem werden wir zeigen, dass diese

Operationen z. B. in dem Fall „zulässig" sind, wenn die rechte Seite $f(\varphi)$ der Gleichung (1) eine Funktion mit kompaktem Träger ist. (Darunter werden wir schon auch die unendliche Differenzierbarkeit dieser Funktion verstehen.) So wird also die Korrespondenz zwischen den Räumen $W^{1/2}$ und $W^{-1/2}$ gegeben, vorläufig nur für sehr spezielle Funktionen aus dem Raum $W^{1/2}$. Diese Korrespondenz werden wir — als eine Folgerung der mittels der Ungleichung (7) gegebenen Stetigkeit dieser Abbildung — auf den ganzen Raum $W^{1/2}$ erweitern. Da die Funktionen mit kompaktem Träger im Raum $W^{1/2}$ dicht sind, approximieren wir also in allgemeinem Fall die gegebene Funktion aus $W^{1/2}$ durch Funktionen mit kompaktem Träger. Die entsprechende Folge der Lösungen $y_k(s)$ konvergiert in Folge von (7) zu einem gewissen Element $y \in W^{-1/2}$, welches wir die verallgemeinerte Lösung der Gleichung (1) nennen werden. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des betrachteten gemischten Problems (2) und aus der Ungleichung (7) folgt die Eindeutigkeit der so definierten verallgemeinerten Lösung der Gleichung (1).

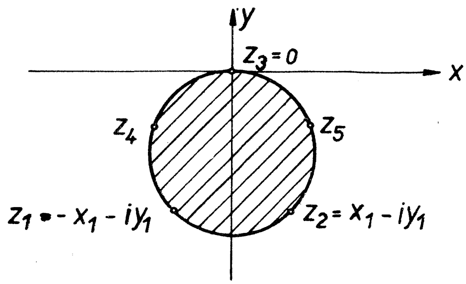

Abb. 1.

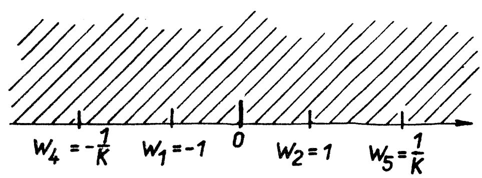

Abb. 2.

Beweisen wir also, dass wenn $f(\varphi)$ eine Funktion mit kompaktem Träger auf dem Intervall $(0, a)$ ist, dann hat die Integralgleichung (1) eine einzige Lösung $y \in L_2(0, a)$.

Bilden wir schrittweise den Kreis K konform a) auf die Oberhalbebene und b) auf das Rechteck folgendermassen ab:

a) Die lineare Abbildung, die zu den Punkten z_1, z_2, z_3 auf der Kreislinie $K^\cdot \equiv$ $\equiv |z + i| = 1$, wobei $z_1 = -x_1 - iy_1$ $(x_1 > 0,\ y_1 > 0)$, $z_2 = x_1 - iy_1$, $z_3 = 0$, drei Punkte $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ auf der reellen Achse zuordnet, wird mittels der Funktion $w = y_1(2 - iz)/x_1 z$ gegeben. (Abb. 1 und Abb. 2.) Speziell den Punkten auf der Kreislinie $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ werden die Punkte $w = -y_1 x/x_1 y$ zugeordnet. Weil $y \in \langle -2, 0 \rangle$ ist, nimmt die Funktion $w(y)$ für $x = +\sqrt{(-y^2 - 2y)}$ von Null bis $+\infty$ zu, für $x = -\sqrt{(-y^2 - 2y)}$ ist diese eine abnehmende Funktion von Null bis $-\infty$. Wenn wir $x = x_1$, $y = -y_1$ legen, es wird $w = 1$; für $x = -x_1$, $y = -y_1$ wird es $w = -1$. Weiter wählen wir die Zahl k $(0 < k^2 < 1)$, dann existieren Punkte $z_4 = x_4 + iy_4$, $z_5 = x_5 + iy_5$, die auf der Kreislinie $|z + i| = 1$ liegen, für deren Koordinaten $y_4 = y_5 > y_1$ gilt und denen die Punkte $w_4 = -1/k$, $w_5 = 1/k$ entsprechen.

