Josef Kofroň

Die ableitungsfreien Fehlerabschätzungen von Interpolationsformeln

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 2, 137–152

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103402`

DIE ABLEITUNGSFREIEN FEHLERABSCHÄTZUNGEN VON INTERPOLATIONSFORMELN

JOSEF KOFROŇ

(Eingegangen am 21. Januar 1971)

In der Arbeit [1] wurde eine Formel, die zur ableitungsfreien Abschätzungen des Quadraturformelrestgliedes dienen soll, abgeleitet und es wurde angedeutet, wie man ähnliche Formeln für Interpolationsformeln konstruieren kann. Hier wird gezeigt, wie man im ganz allgemeinen Falle die unendliche Reihe, die sich in der betreffenden Formel befindet, summieren kann. Daraus werden für eine Reihe von Interpolationsverfahren ableitungsfreie Abschätzungsformeln abgeleitet.

1.

Es sei die spezielle Interpolationsformel in $\langle -a, a\rangle$ $(a \in (0, 1))$ der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} t_k^{(n)}(x) f(x_k^{(n)}) + R_{n+1}(f) \tag{1}$$

gegeben. Hierin $t_k^{(n)}(x)$ sind die Polynome von x vom Grade n und $x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sind die Knoten der Formel.

Bemerkung. Es sei die Interpolationsformel in $\langle A, B\rangle$

$$u(y) = \sum_{k=0}^{n} P_k^{(n)}(y)\, u(y_k^{(n)}) + r_{n+1}(y) \tag{2}$$

gegeben ($A < B$ sind endliche, reelle Zahlen, $P_k^{(n)}(y)$ sind Polynome n-ten Grades von y, $y_k^{(n)} < y_{k+1}^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $y_k^{(n)} \in \langle A, B\rangle$, $k = 0, 1, \ldots, n$.) Dann führen wir diese Formel durch die Substitution

$$y = \frac{B-A}{2a}\left(x - a\,\frac{A+B}{B-A}\right) \tag{3}$$

auf die Form (1) über:

$$x = \frac{a}{B - A} (2y - (A + B)) . \tag{4}$$

Satz 1. *Es sei* (1) *die Interpolationsformel in welcher* $f(z)$ *für* $|z| < 1$ *eine holomorphe Funktion ist.*

Die Funktion $f(z)$ *sei für* $|z| = 1$ *stetig und nehme in dem Intervall* $\langle -a, a\rangle$ $(a \in (0, 1))$ *nur reelle Werte an. Dann gilt die folgende Ungleichheit für jedes* $x \in \langle -a, a\rangle$:

$$|R_{n+1}(f)|^2 \leqq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |R_{n+1}(x^k)|^2 \int_\Gamma |f(\zeta)|^2 \, ds . \tag{5}$$

Hier ist $\Gamma = \mathscr{E}(z; z = e^{i\varphi}, \varphi \in \langle 0, 2\pi))$ *und* s *ist die Bogenlänge des Kreises* Γ.

Der Beweis läuft ebenso wie die Beweise der analogischen Sätze für die Quadraturformeln – siehe [4], [5]. Sinngemäss ist auch $\sigma^2_{n+1}(a; x)$ zu definieren:

$$\sigma^2_{n+1}(a; x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |R_{n+1}(x^k)|^2 . \tag{6}$$

Es sei $\omega_{n+1}(x)$ das Polynom $(n + 1)$-ten Grades von x im Intervall $\langle -a, a\rangle$, $a \in \in (0, 1)$:

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0^{(n)}) (x - x_1^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}) , \tag{7}$$

wo $x_i^{(n)} \in \langle -a, a\rangle$, $i = 0, 1, \dots, n$ die gegebenen verschiedenen Zahlen sind. $R_{n+1}(f)$ sei durch die Gleichheit (1) gegeben. Wenn wir

$$t_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k^{(n)}) \, \omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} \tag{8}$$

bezeichnen, (hier ist $\omega'_{n+1}(x_k^{(n)}) = (x_k^{(n)} - x_0^{(n)}) (x_k^{(n)} - x_1^{(n)}) \dots (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) (x_k^{(n)} - - x_{k+1}^{(n)}) \dots (x_k^{(n)} - x_n^{(n)})$), erhalten wir dann der Gleichheit (6) nach:

$$2\pi\sigma^2_{n+1}(a; x) = \frac{x^{2(n+1)}}{1 - x^2} - 2x^{n+1} \sum_{k=0}^{n} t_k^{(n)}(x) \frac{(x_k^{(n)})^{n+1}}{1 - x x_k^{(n)}} + \\ + \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} t_k^{(n)}(x) \, t_l^{(n)}(x) \frac{(x_k^{(n)} x_l^{(n)})^{n+1}}{1 - x_k^{(n)} x_l^{(n)}} . \tag{9}$$

Weiter werden wir voraussetzen, dass

$$x_i^{(n)} = -x_{n-i}^{(n)} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{10}$$

ist.

