Aplikace matematiky

Josef Kofroň

Die ableitungsfreien Fehlerabschätzungen von Quadraturformeln. II

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 2, 124–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103401

DIE ABLEITUNGSFREIEN FEHLERABSCHÄTZUNGEN VON QUADRATURFORMELN II

JOSEF KOFROŇ

(Eingegangen am 21. Januar 1971)

In dem zweiten Teile unserer Arbeit wird die Grösse $2\pi\sigma_{n+1}^2(a)$ im allgemeinen Falle als eine quadratische Funktion der Grösse h dargestellt, wo h die Entfernung der benachbarten äquidistanten Knoten ist. Der algebraische Genauigkeitsgrad der Quadraturformel ist $m - 1$. Daraus wird eine genügende Bedingung abgeleitet, um eine obere Abschätzung der Grösse $2\pi\sigma_{n+1}^2(a)$ in der Form const. h^{2m} schreiben zu dürfen. In der Arbeit [2] wurde dies nur für einige spezielle Quadraturformeln durchgeführt. Unsere allgemeine Formeln werden auf spezielle Quadraturformeln — unter denen auch auf Newton-Cotessche — benutzt. Auch eine untere Abschätzung für $2\pi\sigma_{n+1}^2(a)$ wird hier abgeleitet. Um diese Abschätzungen mit den klassischen vergleichen zu können, werden einige numerische Beispiele herbeigeführt.

3.

Vor allem beweisen wir einen einfachen Ausdruck für die Grösse $\sigma_{n+1}^2(a)$.

Satz 6. *Es sei $R_{n+1}(f)$ den Fehler der allgemeinen Quadraturformel von der Form*

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = R_{n+1}(f)\,. \tag{1}$$

Die Funktion $f(z)$ sei im Kreise $|z| < 1$ holomorph, für $|z| = 1$ stetig und im Intervall $\langle -a, a\rangle$, wo $a \in (0, 1)$, nehme nur reelle Werte an. Die Funktion $p(x)$ (die Belegung) sei eine nichtnegative, messbare Funktion mit konvergentem Integral in $\langle -a, a\rangle$. Wenn wir R_{n+1}^y das Funktional R_{n+1} bezeichnen, das auf die Funktion $(1 - xy)^{-1}$ bei festem x wirkt, dann gilt

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = R_{n+1}\left(R_{n+1}^y\left(\frac{1}{1 - xy}\right)\right). \tag{2}$$

Beweis. Nach (8) des ersten Teiles dieser Arbeit ist

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j^2(a) + 2\left[\int_{-a}^{+a} p(x) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tau_j(a)\, x^j\right) \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tau_j(a)\, (x_k^{(n)})^j\right)\right] -$$

$$- 2\int_{-a}^{+a} p(x) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tau_j(a)\, x^j\right) \mathrm{d}x + \int_{-a}^{+a} p(x) \left(\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \frac{1}{1 - x_k^{(n)} x} - \int_{-a}^{+a} \frac{p(y)\,\mathrm{d}y}{1 - yx}\right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \left(\sum_{l=0}^{n} A_l^{(n)} \frac{1}{1 - x_k^{(n)} x_l^{(n)}} - \int_{-a}^{+a} \frac{p(x)\,\mathrm{d}x}{1 - x_k^{(n)} x}\right) + \int_{-a}^{+a} p(x) \int_{-a}^{+a} \frac{p(y)\,\mathrm{d}y}{1 - yx}\, \mathrm{d}x\,.$$

Es ist ersichtlich, dass die Summe des ersten, des dritten und des letzten Gliedes Null gleich ist.

Somit erhalten wir leicht

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \int_{-a}^{+a} p(x)\, R_{n+1}^y \left(\frac{1}{1 - xy}\right) \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} R_{n+1}^y \left(\frac{1}{1 - yx_k^{(n)}}\right) =$$

$$= R_{n+1}\left(R_{n+1}^y \left(\frac{1}{1 - xy}\right)\right).$$

Hierin haben wir die Tatsache benutzt, dass die Funktion $R_{n+1}^y(1/(1 - zy))$ – die eine Funktion von z ist – ersichtlich holomorph im Kreise $|z| < 1$ und stetig für $|z| \leqq 1$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung: Wenn die Formel (1) vom Gausschen Typus ist, dann gilt $\sigma_{n+1}(a) \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis. Die Funktion $(1 - xy)^{-1}$ ist in den Variablen x, y im Quadrat $\langle -a, a\rangle \times \langle -a, a\rangle$, $a \in (0, 1)$ stetig.