b) Die Funktion

$$\Phi = H(w) = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{((1-t^2)(1-k^2t^2))}}, \quad 0 < k^2 < 1\,,^{*)}$$

bildet die Oberhalbebene auf das Rechteck Ω mit den Scheiteln $A[\omega_1, 0]$, $B[\omega_1, \omega_2]$, $C[-\omega_1, \omega_2]$, $D[-\omega_1, 0]$ ab, wobei ω_1 und ω_2 positive Zahlen sind:

$$\omega_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{((1-t^2)(1-k^2t^2))}}, \quad \omega_2 = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{((t^2-1)(1-k^2t^2))}}.$$

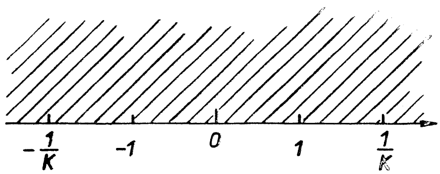

Abb. 3.

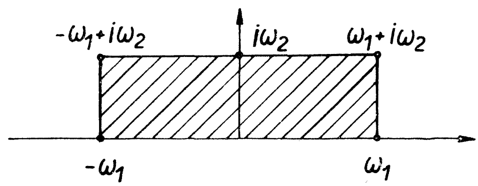

Abb. 4.

Dabei für $0 < w < 1$ liegt $H(w) = \Phi$ im Intervall $(0, \omega_1)$, für $w \in (1, 1/k)$, bzw. $w \in (-1/k, -1)$, liegt Φ auf der orientierten Strecke $\overline{AB}$, bzw. $\overline{CD}$; wenn w auf der reellen Achse von $1/k$ bis $+\infty$, bzw. von $-\infty$ bis $-1/k$, durchläuft, läuft Φ die Strecke von $\omega_1 + i\omega_2$ bis $i\omega_2$, bzw. von $i\omega_2$ bis $-\omega_1 + i\omega_2$ durch. (Abb. 3 und 4.)

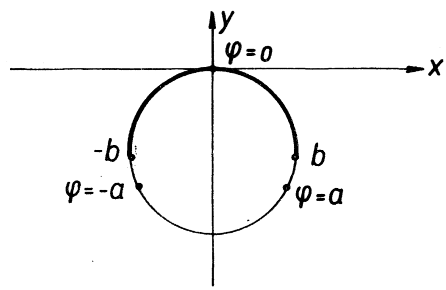

Abb. 5.

Den Teil der Kreislinie $K^\bullet$ für $\varphi \in (-a, a)$ kann man also konform auf den Teil der Grenze $\Omega^\bullet$ des Rechteckes $ABCD$ abbilden; dabei läuft Φ schrittweise die Strecken $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$ durch. (Abb. 5 und 6.)

Setzen wir die Funktion $f(\varphi)$ als ungerade Funktion auf das Intervall $(-a, a)$ und weiter als Nullfunktion auf das Intervall $\langle -\pi, \pi \rangle$ fort und bezeichnen sie $h(\varphi)$. Die Funktion $h(\varphi)$ hat einen kompakten Träger in dem Intervall $(-a, a)$ und ist höchstens in den Punkten des Intervalls $\langle -b, b \rangle$, das im Intervall $(-a, a)$ liegt, von Null verschieden.

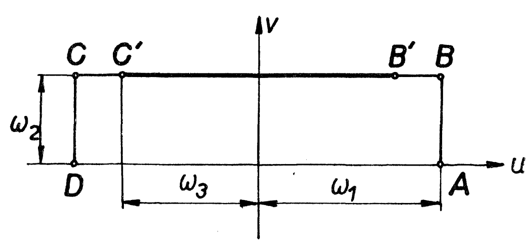

Abb. 6.

---

*) Die Werte der zweideutigen Funktion $\sqrt{((1-t^2)(1-k^2t^2))}$ nehmen wir aus dem Kurvenzweig, der für $t \in (0, 1)$ positive Werte annimmt.

Aus den Eigenschaften der angeführten konformen Abbildung folgt, dass dem Intervall $\langle -b, b \rangle$ die Strecke $\overline{C'B'}$ entspricht; bezeichnen wir dieses Intervall $\langle -\omega_3, \omega_3 \rangle \subset \langle -\omega_1, \omega_1 \rangle$. Der Funktion $h(\varphi)$, $\varphi \in \langle -b, b \rangle$, entspricht die Funktion $\tilde{h}(u)$, $u \in \langle -\omega_3, \omega_3 \rangle$.