Satz 2. *Es sei n ungerade (die Anzahl der Knoten $x_i^{(n)}$ ist gerade), dann wenn* (10) *erfüllt ist, ist mit Rücksicht auf* (7)

$$\sigma_{n+1}^2(a; x) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_{n+1}^2(x)\, Q_{n+1}(x)}{(1 - x^2)\, x^{n+1} \omega_{n+1}(1/x)}, \tag{11}$$

wo $Q_{n+1}(x)$ ein gerades Polynom von x des Grades $n + 1$ ist. Die Koeffizienten des Polynoms $Q_{n+1}(x)$ berechnet man mit Hilfe des folgenden Systems linearer Gleichungen vom Grade $\frac{1}{2}(n + 3)$:

$$\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n+1)} q_{2j} (x_i^{(n)})^{2j} = \frac{1}{\omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})} \quad \textit{für} \quad i = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(n - 1)$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n+1)} q_{2j} = \frac{1}{2\omega_{n+1}(1)},$$

wo $Q_{n+1}(x) = q_{n+1} + q_{n-1}x^2 + \ldots + q_0 x^{n+1}$.

Beweis. Definieren wir ein Hilfspolynom $M_{n+3}(x)$ vom Grade $n + 3$ von x:

$$M_{n+3}(x) = (1 - x^2) \prod_{i=0}^{n} \left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}} \right). \tag{13}$$

Das Polynom (13) hat ersichtlich die folgenden Wurzeln:

$$1, \; -1, \; \frac{1}{x_i^{(n)}}, \; i = 0, 1, \ldots, n.$$

Es ist (der Strich beim Symbol $\sum$, bzw. $\prod$ bedeutet, dass das Glied mit dem zugeschriebenen Index auszulassen ist):

$$M_{n+3}(x) \sum_{j=0}^{\infty} |R_{n+1}(x^j)|^2 = \tag{14}$$

$$= x^{2(n+1)} \prod_{i=0}^{n} \left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}} \right) + 2x^{n+1}(1 - x^2) \sum_{k=0}^{n} t_k^{(n)}(x)\, (x_k^{(n)})^n \prod_{i=0}^{n}{}'_k \left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}} \right) +$$

$$+ M_{n+3}(x) \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} t_k^{(n)}(x)\, t_l^{(n)}(x) \frac{(x_k^{(n)} x_l^{(n)})^{n+1}}{1 - x_k^{(n)} x_l^{(n)}} \equiv P_{3n+3}(x).$$

(Der Grad des Polynoms P ist ersichtlich $3n + 3$.) Hier haben wir benutzt, dass

$$\frac{\prod_{i=0}^{n} (x - 1/x_i^{(n)})}{1 - x x_k^{(n)}} = - \frac{1}{x_k^{(n)}} \prod_{i=0}^{n}{}'_k \left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}} \right)$$

ist.

Es gilt nach (10)

$$\prod_{i=0}^{n} \left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right) = \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(x^2 - \frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right) \tag{15}$$

und sinngemäss

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (x^2 - (x_i^{(n)})^2)\,. \tag{16}$$

Mit Hilfe (15) und (16) ergibt sich leicht, dass

$$\omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\omega_{n+1}(0)}{x^{n+1}} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(x^2 - \frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right) \tag{17}$$

und folglich

$$M_{n+3}(x) = (1 - x^2)\, x^{n+1} \omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\omega_{n+1}(0)}\,. \tag{18}$$

Aus dem Ausdruck für $2\pi\sigma_{n+1}^2(a; x)$ ist es sogleich zu sehen, dass $x_i^{(n)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ doppelte Wurzeln des Ausdrucks $2\pi\sigma_{n+1}^2(a; x)$ sind. Hieraus und aus (17) folgt, dass

$$\sigma_{n+1}^2(a; x) = \frac{\omega_{n+1}(0)}{2\pi} \frac{\omega_{n+1}^2(x)\bar{Q}_{n+1}(x)}{(1 - x^2)\, x^{n+1} \omega_{n+1}(1/x)} \tag{19}$$

ist. Hier ist

$$Q_{n+1}(x) = \bar{q}_{n+1} + \bar{q}_n x + \ldots + \bar{q}_1 x^n + \bar{q}_0 x^{n+1}\,.$$

Um die Koeffizienten $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{n+1}$ des Polynoms $\bar{Q}_{n+1}(x)$ zu bestimmen, brauchen wir $(n + 2)$ unabhängige Bedingungen. Diese berechnen wir aus der Gleichheit

$$\bar{Q}_{n+1}(x) = \frac{P_{3n+3}(x)}{\omega_{n+1}^2(x)}\,, \tag{20}$$

welche aus (19) sogleich folgt.

Für $k = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(n - 1)$ ist

$$\prod_{i=0}^{n}{}'_k \left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right) = \left(x + \frac{1}{x_k^{(n)}}\right) \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}'_k \left(x^2 - \frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right). \tag{21}$$

Für $k = \frac{1}{2}(n + 1), \frac{1}{2}(n + 3), \ldots, n$ ist ersichtlich:

$$\prod_{i=0}^{n}{}'_k \left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right) = \left(x - \frac{1}{x_{n-k}^{(n)}}\right) \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}'_{n-k} \left(x^2 - \frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right). \tag{22}$$

Weiter haben wir nach (16)

$$(23) \qquad t_k^{(n)}(x) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (x^2 - (x_i^{(n)})^2)}{(x - x_k^{(n)})\, \omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} \,.$$