4.

Weiter benutzen wir die Gleichheit (2) für den Fall der Quadraturformeln (1) mit äquidistanten Knoten

$$x_k^{(n)} = a(-1 + 2k/n)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,; \tag{5}$$

folglich $h = 2a/n$.

Die Formel (1) habe den algebraischen Genauigkeitsgrad $m - 1$ (m ist gerade). Von der Funktion $f(x)$ setzen wir voraus, dass sie eine stetige Ableitung vom Grade $m + 1$ hat. Dann gilt nach [3] (die Eulersche Zerlegung des Restgliedes einer Quadraturformel):

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = C[f^{(m-1)}(a) - f^{(m-1)}(-a)] + R_{n+1}^*(f) = \tag{6}$$

$$= \int_{-a}^{+a} f^{(m)}(t)\, K(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Hierin ist $K(t)$ der Kern des Restgliedes einer Quadraturformel. Für $K(t)$ gilt

$$(7) \qquad K(t) = \int_t^{+a} p(x) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \, \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} E(x_k^{(n)} - t) \frac{(x_k^{(n)} - t)^{m-1}}{(m-1)!} \,,$$

wobei

$$(8) \qquad E(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ \frac{1}{2}, & u = 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

$$(9) \qquad C = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} K(t) \, \mathrm{d}t \,,$$

$$(10) \qquad R_{n+1}^*(f) = \int_{-a}^{+a} f^{(m+1)}(t) \, L(t) \, \mathrm{d}t \,,$$

$$(11) \qquad L(t) = \int_{-a}^{t} [C - K(x)] \, \mathrm{d}x$$

ist.

Wenn wir die Bezeichnung

$$D_{n,m}(\xi, \zeta) = \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial^m}{\partial y^m} \left(\frac{1}{1 - xy} \right) \right) \right]_{\substack{x = \xi \\ y = \zeta}}$$

(n, m sind natürliche Zahlen) einführen, dann erhalten wir unter der Benutzung von (2) mit Rücksicht auf (6) und auf (10) die Gleichheit:

$$(12) \qquad \begin{aligned} 2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = {} & C^2 [D_{m-1,m-1}(a, a) - D_{m-1,m-1}(a, -a) - D_{m-1,m-1}(-a, a) + \\ & + D_{m-1,m-1}(-a, -a)] + \\ & + C \left[\int_{-a}^{+a} (D_{m-1,m+1}(a, y) - D_{m-1,m+1}(-a, y)) \, L(y) \, \mathrm{d}y + \right. \\ & \left. + \int_{-a}^{+a} (D_{m+1,m-1}(x, a) - D_{m+1,m-1}(x, -a)) \, L(x) \, \mathrm{d}x \right] + \\ & + \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} D_{m+1,m+1}(x, y) \, L(x) \, L(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = C^2 \alpha_{m-1} + C\beta_{m-1} + \gamma_{m-1} \,. \end{aligned}$$

Die folgenden zwei Behauptungen sind für die weiteren Überlegungen nützlich.

Lemma 1. *Es gilt die Gleichheit:*

$$(3) \qquad [D_{n,m}(a, a) - D_{n,m}(a, -a)] - [D_{n,m}(-a, a) - D_{n,m}(-a, -a)] =$$

$$= \frac{(m!)^2\, a^{m-n}}{(1-a^4)^{m+n+1}} \left[1 + (-1)^{m-n}\right] \left\{ (1+a^2)^{m+n+1} \sum_{i=0}^{n} i! \binom{n}{i}^2 \frac{a^{2i}}{(m-n+i)!} - \right.$$

$$\left. - (1-a^2)^{m+n+1} \sum_{i=0}^{n} i! \binom{n}{i}^2 \frac{a^{2i}(-1)^i}{(m-n+i)!} \right\}.$$

Zum Beweis benutzt man die Gleichheit (19) aus dem ersten Teile dieser Arbeit.