Bezeichnen wir b_n die Fourier-Sinuskoeffizienten der Funktion $\tilde{h}$ im Intervall $\langle -\omega_1, \omega_1 \rangle$ und bilden wir die Funktion

$$(11) \qquad U(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi u}{\omega_1}\right) \frac{\cosh(n\pi v/\omega_1)}{\cosh(n\pi\omega_2/\omega_1)}, \quad \begin{array}{l} u \in \langle -\omega_1, \omega_1 \rangle \\ v \in \langle 0, \omega_2 \rangle . \end{array}$$

In Hinsicht auf die Tatsache, dass b_n die Fourierkoeffizienten einer Funktion mit kompaktem Träger auf $\langle -\omega_1, \omega_1 \rangle$ sind, hat die Funktion $U(u, v)$ sogar Ableitungen aller Ordnungen nach u und v einschliesslich der Grenze $\Omega^{\bullet}$ und diese Ableitungen kann man mittels des gliedweisen Differenzierens der Reihe (11) bekommen. Von hier folgt leicht, dass die Funktion $U(u, v)$ in Ω harmonisch ist und auf $\Omega^{\bullet}$ die Randbedingungen: $U(\pm\omega_1, v) = 0$, $U(u, \omega_2) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi u/\omega_1)$, $(\partial U/\partial v)(u, 0) = 0$ erfüllt. Offenbar ist also die Funktion $U(u, v)$ das konforme Bild der gesuchten Funktion $\lambda(r, \varphi)$. Die stetige Fortsetzung der Funktion $U(u, v)$ auf $\Omega^{\bullet}$ ist (als Funktion des Parameters s auf der Grenze) eine stetige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung. Die benützte konforme Abbildung ist stetig einschliesslich der Grenze und längs der Grenze besitzt diese Ableitungen beliebiger Ordnung mit Ausnahme der Punkte z_1, z_2, z_4, z_5, die den Punkten A, B, C, D entsprechen; hier hat die Abbildung eine unendliche Ableitung. Auch die inverse konforme Abbildung ist stetig einschliesslich der Grenze. Von hier folgt vor allem, dass $\lambda(r, \varphi)$ eine stetige Funktion im $\bar{K}$ ist. Bezeichnen wir $\lambda(1, \varphi) = F(\varphi)$. Aus den Eigenschaften der benützten konformen Abbildung und der Funktion $U(u, v)$ folgt es, dass die Funktion $F(\varphi)$ auf $K^{\bullet}$ stetig ist, auf $K^{\bullet}$ endliche Variation und intergrierbare Ableitung hat. Daher folgt auch, dass die Koeffizienten a_n in der Entwicklung $\lambda(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi$ genau die Fourier-Sinuskoeffizienten der Funktion $F(\varphi)$ auf $K^{\bullet}$ sind. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi$ auf $K^{\bullet}$ gleichmässig gegen $F(\varphi)$ konvergiert und die Folge $\{r^n\}$ für $r < 1$ eigentlich monoton ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi$ gleichmässig auf $\bar{K}$. Also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi$ ist die gesuchte Lösung und aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt die angeführte Behauptung. Da für $\varphi \in \langle -a, a \rangle$ $F(\varphi) = h(\varphi)$ ist, gilt besonders $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi = h(\varphi)$, $\varphi \in \langle -a, a \rangle$, und so ist für unseren Fall die Gültigkeit der Gleichung (8) bestätigt.

Betrachten wir jetzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\varphi$. Für $z = x + iy$ gilt $\sin z = \sin x$.

. cosh y + i cos x . sinh y. Dafür wenn

$$U(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi u}{\omega_1}\right) \frac{\cosh(n\pi v/\omega_1)}{\cosh(n\pi\omega_2/\omega_1)}$$

ist und wenn wir

$$V(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega_1}\right) \frac{\sinh(n\pi v/\omega_1)}{\cosh(n\pi\omega_2/\omega_1)}$$

bezeichnen, wird

$$U + iV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\cosh(n\pi\omega_2/\omega_1)} \sin(n\pi z/\omega_1).$$

gelten.