Hieraus folgt schrittweise

$$(24) \quad t_k^{(n)}(x) = \frac{(x + x_k^{(n)})}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}'_k \,(x^2 - (x_i^{(n)})^2) \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(n-1)\,,$$

$$(25) \quad t_k^{(n)}(x) = \frac{(x - x_{n-k}^{(n)})}{\omega'_{n+1}(-x_{n-k}^{(n)})} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}'_{n-k} \,(x^2 - (x_i^{(n)})^2) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2}(n+1), \tfrac{1}{2}(n+3), \ldots, n\,.$$

Hier ist für $k = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$:

$$(26) \qquad \omega'_{n+1}(x_k^{(n)}) = 2x_k^{(n)} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}'_k \,((x_k^{(n)})^2 - (x_i^{(n)})^2)$$

und soeben für $k = \frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(n+3), \ldots, n$

$$(27) \qquad \omega'_{n+1}(x_k^{(n)}) = -2x_{n-k}^{(n)} \prod_{j=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}'_{n-k} \,((x_{n-k}^{(n)})^2 - (x_j^{(n)})^2)\,.$$

Wenn es jetzt $x = 1/x_j^{(n)}$, $j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$ ist, finden wir

$$(28) \qquad P_{3n+3}\left(\frac{1}{x_j^{(n)}}\right) = \frac{2}{(x_j^{(n)})^{2n+2}} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left((x_j^{(n)})^2 - \frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right)$$

und endlich erhalten wir

$$(29) \qquad \bar{Q}_{n+1}\left(\frac{1}{x_j^{(n)}}\right) = \frac{2}{\omega_{n+1}(0)\,(x_j^{(n)})^{n+1}\,\omega_{n+1}(1/x_j^{(n)})}\,.$$

Weiter ist

$$(30) \qquad \bar{Q}_{n+1}(1) = \frac{1}{\omega_{n+1}(0)\,\omega_{n+1}(1)}\,.$$

Wir beweisen jetzt die Gleichheit $\bar{Q}_{n+1}(-x) = \bar{Q}_{n+1}(x)$. Zu diesem Zweck drücken wir das Glied mit dem Index j in der Reihe für $2\pi\sigma_{n+1}^2(a; x)$ aus:

$$(31) \qquad (x_j^{(n)} - \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (x^2 - (x_i^{(n)})^2)\,.$$

$$\cdot \left[\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(x_k^{(n)})^j}{(x - x_k^{(n)})\,\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} + \sum_{k=\frac{1}{2}(n+1)}^{n} \frac{(x_k^{(n)})^j}{(x - x_k^{(n)})\,\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})}\right].$$

Das zweite Glied in der eckigen Klammer ist

$$-\sum_{l=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(-x_l^{(n)})^j}{(x + x_l^{(n)})\, \omega'_{n+1}(x_l^{(n)})}\,.$$

Für den ganzen Ausdruck in den Klammern in (31) haben wir

$$(32)\qquad \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(x_k^{(n)})^j (x + x_k^{(n)}) - (-x_k^{(n)})^j (x - x_k^{(n)})}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})\,(x^2 - (x_k^{(n)})^2)}\,.$$

Der Zähler in (32) ist

$$(33)\qquad (x_k^{(n)})^j x + (x_k^{(n)})^{j+1} - (-1)^j (x_k^{(n)})^j x + (-1)^j (x_k^{(n)})^{j+1}\,.$$

Es sei jetzt j gerade. (33) ist dann gleich $2(x_k^{(n)})^{j+1}$ und folglich haben wir für (32)

$$2\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(x_k^{(n)})^{j+1}}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})\,(x^2 - (x_k^{(n)})^2)}$$

und für (31) ist

$$(34)\qquad x^j - 2\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (x^2 - (x_i^{(n)})^2) \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(x_k^{(n)})^{j+1}}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})\,(x^2 - (x_k^{(n)})^2)}\,.$$

Wenn j anderenteils ungerade ist, ist (33) gleich $2x(x_k^{(n)})^{j+1}$ und (32) nimmt die Form

$$2x\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(x_k^{(n)})^{j+1}}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})\,(x^2 - (x_k^{(n)})^2)}$$

an.

Jetzt haben wir für (31)

$$(35)\qquad x^j - 2x\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (x^2 - (x_i^{(n)})^2) \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(x_k^{(n)})^{j+1}}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})\,(x^2 - (x_k^{(n)})^2)}\,.$$

Es ist sogleich zu sehen, dass (34) eine gerade und (35) eine ungerade Funktion von x ist. Nachdem jedes Glied in der Reihe für $2\pi\sigma_{n+1}^2(a; x)$ in der zweiten Potenz vorkommt, ist die Summe dieser Reihe eine gerade Funktion von x. Hieraus folgt, dass $P_{3n+3}(x)$ auch eine gerade Funktion von x ist. Nach (20) ist $\bar{Q}_{n+1}(x)$ dann auch ein gerades Polynom. Es ist also hinreichend nur die Koeffizienten $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{n-1}, \bar{q}_{n+1}$ (die $\frac{1}{2}(n + 3)$ Unbekannten) zu berechnen. Diese bestimmen wir aus den Identitäten (29) ($\frac{1}{2}(n + 1)$ Bedingungen) und aus der Identität (30). Nach (19) ist es möglich in jeder von den Bedingungen (29) und (30) die Multiplikative Konstante $\frac{1}{2}(\omega_{n+1}(0))$ abspalten.