Lemma 2. *Für gerade m gilt*

$$\alpha_{m-1} = \frac{2[(m-1)!]^2}{(1-a^4)^{2m-1}} \left\{ (1+a^2)^{2m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i}^2 a^{2i} - \right. \tag{4}$$

$$\left. - (1-a^2)^{2m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i}^2 (-1)^i a^{2i} \right\}.$$

Der Beweis ist evident aus (3) abzuleiten.

Satz 7. *Wenn $p(x) \equiv 1$ in $\langle -a, a \rangle$ ist, dann gilt die Gleichheit*

$$C\beta_{m-1} + \gamma_{m-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (2p+m+2)^2 (2p+m+1)^2 \dots (2p+4)^2 \,. \tag{13}$$

$$. \left\{ (2p+3)^2 \left[\int_{-a}^{+a} t^{2p+2} K(t) \, dt \right]^2 - a^{4p+4} \left[\int_{-a}^{+a} K(t) \, dt \right]^2 \right\}.$$

Beweis. 1) Befassen wir uns zuerst mit dem Koeffizienten β_{m-1}. Aus der Definition $D_{n,m}(x, y)$ folgt

$$D_{m-1,m+1}(a, y) - D_{m-1,m+1}(-a, y) = \tag{14}$$

$$= 2 \sum_{p=0}^{\infty} (2p+m+2)^2 (2p+m+1)^2 \dots (2p+4)^2 (2p+3)(2p+2)\, a^{2p+3} y^{2p+1}.$$

Analogisch erhalten wir einen ähnlichen Ausdruck für die Differenz $D_{m+1,m-1}(x, a) - D_{m+1,m-1}(x, -a)$. Dann gilt ersichtlich

$$\beta_{m-1} = 4 \sum_{p=0}^{\infty} (2p+m+2)^2 (2p+m+1)^2 \dots (2p+4)^2 (2p+3) \tag{15}$$

$$. (2p+2)\, a^{2p+3} \int_{-a}^{+a} y^{2p+1} L(y) \, dy \,.$$

2) Für den Koeffizienten γ_{m-1} ist sogleich

$$\gamma_{m-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+m+1)^2 (k+m)^2 \dots (k+1)^2 \left[\int_{-a}^{+a} x^k L(x) \, dx \right]^2 . \tag{16}$$

3) Es gilt die folgende Gleichheit für ungerade k:

$$\int_{-a}^{+a} x^k L(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\left[\int_{-a}^{+a} x^{k+1} K(x)\,\mathrm{d}x - \frac{a^{k+1}}{k+2}\int_{-a}^{+a} K(x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{17}$$

Für k gerade gilt dagegen:

$$\int_{-a}^{+a} x^k L(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\int_{-a}^{+a} x^{k+1} K(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{18}$$

Den Beweis der beiden Gleichheiten führt man mühelos direkt aus der Definition $L(x)$ durch.

4) Es gilt

$$\int_{-a}^{+a} x^{p+1} K(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für } p \text{ gerade.} \tag{19}$$

Beweis. Die Funktion $p(x)$ ist gleich Eins im ganzen Intervall $\langle -a, a\rangle$, folglich ist

$$K(t) = \frac{(a-t)^m}{m!} - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} E(-a+kh-t)\frac{(-a+kh-t)^{m-1}}{(m-1)!}\,. \tag{20}$$

Um nach (20) den Ausdruck (19) zu beweisen, erhalten wir schrittweise:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{m!}\int_{-a}^{+a} t^{p+1}(a-t)^m\,\mathrm{d}t = \frac{-2a^{p+m+2}}{m!}\sum_{j=0}^{m/2-1}\binom{m}{2j+1}\frac{1}{p+m+1-2j}\,, \tag{21}$$

denn p, m sind gerade.