Die zur Funktion U konjugierte Funktion V ist offenbar wieder stetig auf $\Omega^{\bullet}$ fortsetzbar und auf den Teilen von $\Omega^{\bullet}$ sind deren entsprechende partielle Ableitungen stetig. Die Funktion $U + iV$ ist das konforme Bild der Funktion $\lambda + i\mu$, wobei – wie aus der Form der Funktion $\lambda(r, \varphi)$ folgt – $\mu(r, \varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \cos n\varphi$ gilt. Bezeichnen wir die stetige Fortsetzung dieser Funktion μ auf $K^{\bullet}$ als $G(\varphi)$. Ähnlich wie für die Funktion $F(\varphi)$ kann man zeigen, dass die Funktion $G(\varphi)$ auf $K^{\bullet}$ stetig ist, auf $K^{\bullet}$ endliche Variation und integrierbare Ableitung $G'(\varphi)$ hat und dass a_n – bis auf das Vorzeichen – ihre Fourier-Kosinuskoeffizienten sein müssen, also es ist

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G'(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi .$$

Die Fourier-Sinuskoeffizienten c_n der Funktion $G'(\varphi)$ sind dadurch $c_n = na_n$. Da auf $K^{\bullet}$ ausser dem Intervall $\langle -a, a\rangle$ $G' \equiv 0$ ist, gilt $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin n\varphi = 0$ für diese φ. So ist für den betrachteten Fall die Gleichung (9) bestätigt.

Die mittels der Beziehung (10) definierte Funktion $y(s)$ ist die Fourierreihe der Funktion G', die stückweise stetig und also quadratisch integrierbar im Intervall $(-\pi, \pi\rangle$ ist. Nach dem bekannten Satz*) kann man leicht zeigen, dass die Umtauschungen der Integrationen und Summationen auf der 185. Seite berechtigt sind und dass also im Fall, wenn die Funktion $f(\varphi)$ auf dem Intervall $\langle 0, a\rangle$ einen kompakten Träger hat, wird durch die Funktion (10) die klassische Lösung der Integralgleichung (1) gegeben, was wir beweisen sollten.

*) Wenn $g(s) \in L_2(c, d)$ und die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ im Mittel auf $\langle c, d\rangle$ konvergiert, dann kann man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) \, . \, g(s)$ auf dem Intervall $\langle c, d\rangle$ gliedweise integrieren. Bemerken wir, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx \, . \, \sin ns)/n$ auf dem Intervall $\langle -\pi, \pi\rangle$ für alle x im Mittel konvergiert.

Wenn wir zum Text auf der 186. Seite zurückkehren, können wir die Ergebnisse dieses Artikels in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz. Die Integralgleichung (1) hat für jede Funktion f, für die $h(\varphi) \in W^{1/2}$ ist, eine einzige verallgemeinerte Lösung $y \in W^{-1/2}$.

Literatur

[1] *W. Schmeidler:* Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig 1950

[2] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Praha 1967.

[3] *B. Haňková:* Řešení některých integrálních rovnic prvního druhu. Aplikace matematiky 11 (1966).

[4] *B. Haňková:* Řešení některých integrálních rovnic prvního druhu (II). Aplikace matematiky 12 (1967).

Souhrn

ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO DRUHU III. OTÁZKY ŘEŠITELNOSTI

BOHUSLAVA HAŇKOVÁ

Při daném jádru zkoumáme řešitelnost rovnice $\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\varphi \cdot \sin ns)/n \, y(s) \, ds = f(\varphi)$ pro libovolnou pravou stranu f. Jsou definovány prostory $W^{1/2}$ a $W^{-1/2}$ takové, že každé funkci $f \in W^{1/2}$ je přiřazeno právě jedno řešení $y \in W^{-1/2}$, přičemž toto zobrazení je spojité. Je ukázáno, že je-li f funkce s kompaktním nosičem, je příslušná funkce $y \in W^{-1/2}$ klasickým řešením dané integrální rovnice. Protože funkce s kompaktním nosičem jsou husté v prostoru $W^{1/2}$ a uvedené zobrazení je spojité, můžeme řešení nalezená pro libovolné pravé strany z prostoru $W^{1/2}$ nazvat zobecněnými řešeními dané integrální rovnice.

Anschrift der Verfasserin: RNDr. *Bohuslava Haňková,* CSc., katedra matematiky Stavební fakulty ČVUT, Trojanova 13, Praha 2.