Das Gleichungssystem ist dann von der Form (12), wobei $\bar{q}_i = 2/(\omega_{n+1}(0))\, q_i$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3. *Es sei n ungerade (die Anzahl der Knoten ist gerade) und sei (10) erfüllt. Es gilt dann mit Rücksicht auf (7):*

$$\sigma_{n+1}^2(a; x) = \frac{2}{\pi} \omega_{n+1}^2(x) \,. \tag{64}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{x_i^{(n)}}{(1-(x_i^{(n)})^2)((x_i^{(n)})^2 x^2 - 1)\, \omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})\, \omega_{n+1}'(x_i^{(n)})} + \frac{1}{4(1-x^2)\, \omega_{n+1}^2(1)} \right\}.$$

Beweis. Schreiben wir nach dem Satz 2 das im Ausdruck (11) auftretende Polynom $Q_{n+1}(x)$ folgendermassen

$$Q_{n+1}(x) = q_{n+1} + q_{n-1}x^2 + \ldots + q_2 x^{n-1} + q_0 x^{n+1} \,.$$

Nach (12) ist

$$(x_i^{(n)})^{n+1}\, Q_{n+1}\left(\frac{1}{x_i^{(n)}}\right) = \frac{1}{\omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1) \tag{36}$$

$$Q_{n+1}(1) = \frac{1}{2\omega_{n+1}(1)} \,.$$

Konstruieren wir das Polynom

$$\Omega_{n+3}(x) = (x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{(x_0^{(n)})^2}\right) \ldots \left(x^2 - \frac{1}{(x_{\frac{1}{2}(n-1)}^{(n)})^2}\right).$$

Wenn wir $x = (x_j^{(n)})^{-1}$ $(j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(n-1))$ mit $x = 1$ einsetzen, können wir nach (36) verifizieren, dass die Gleichheit

$$Q_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\Omega_{n+3}(x) \,.\, 2}{x_i^{(n)}(x^2 - 1/(x_i^{(n)})^2)\, \Omega_{n+3}'(1/x_i^{(n)})} \frac{1}{(x_i^{(n)})^{n+1}\, \omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})} +$$
$$+ \frac{\Omega_{n+3}(x)}{(x^2 - 1)\, \Omega_{n+3}'(1)} \frac{1}{\omega_{n+1}(1)}$$

gilt, denn für $j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$ ist schrittweise

$$\lim_{x \to (x_j^{(n)})^{-1}} \frac{\Omega_{n+3}(x)}{x^2 - (x_j^{(n)})^{-2}} = \frac{x_j^{(n)}\, \Omega_{n+3}'((x_j^{(n)})^{-1})}{2} \,,$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\Omega_{n+3}(x)}{x^2 - 1} = \frac{\Omega_{n+3}'(1)}{2} \,.$$

Ersichtlich ist $\Omega_{n+3}(x) = 1/\omega_{n+1}(0)\,(x^2 - 1)\, \omega_{n+1}(1/x)\, x^{n+1}$, folglich

$$\Omega_{n+3}'(x) = \frac{1}{\omega_{n+1}(0)} \,.$$

$$\cdot \left\{(n+1)\, x^n(x^2 - 1)\, \omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n+1}\, 2x\omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-1}(x^2 - 1)\, \omega_{n+1}'\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Hieraus

$$\Omega'_{n+3}\left(\frac{1}{x_i^{(n)}}\right) = \frac{\left((x_i^{(n)})^2 - 1\right)\omega'_{n+1}(x_i^{(n)})}{\omega_{n+1}(0)\,(x_i^{(n)})^{n+1}} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(n-1)$$

und $\Omega'_{n+3}(1) = 2\omega_{n+1}(1)/\omega_{n+1}(0)$. Der Beweis kann nun leicht beendet werden.

Satz 4. *Die Anzahl n der Glieder in* (1) *sei gerader* (*die Anzahl der Knoten ist ungerade*). *Wenn* (10) *erfüllt ist, ist mit Rücksicht auf* (7)

$$\sigma^2_{n+1}(a; x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\omega^2_{n+1}(x)\,Q_n(x)}{(1-x^2)\,x^{n+1}\,\omega_{n+1}(1/x)}, \tag{37}$$

wo $Q_n(x)$ ein gerades Polynom von x vom Grade n ist. Die Koeffizienten q_i berechnet man als die Lösung des folgenden Gleichungssystems des Grades $\frac{1}{2}n + 1$:

$$\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}n} q_{2j}(x_i^{(n)})^{2j} = \frac{1}{x_i^{(n)}\,\omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})} \quad \textit{für} \quad i = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}n - 1 \tag{38}$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}n} q_{2j} = \frac{1}{2\omega_{n+1}(1)},$$

wo $Q_n(x) = q_n + q_{n-2}x^2 + \ldots + q_0x^n$.