b) Bei der Berechnung des Ausdrucks

$$\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{n} A_p^{(n)}\int_{-a}^{+a} t^{p+1} E(-a+kh-t)(-a+kh-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

erhalten wir zuerst

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{-a+kh} & t^{p+1}[(-a+kh)-t]^{m-1}\,\mathrm{d}t = \\ &= (-a+kh)^{p+m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\frac{(-1)^{i+1}}{p+m+1-i} - \\ &\quad - a^{p+m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-a+kh)^i\frac{a^{-i}}{p+m+1-i}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Wenn $i = 0, 1, \ldots, m-1$ ist, dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}(-a+kh)^i = \int_{-a}^{+a} x^i\,\mathrm{d}x = \frac{a^{i+1}}{i+1}\,[1+(-1)^i]$$

und für (22) haben wir

$$(24)\qquad \frac{2a^{p+m+2}}{(m-1)!}\left\{\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}\left(-1+\frac{2k}{n}\right)^{p+m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\frac{(-1)^{i+1}}{p+m+1-i}-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{(m/2)-1}\binom{m-1}{2j}\frac{1}{(2j+1)(p+m+1-2j)}\right\},$$

wo

$$\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} = 1 \text{ ist.}$$

c) Nach (21) und (24) erhalten wir endlich:

$$\int_{-a}^{+a} t^{p+1} K(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2a^{p+m+2}}{(m-1)!}\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{(m/2)-1}\binom{m}{2j+1}\frac{1}{p+m+1-2j}+\right.$$
$$+\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}\left(-1+\frac{2k}{n}\right)^{p+m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\frac{(-1)^{i+1}}{p+m+1-i}-$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{(m/2)-1}\binom{m-1}{2j}\frac{1}{(p+m+1-2j)(2j+1)}\right\}.$$

Die Summe des ersten und des dritten Gliedes ist Null gleich, ebenso das zweite Glied, nachdem $\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(-1+2k/n)^{p+m+1}$ gleich Null ist, da $p+m+1$ ungerade ist. Hier haben wir die Tatsache benutzt, dass aus der Symmetrie der Knoten „die Symmetrie" der Koeffizienten folgt, d. h., dass $A_{n-k}^{(n)} = A_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ ist. Damit ist (19) bewiesen und daraus folgt nach (18) auch die Gleichheit

$$(25)\qquad \int_{-a}^{+a} t^p L(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{für } p \text{ gerade}.$$

5) Die Behauptung des zu beweisenden Satzes erhalten wir schon leicht mit der Hilfe (15), (16), (17) und (25), wenn wir in (16) $k = 2p + 1$ einsetzen.

Aus (12) und aus dem Satze 7 folgt gleich

Satz 8. *Es sei* $p(x) \equiv 1$ *in* $\langle -a, a\rangle$, $a \in (0, 1)$ *und* (1) *sei die gegebene Formel mit den äquidistanten Knoten* (5). *Der algebraische Genauigkeitsgrad der Formel* (1) *sei* $m - 1$ (m *gerade*). $K(t)$ *sei in* $\langle -a, a\rangle$ *die durch den Ausdruck* (20) *gegebene Funktion. Der Ausdruck* $C^2\alpha_{m-1}$ *ist die obere Grenze für die Grösse* $2\pi\sigma_{n+1}^2(a)$, *wenn die Ungleichheit*

$$(26)\qquad (2p+3)^2\left[\int_{-a}^{+a} t^{2p+2} K(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 - a^{4p+4}\left[\int_{-a}^{+a} K(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \leqq 0$$

für alle ganzen Zahlen $p = 0, 1, \ldots$ *erfüllt ist.*

Die dazu notwendige und hinreichende Bedingung ist

$$c\beta_{m-1} + \gamma_{m-1} \leqq 0 . \tag{27}$$

(27) ist auch für eine beliebige, messbare Funktion $p(x) \geqq 0$ mit konvergentem Integral in $\langle -a, a\rangle$ gültig.

Satz 9. *Die Voraussetzungen des Satzes* 8 *seien erfüllt. Dann gilt die Abschätzung*

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) \geqq [2am!\, C]^2 . \tag{28}$$

Wenn auch (27) erfüllt ist, so gilt

$$2am!\, |C| \leqq \sqrt{(2\pi)}\, \sigma_{n+1}(a) \leqq \sqrt{(\alpha_{m-1})}\, |C| \tag{29}$$

wo $\alpha_{m-1} \geqq 0$ ist.