Der Beweis ist analogisch wie im Falle für ungerade n. Definieren wir das Hilfspolynom $N_{n+2}(x)$ von x des Grades $n + 2$:

$$N_{n+2}(x) = (1 - x^2)\prod_{i=0}^{n}{}^{+}\left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right). \tag{39}$$

Hierin bedeutet die Bezeichnung $+$, dass das Glied für $i = \frac{1}{2}n$ abgespaltet ist, nachdem $x_{\frac{1}{2}n}^{(n)} = 0$ ist. Die Wurzeln dieses Polynoms sind ersichtlich $1, -1, 1/x_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $i \neq \frac{1}{2}n$. Es ist

$$N_{n+2}(x)\sum_{j=0}^{\infty}|R_{n+1}(x^j)|^2 = \tag{40}$$

$$= x^{2(n+1)}\prod_{i=0}^{n}{}^{+}\left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right) + 2x^{n+1}(1 + x^2)\sum_{k=0}^{n} t_k^{(n)}(x)\,(x_k^{(n)})^n \prod_{i=0}^{n}{}^{+\prime}\left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right) +$$

$$+ N_{n+2}(x)\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} t_k^{(n)}(x)\,t_l^{(n)}(x)\,\frac{(x_k^{(n)}x_l^{(n)})^{n+1}}{1 - x_k^{(n)}x_l^{(n)}} \equiv S_{3n+2}(x).$$

(Der Grad des Polynoms $S_{3n+2}(x)$ ist offenbar $3n + 2$.) Hierin haben wir benutzt, dass

$$\frac{\prod_{i=0}^{n}{}^{+}(x - 1/x_i^{(n)})}{1 - xx_k^{(n)}} = -\frac{1}{x_k^{(n)}}\prod_{i=0}^{n}{}_{k}^{+\prime}\left(x - \frac{1}{x_i^{(n)}}\right).$$

Es gilt, dass

$$(41)\qquad \prod_{i=0}^{n}{}^{+}\left(x-\frac{1}{x_i^{(n)}}\right)=\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}\left(x^2-\frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right)$$

ist. Anderseits haben wir

$$(42)\qquad \omega_{n+1}(x)=x\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}\left(x^2-(x_i^{(n)})^2\right),$$

folglich

$$(43)\qquad \omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}\left(\frac{1}{x^2}-(x_i^{(n)})^2\right)$$

und hieraus

$$(44)\qquad N_{n+2}(x)=(1-x^2)\,x^n\frac{1}{(-1)^{\frac{1}{2}n}\prod\limits_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}(x_i^{(n)})^2}\,x\omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Weiter ist aber nach (42)

$$(45)\qquad \omega'_{n+1}(0)=(-1)^{\frac{1}{2}n}\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}(x_i^{(n)})^2$$

und (44) gibt

$$(46)\qquad N_{n+2}(x)=(1-x^2)\,x^{n+1}\,\omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\omega'_{n+1}(0)}.$$

Analogisch haben wir wie im Fall für ungerade n

$$(47)\qquad \sigma_{n+1}^2(a;x)=\frac{\omega'_{n+1}(0)}{2\pi}\cdot\frac{\omega_{n+1}^2(x)\,\bar{Q}_n(x)}{(1-x^2)\,x^{n+1}\,\omega_{n+1}(1/x)},$$

wo $\bar{Q}_n(x)=\bar{q}_n+\bar{q}_{n-1}x+\ldots+\bar{q}_1x^{n-1}+q_0x^n$.

Um die $(n+1)$ Koeffizienten $\bar{q}_0,\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n$ des Polynoms $\bar{Q}_n(x)$ zu bestimmen, brauchen wir $(n+1)$ unabhängigen Bedingungen, welche wir nach der Formel

$$(48)\qquad \bar{Q}_n(x)=\frac{S_{3n+2}(x)}{\omega_{n+1}^2(x)}$$

bestimmen können ((48) folgt gleich aus (47)).

Berechnen wir vor allem einige Hilfsformeln. Für $k=0,1,\ldots,\frac{1}{2}n-1$ ist

$$(49)\qquad \prod_{i=0}^{n}{}_{k}^{+\prime}\left(x-\frac{1}{x_i^{(n)}}\right)=\left(x+\frac{1}{x_k^{(n)}}\right)\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}{}_{k}^{\prime}\left(x^2-\frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right).$$

Für $k=\frac{1}{2}n+1,\frac{1}{2}n+2,\ldots,n$ ist analogisch

$$(50)\qquad \prod_{i=0}^{n}{}_{k}^{+\prime}\left(x-\frac{1}{x_i^{(n)}}\right)=\left(x-\frac{1}{x_{n-k}^{(n)}}\right)\prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}{}_{n-k}^{\prime}\left(x^2-\frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right).$$

Es ist weiter nach (42)

$$t_k^{(n)}(x) = \frac{x \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} (x^2 - (x_i^{(n)})^2)}{(x - x_k^{(n)})\, \omega'_{n+1}(x_k^{(n)})}, \tag{51}$$

was schrittweise

$$t_k^{(n)}(x) = x \frac{(x + x_k^{(n)})}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}{}'_k (x^2 - (x_i^{(n)})^2) \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}n - 1 \tag{52}$$

$$t_k^{(n)}(x) = x \frac{(x - x_{n-k}^{(n)})}{\omega'_{n+1}(-x_{n-k}^{(n)})} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}{}'_{n-k} (x^2 - (x_i^{(n)})^2) \ \text{für } k = \tfrac{1}{2}n + 1, \tfrac{1}{2}n + 2, \ldots, n \tag{53}$$

ergibt.

In diesen Formeln ist für $k = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}n - 1$

$$\omega'_{n+1}(x_k^{(n)}) = 2(x_k^{(n)})^2 \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}{}'_k ((x_k^{(n)})^2 - (x_i^{(n)})^2) \tag{54}$$

und für $k = \frac{1}{2}n + 1, \frac{1}{2}n + 2, \ldots, n$

$$\omega'_{n+1}(x_k^{(n)}) = 2(x_{n-k}^{(n)})^2 \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1}{}'_{n-k} ((x_{n-k}^{(n)})^2 - (x_i^{(n)})^2)\,. \tag{55}$$

Wenn jetzt $x = (x_j^{(n)})^{-1}$, $j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}n - 1$ ist, haben wir

$$S_{3n+2}\left(\frac{1}{x_j^{(n)}}\right) = \frac{2}{(x_j^{(n)})^{2n+2}} \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} \left((x_j^{(n)})^2 - \frac{1}{(x_i^{(n)})^2}\right)$$

und schliesslich

$$\bar{Q}_n\left(\frac{1}{x_j^{(n)}}\right) = \frac{2}{\omega'_{n+1}(0)\,(x_j^{(n)})^{n+1}\,\omega_{n+1}\,(1/x_j^{(n)})} \tag{56}$$

für $j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}n - 1$.

Weiter ist leicht

$$\bar{Q}_n(1) = \frac{1}{\omega'_{n+1}(0)\,.\,\omega_{n+1}(1)} \tag{57}$$

abzuleiten.

Beweisen wir nun, dass $\bar{Q}_n(-x) = \bar{Q}_n(x)$ ist. Zu diesem Zweck drücken wir wieder das Glied mit dem Index j in der Reihe für $2\pi\sigma_{n+1}^2(a; x)$ aus:

$$x^j - x \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} (x^2 - (x_i^{(n)})^2) \left[\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{(x_k^{(n)})^j}{(x - x_k^{(n)})\,\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} + \right. \tag{58}$$

$$\left. + \sum_{k=\frac{1}{2}n+1}^{n} \frac{(x_k^{(n)})^j}{(x - x_k^{(n)})\,\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})}\right].$$

Das zweite Glied in der eckigen Klammer ist

$$\sum_{l=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{(-x_l^{(n)})^j}{(x + x_l^{(n)})\, \omega'_{n+1}(x_l^{(n)})}$$

gleich und für den ganzen Ausdruck in den Klammern ist:

$$\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} \frac{(x_k^{(n)})^j (x + x_k^{(n)}) + (-x_k^{(n)})^j (x - x_k^{(n)})}{(x^2 - (x_k^{(n)})^2)} . \tag{59}$$

Der Zähler in (59) ist

$$(x_k^{(n)})^j x + (x_k^{(n)})^{j+1} + (-1)^j (x_k^{(n)})^j x - (-1)^j (x_k^{(n)})^{j+1} . \tag{60}$$

Es sei nun j gerade. (60) ist dann gleich $2(x_k^{(n)})^j x$ und wir haben für (59)

$$2x \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} \cdot \frac{(x_k^{(n)})^j}{(x^2 - (x_k^{(n)})^2)}$$

und für (58) ist

$$x^j - 2x^2 \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} (x^2 - (x_i^{(n)})^2) \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{(x_k^{(n)})^j}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})\, (x^2 - (x_k^{(n)})^2)} . \tag{61}$$

Wenn j ungerade ist, ist (60) gleich $2(x_k^{(n)})^{j+1}$ und wir haben für (59)

$$2 \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})} \cdot \frac{(x_k^{(n)})^{j+1}}{(x^2 - (x_k^{(n)})^2)} \tag{62}$$

und (58) ist dann

$$x^j - 2x \prod_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} (x^2 - (x_i^{(n)})^2) \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{(x_k^{(n)})^{j+1}}{\omega'_{n+1}(x_k^{(n)})\, (x^2 - (x_k^{(n)})^2)}$$

gleich. $S_{3n+2}(x)$ ist die gerade Funktion von x und folglich ist auch $\bar{Q}_n(x)$ ein gerades Polynom. Hieraus folgt, dass es die Koeffizienten $\bar{q}_0, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_{n-2}, \bar{q}_n$ (was $\frac{1}{2}n + 1$ Unbekannten ist) zu bestimmen genügt. Den Beweis beenden wir wie im Satz 2.