Beweis. Ersichtlich ist

$$D_{m-1,m-1}(x, y) = \sum_{q=0}^{\infty} (q + m - 1)^2 (q + m - 2)^2 \ldots (q + 1)^2 (xy)^2 .$$

Aus der Definition α_{m-1} (siehe (12)) haben wir, wenn wir $q = 2p + 1$ in (12) einsetzen:

$$\alpha_{m-1} = 4 \sum_{p=0}^{\infty} (2p + m)^2 (2p + m - 1)^2 \ldots (2p + 2)^2 a^{4p+2} , \tag{31}$$

folglich ist $\alpha_{m-1} \geqq 0$.

Weiter ist nach (12), (30), (13) und (9), nachdem wir $q = p - 1$ in (30) einsetzen:

$$2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = 4C^2a^2 \sum_{q=-1}^{\infty} (2q + m + 2)^2 (2q + m + 1)^2 \ldots (2q + 4)^2 a^{4q+4} - \ldots =$$
$$= 4a^2C^2(m!)^2 + \ldots$$

Damit ist der Satz bewiesen, nachdem die übrigen Glieder positiv sind.

Lemma 3. *Es sei für die Formel* (1) $m - 1$ *der algebraische Genauigkeitsgrad* (m *ist gerade*), $p(x) = 1$ *in* $\langle -a, a\rangle$, $a \in (0, 1)$.

Dann gilt

$$C = \frac{h^m}{m!}\left[\frac{n^m}{m + 1} - \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} k^m\right], \tag{31}$$

wo $h = 2a/n$, $\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} = 1$ *ist.*

Den Beweis führt man aus der Definition C (siehe (9)) und aus (20) nach einer

Berechnung her. Es ist nun vielleicht zweckmässig zu bemerken, dass die Gleichheit

$$\int_{-a}^{+a} E(-a + kh - t)(-a + kh - t)^{m-1}\,\mathrm{d}t = -\int_{kh}^{-2a+kh} E(u)\,u^{m-1}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{k^m(2a)^m}{n^m m} = \frac{k^m h^m}{m}$$

im Beweis nötig ist.

Bemerkung 1. Die angegebenen Ergebnisse (hauptsächlich die Ungleichheit (29)) sind auch für die verallgemeinerten Quadraturformeln gültig, d.h. für die Quadraturregeln, die durch die r-malige Benutzung (r ist die natürliche Zahl) der ursprünglichen Regel im gleichen Intervall $\langle -a, a\rangle$ entstehen. Aus dem vorgehenden Satze 9 folgt für den speziellen Fall der Newton-Cotesschen Formeln der

Satz 10. *$B_k^{(n)}$ seien die Koeffizienten der Newton-Cotesschen Formel, $\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} = 1$. Wenn für $(n + 1)$ gerade die Ungleichheit (32) $(m = n + 1)$ bzw. die Ungleichheit (33) für $(n + 1)$ ungerade $(m = n + 2)$ für alle Zahlen $p = 0, 1, \ldots$ erfüllt ist, dann stellt der Ausdruck $C^2\alpha_{m-1}$ aus (12) die obere Grenze der Grösse $2\pi\sigma_{n+1}^2(a)$ dar.*

$$\frac{(n + 1)!\, n^{n+2}}{2^{n+1}(2p + n + 3)(2p + n + 2)\ldots(2p + 4)\int_0^n t(t-1)\ldots(t - n)\,\mathrm{d}t} \cdot \left[\frac{1}{2p + n + 4} - \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}\left(-1 + \frac{2k}{n}\right)^{2p+n+3}\right] \leqq 1\,, \tag{32}$$

$$\frac{(n + 2)!\, n^{n+3}}{2^{n+2}(2p + n + 4)(2p + n + 3)\ldots(2p + 4)\int_0^n t(t - 1)\ldots(t - n)\left(t - \frac{n}{2}\right)\mathrm{d}t} \cdot \left[\frac{1}{2p + n + 5} - \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}\left(-1 + \frac{2k}{n}\right)^{2p+n+4}\right] \leqq 1\,. \tag{33}$$