Satz 5. *Es sei n gerade (die Anzahl der Knoten ist ungerade) und es sei* (10) *erfüllt. Dann gilt mit Rücksicht auf* (7):

$$\sigma_{n+1}^2(a; x) = \frac{2}{\pi}\, \omega_{n+1}^2(x) \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{x_i^{(n)}}{((x_i^{(n)})^2 x^2 - 1)\, \omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})\, \omega'_{n+1}(x_i^{(n)})\, (1 - (x_i^{(n)})^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4(1 - x^2)\, \omega_{n+1}^2(1)} \right\} .$$

Beweis. Das Polynom $Q_n(x)$, das in der Formel (37) auftritt, schreiben wir folgendermassen

$$Q_n(x) = q_n + q_{n-2}x^2 + \ldots + q_2 x^{n-2} + q_0 x^n .$$

Nach (38) gilt

$$(x_i^{(n)})^n Q_n\left(\frac{1}{x_i^{(n)}}\right) = \frac{1}{x_i^{(n)}\omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, \tfrac{1}{2}n - 1$$

$$Q_n(1) = \frac{1}{2\omega_{n+1}(1)} .$$

Konstruieren wir das Polynom

$$\Omega_{n+2}(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 1/(x_0^{(n)})^2)\ldots(x^2 - 1/(x_{\frac{1}{2}n-1}^{(n)})^2) .$$

Nach (65) können wir schreiben

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{\Omega_{n+2}(x) \, . \, 2}{x_i^{(n)}(x^2 - 1/(x_i^{(n)})^2)\, \Omega'_{n+2}(1/x_i^{(n)})\,(x_i^{(n)})^{n+1}\, \omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})} +$$
$$+ \frac{\Omega_{n+2}(x)}{(x^2 - 1)\,\Omega'_{n+2}(1)\,\omega_{n+1}(1)} .$$

Diese Gleichheit können wir verifizieren, wenn wir dorthin $x = 1/x_j^{(n)}$ ($j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, \frac{1}{2}n - 1$) und $x = 1$ einsetzen, aber auch die Gleichheiten

$$\lim_{x \to (x_j^{(n)})^{-1}} \frac{\Omega_{n+2}(x)}{x^2 - (x_j^{(n)})^{-2}} = \frac{x_j^{(n)}\Omega'_{n+2}(1/x_j^{(n)})}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\Omega_{n+2}(x)}{x^2 - 1} = \frac{\Omega'_{n+2}(x)}{2}$$

berücksichtigen.

Es gilt

$$\Omega_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}(x^2 - 1)\,\omega_{n+1}(1/x)}{\omega'_{n+1}(0)} ,$$

und folglich auch

$$\Omega'_{n+2}(x) = \frac{1}{\omega'_{n+1}(0)}\left\{(n+1)\,x^n(x^2 - 1)\,\omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) + x^{n+1}2x\omega_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) - \right.$$
$$\left. - x^{n-1}(x^2 - 1)\,\omega'_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

hieraus ist

$$\Omega'_{n+2}\left(\frac{1}{x_i^{(n)}}\right) = \frac{((x_i^{(n)})^2 - 1)\,\omega'_{n+1}(x_i^{(n)})}{\omega'_{n+1}(0)\,(x_i^{(n)})^{n+1}} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$$

und $\Omega'_{n+2}(1) = 2\omega_{n+1}(1)/\omega'_{n+1}(0)$ und den Beweis beendet man nun schon leicht.

3.

Jetzt sollen zwei Beispiele angeführt werden. Als Knoten wählen wir die Wurzeln des Tschebyscheffschen Polynoms in $\langle -1, 1\rangle$

$$v_k^{(n)} = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi , \quad k = 0, 1, \ldots, n .$$

Es gilt

$$T_{n+1}(x) = \cos \left[(n+1) \arccos x\right] .$$

Die Überführung auf das Intervall $\langle -a, a\rangle$, $a \in (0, 1)$ gibt

$$x_k^{(n)} = a v_k^{(n)} , \quad k = 0, 1, \ldots, n .$$

Die Interpolationsformel lautet dann nach [3]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \, T_{n+1}(x/a)}{(n+1)(x - x_k^{(n)})} \sqrt{(a^2 - (x_k^{(n)})^2)} \, f(x_k^{(n)}) + R_{n+1}(f) .$$

Setzen wir $T_{n+1}(x) = \sum_{l=0}^{n+1} t_l x^l$ ein. Da

(66) $$\omega_{n+1}(x) = \prod_{l=0}^{n} (x - a v_k^{(n)})$$

ist, haben wir

$$\omega_{n+1}(x) = \sum_{l=0}^{n+1} t_l a^{n-1-l} x^l .$$

Für die voranstehende Formel führen wir folgende zwei Beispiele an.

1) Man soll die Funktion $f(x) = x^5 e^{x^2}$ in dem Intervall $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ $(a = \frac{1}{2})$ für $n = 3$ interpolieren. Der allgemeine Ausdruck für die Fehlerabschätzung lautet

$$|R_{n+1}(f)| \leqq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| ,$$

wo $M_{n+1} = \sup\limits_{x \in \langle -a, a\rangle} |f^{(n+1)}(x)|$ ist und $\omega_{n+1}(x)$ ist durch (66) gegeben. Der allgemeine Ausdruck für die σ-Abschätzung ist durch die Ungleichung

$$|R_{n+1}(f)| \leqq \sigma_{n+1}(a; x) \sqrt{(2\pi)} \operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)|$$

gegeben.