Beweis. Weil $K(t)$ nach [3] im Falle der Newton-Cotesschen Formel nicht positiv ist, genügt es an der Stelle (13) die Ungleichheit

$$(2p + 3)\int_{-a}^{+a} t^{2p+2} K(t)\,\mathrm{d}t - a^{2p+2}\int_{-a}^{+a} K(t)\,\mathrm{d}t \geqq 0 \tag{34}$$

zu benutzen. Vor allem geben wir der Ungleichheit (34) die neue Form

$$\int_{-a}^{+a} [(2p + 3)\,t^{2p+2} - a^{2p+2}]\,K(t)\,\mathrm{d}t \geqq 0\,. \tag{35}$$

Jetzt betrachten wir den Ausdruck in den eckigen Klammern in (35) als die m-te Ableitung einer Funktion $\varphi(t)$; es gilt also

$$\varphi^{(m)}(t) = (2p + 3)\, t^{2p+2} - a^{2p+2}\,.$$

Hieraus

$$\varphi^{(m-i)}(t) = (2p + 3) \frac{t^{2p+2+i}}{(2p + 3)(2p + 4)\ldots(2p + 2 + i)} - \frac{a^{2p+2}t^i}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,i} + P_{i-1}(t)\,,$$

wo $P_{i-1}(t)$ ein beliebiges Polynom vom Grad $i - 1$ ist. Wenn $i = m$ ist, erhalten wir nach Einsetzen $P_{m-1}(t) \equiv 0$:

$$\varphi(t) = \frac{(2p + 3)!\, t^{2p+m+2}}{(2p + m + 2)!} - \frac{a^{2p+2}t^m}{m!}\,.$$

Dann gilt für $R_{n+1}(\varphi)$ nach (6)

$$\int_{-a}^{+a} \varphi^{(m)}(t)\, K(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{+a} \left[\frac{(2p + 3)!\, t^{2p+m+2}}{(2p + m + 2)!} - a^{2p+2}\frac{t^m}{m!}\right] \mathrm{d}t - \tag{36}$$
$$- \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \left[\frac{(2p + 3)!\, (t_k^{(n)})^{2p+m+2}}{(2p + m + 2)!} - a^{2p+2}\frac{(t_k^{(n)})^m}{m!}\right],$$

wo $t_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ die Knoten der Formel (5) sind. Führen wir in (36) die Integration aus, dann erhalten wir

$$\frac{(2p + 3)!}{(2p + m + 2)!}\left[\frac{2a^{2p+m+3}}{2p + m + 3} - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}(t_k^{(n)})^{2p+m+2}\right] - \tag{37}$$
$$- \frac{a^{2p+2}}{m!}\left[\frac{2a^{m+1}}{m + 1} - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}(t_k^{(n)})^m\right].$$

Wenn wir Rücksicht auf die Form des Restgliedes der Newton-Cotesschen Formel nehmen, haben wir sogleich

$$\frac{2a^{2p+m+3}}{2p + m + 3} - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}(t_k^{(n)})^{2p+m+2} = \tag{38}$$
$$= \frac{(2p + m + 2)(2p + m + 1)\ldots(2p + 3)\,\xi^{2p+2}}{m!} \int_{-a}^{+a} \Omega(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

wo $\xi \in \langle -a, a\rangle$ ist. Weiter ist

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \omega(x) \quad \text{für} \quad n + 1 \quad \text{ungerade}\,, \quad m = n + 2\,, \\ &= x\,\omega(x) \quad \text{für} \quad n + 1 \quad \text{gerade}\,, \quad m = n + 1\,, \end{aligned}$$
$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i^{(n)})\,.$$

Es gilt auch

$$(39) \qquad \frac{2a^{m+1}}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} (t_k^{(n)})^m = \int_{-a}^{+a} \Omega(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nach (38), (39) und (37) für (36) ist ersichtlich

$$\int_{-a}^{+a} \varphi^{(m)}(t)\,K(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m!}\int_{-a}^{+a} \Omega(x)\,\mathrm{d}x\,\left[(2p+3)\,\xi^{2p+2} - a^{2p+2}\right]$$

gültig.

Es gilt (siehe (3)) $\int_{-a}^{+a} \Omega(x)\,\mathrm{d}x \leqq 0$. Somit genügt es, die Richtigkeit der Ungleichheit

$$(40) \qquad \xi^{2p+2} \leqq \frac{a^{2p+2}}{(2p+3)} \quad \text{für} \quad p = 0, 1, \ldots$$

beweisen. Aus (38) ist zu sehen, dass (40) der folgenden Ungleichheit gleichwertig ist:

$$(41) \qquad \frac{2m!\,a^{m+1}}{\int_{-a}^{+a} \Omega(x)\,\mathrm{d}x(2p+m+2)(2p+m+1)\ldots(2p+4)}\,. \\ \cdot \left[\frac{1}{2p+m+3} - \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} \left(-1 + \frac{2k}{n}\right)^{2p+m+2}\right] \leqq 1\,.$$

Berechnen wir jetzt $\int_{-a}^{+a} \Omega(x)\,\mathrm{d}x$. Es gilt $\omega(x) = h^{n+1}t(t-1)\ldots(t-n)$, wo $x = -a + th$ ist.

a) Es sei $n+1$ gerade, dann ist $m = n+1$ und

$$\int_{-a}^{+a} \Omega(x)\,\mathrm{d}x = h^{n+2} \int_{0}^{n} t(t-1)\ldots(t-n)\,\mathrm{d}t\,.$$

Hieraus und aus (41) folgt (32) schon leicht.

b) Wenn jetzt $n+1$ ungerade ist, dann ist $m = n+2$ und

$$\int_{-a}^{+a} \Omega(x)\,\mathrm{d}x = h^{n+3} \int_{0}^{n} t(t-1)\ldots(t-n)\left(t - \tfrac{1}{2}n\right)\mathrm{d}t\,,$$

denn es ist $-a + th = h(t - \frac{1}{2}n)$. Den Beweis beendet man in derselben Weise wie im vergehenden Falle.

5.

Um Beispiele von allgemeinen Charakter herbeizuführen, betrachten wir die Newton-Cotesschen Formeln für $n = 1, 2, 3, 4$ (also $m = 2, 4, 4, 6$). Es ist sehr leicht zu beglaubigen, dass für diese n die zuständigen Ungleichungen aus dem Satz 10 erfüllt sind. Nach diesem Satz ist also möglich die Grenzen (29) zu benutzen:

$n = 1$ $(m = 2)$

$$\frac{a}{3} h^2 \leqq \sqrt{(2\pi)}\, \sigma_2(a) \leqq \frac{a}{3} \frac{1}{1 - a^4} \sqrt{\left(\frac{1 + a^4}{1 - a^4}\right)} h^2$$

$n = 2$ $(m = 4)$

$$\frac{4a}{15} h^4 \leqq \sqrt{(2\pi)}\, \sigma_3(a) \leqq \frac{4a}{15} \frac{1}{(1 - a^4)^3} \sqrt{\left(\frac{a^{16} + 18a^{12} + 42a^8 + 18a^4 + 1}{1 - a^4}\right)} h^4$$

$n = 3$ $(m = 4)$

$$\frac{5}{3} a h^4 \leqq \sqrt{(2\pi)}\, \sigma_4(a) \leqq \frac{3a}{5} \frac{1}{(1 - a^4)^3} \sqrt{\left(\frac{a^{16} + 18a^{12} + 42a^8 + 18a^4 + 1}{1 - a^4}\right)} h^4$$

$n = 4$ $(m = 6)$

$$\frac{64a}{21} h^6 \leqq \sqrt{(2\pi)}\, \sigma_5(a) \leqq \frac{1}{6(1 - a^4)^5} \frac{64a}{21} \sqrt{\left(\frac{\mathbf{A}}{1 - a^4}\right)} h^6 ,$$

wo

$$\mathbf{A} = 36 + 2740a^4 + 30988a^8 + 95260a^{12} + 95260a^{16} + 30988a^{20} + 2740a^{24} + 36a^{28} .$$

Durch das Vergleichen mit den Abschätzungen, die in [2] (siehe (4.1) bis (4.5), bzw. (4.6)) angegeben sind, ist zu sehen, dass die oberen Grenzen für $n = 1, 2, 3$ zusammenfallen. Die obere Abschätzung für $n = 4$ wurde in [2] nicht abgeleitet.