Für unser Beispiel ist

$$\frac{M_4}{4!} = 9{,}3377 ,$$

weiter $|\omega_4(x)| = |(x^2 - 0{,}25)\, x^2 + 0{,}0078125)$ und endlich

$$\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)| = e\,.$$

Am Schluss geben wir die Tabelle der Fehlerabschätzungen in irgendwelchen Knoten des Intervalls $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ an:

x	Klass. Abschätzung	σ-Abschätzung
0,00	0,0730	0,0220
0,05	0,0672	0,0203
0,10	0,0506	0,0154
0,15	0,0252	0,0077
0,20	0,0055	0,0017
0,25	0,0365	0,0115
0,30	0,0616	0,0199
0,35	0,0729	0,0242
0,40	0,0616	0,0210
0,45	0,0169	0,0060
0,50	0,0730	0,0270

Es ist sogleich zu sehen, dass die klassische Abschätzungen etwa dreimal grösser als die σ-Abschätzungen sind.

2) Die Funktion $x^7 e^{2x}$ soll in dem Intervall $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ für $n = 5$ interpoliert werden. Es ist dann

$$\frac{M_6}{6!} = 71{,}0396\,,$$

$$\omega_6(x) = ((x^2 - 0{,}375)\, x^2 + 0{,}03515625)\, x^2 - 0{,}00048828$$

$$\operatorname*{Max}_{|z|=1} |f(z)| = e^2\,.$$

Die Tabelle für die Vergleichung der klassischen und σ-Abschätzungen ist die folgende:

x	Klass. Abschätzung	σ-Abschätzung
0,00	0,0347	0,0039
0,05	0,0286	0,0032
0,10	0,0123	0,0014
0,15	0,0088	0,0010
0,20	0,0271	0,0031
0,25	0,0347	0,0041
0,30	0,0261	0,0032
0,35	0,0021	0,0003
0,40	0,0261	0,0034
0,45	0,0314	0,0042
0,50	0,0347	0,0049

Wieder sind die σ-Abschätzungen besser und zwar etwa zehnmal.

Literaturverzeichnis

[1] *P. Davis:* Errors of Numerical Approximation for Analytic Functions. J. rat. mech. anal. 2, (1953), 303—313.

[2] *G. Hämmerlin:* Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler. Numerische Mathematik 5, (1963), 226—233.

[3] *I. P. Natanson:* Konstruktive Funktionentheorie, (1955).

[4] *J. Kofroň:* Die ableitungsfreien Fehlerabschätzungen von Quadraturformeln I. Aplikace matematiky 1, 17 (1972), 39—52.

[5] *J. Kofroň:* Die ableitungsfreien Fehlerabschätzungen von Quadraturformeln II. Aplikace matematiky 2, 17 (1972), 124—136.

Souhrn

ODHADY CHYB INTERPOLAČNÍCH FORMULÍ NEOBSAHUJÍCÍ DERIVACE

JOSEF KOFROŇ

Práce se zabývá interpolačním vzorcem v $\langle -a, a\rangle$, $a \in (0, 1)$:

$$\text{(I)} \qquad f(x) - \sum_{k=0}^{n} t_k^{(n)}(x) f(x_k^{(n)}) = R_{n+1}(f),$$

kde $t_k^{(n)}(x)$ jsou polynomy v x stupně n, $f(z)$ je taková reálná funkce na intervalu $\langle -a, a\rangle$, že funkce $f(z)$ komplexní proměnné z, kde $|z| \leqq 1$, je pro $|z| < 1$ holomorfní a pro $|z| = 1$ spojitá. Za těchto předpokladů se odhaduje chyba $R_{n+1}(f)$ ve tvaru nerovnosti

$$\text{(II)} \qquad |R_{n+1}(f)| \leqq \sigma_{n+1}(a; x) \, \|f\|,$$

kde

$$\text{(III)} \qquad \sigma_{n+1}^2(a; x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |R_{n+1}(x^k)|^2,$$

$$\text{(IV)} \qquad \|f\|^2 = \int_\Gamma |f(z)|^2 \, ds,$$

kde s je oblouk kružnice $\Gamma = \mathscr{E}(z; |z| = 1)$. (Viz [1].)

V práci je odvozen konečný vzorec pro výpočet funkce $\sigma_{n+1}(a; x)$: Zavedeme-li označení

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i^{(n)}),$$

platí pro n liché

$$\sigma_{n+1}^2(a; x) = \frac{2}{\pi}\, \omega_{n+1}^2(x)\,.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{x_i^{(n)}}{((x_i^{(n)})^2 x^2 - 1)\, \omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})\, \omega'_{n+1}(x_i^{(n)})\, (1 - (x_i^{(n)})^2)} + \frac{1}{4(1 - x^2)\, \omega_{n+1}^2(1)} \right\}$$

a pro n sudé obdobně

$$\sigma_{n+1}^2(a; x) = \frac{2}{\pi}\, \omega_{n+1}^2(x)\,.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n-1} \frac{x_i^{(n)}}{((x_i^{(n)})^2 x^2 - 1)\, \omega_{n+1}(1/x_i^{(n)})\, \omega'_{n+1}(x_i^{(n)})\, (1 - (x_i^{(n)})^2)} + \frac{1}{4(1 - x^2)\, \omega_{n+1}^2(1)} \right\}.$$

Vyložená teorie je doplněna konkrétními příklady pro případ čebyševských uzlů.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Josef Kofroň*, CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, Praha 1.