6.

Die in dem vorigen Kapitel angegebenen allgemeinen Ungleichheiten begleiten wir mit folgenden Beispielen.

1) Es sei $f(x) = x^5 e^{2x}$, $a = \frac{1}{2}$; es geht um die Berechnung des Integrales

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^5 e^{2x}\, \mathrm{d}x .$$

Es ist $\|f\| \leqq e^2 \sqrt{(2\pi)}$ und $|R_{n+1}(f)| \leqq e^2 \sqrt{(2\pi)}\, \sigma_{n+1}(a)$.

Es sei schrittweise $n = 1, 2, 3, 4$. Dann geben die klassischen Abschätzungen

$$\begin{aligned}
|R_2(f)| &\leqq f''(\tfrac{1}{2})\, h^2/12 &&\leqq 0{,}8778h^2\\
|R_3(f)| &\leqq f^{(4)}(\tfrac{1}{2})\, h^4/180 &&\leqq 3{,}7830h^4\\
|R_4(f)| &\leqq f^{(4)}(\tfrac{1}{2})\, h^4/80 &&\leqq 8{,}5117h^4\\
|R_5(f)| &\leqq 2f^{(6)}(\tfrac{1}{2})\, h^6/945 &&\leqq 46{,}6107h^6\,.
\end{aligned}$$

Die Abschätzungen mit Hilfe der Grössen $\sigma_{n+1}(\frac{1}{2})$ gegenüber sind

$$\begin{aligned}
|R_2(f)| &\leqq 1{,}3985h^2\\
|R_3(f)| &\leqq 1{,}8702h^4\\
|R_4(f)| &\leqq 4{,}2079h^4\\
|R_5(f)| &\leqq 50{,}2848h^6\,.
\end{aligned}$$

2) Es sei $f(x) = x^{10}e^{x^2}$, $a = \frac{1}{2}$. Es geht um die Berechnung des Integrales

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^{10}e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Es ist $\|f\| \leqq e\sqrt{(2\pi)}$ und $|R_{n+1}(f)| \leqq e\sqrt{(2\pi)}\,\sigma_{n+1}(a)\,.$

Für $n = 3, 4, 5$ sind die klassischen Abschätzungen

$$\begin{aligned}
|R_3(f)| &\leqq 0{,}7715h^4\\
|R_4(f)| &\leqq 1{,}7359h^4\\
|R_5(f)| &\leqq 50{,}3780h^6\,,
\end{aligned}$$

die σAbschätzungen sind

$$\begin{aligned}
|R_3(f)| &\leqq 0{,}6880h^4\\
|R_4(f)| &\leqq 1{,}5480h^4\\
|R_5(f)| &\leqq 18{,}4988h^6\,.
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] *P. Davis:* Errors of Numerical Approximation for Analytic Functions, J. rat. mech. anal. 2, (1953), 303–313.

[2] *G. Hämmerlin:* Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler, Numerische Mathematik 5, (1963), 226–233.

[3] *V. J. Krylov:* Приближенное вычисление интегралов, 2. Auflage.

[4] *J. Kofroň:* Die ableitungsfreien Fehlerabschätzungen von Quadraturformeln I. Aplikace matematiky 1, 17 (1972), 39–52.

Souhrn

ODHADY CHYB KVADRATURNÍCH FORMULÍ NEOBSAHUJÍCÍ DERIVACE II

JOSEF KOFROŇ

V druhé části práce (viz [4]) je vyjádřena veličina $2\pi\sigma_{n+1}^2(a)$, $a \in (0,1)$, pro případ ekvidistantního rozložení uzlů kvadraturní formule jako kvadratická funkce h^m (h je krok, $m - 1$ je algebraický stupeň přesnosti formule):

$$(\mathrm{I}) \qquad 2\pi\sigma_{n+1}^2(a) = \alpha_{m-1}C^2 + \beta_{m-1}C + \gamma_{m-1}\,, \quad C = K \,.\, h^m\,;$$

K závisí na užité formuli: Je dokázán vzorec

$$(\mathrm{II}) \qquad \alpha_{m-1} = \frac{2[(m-1)!]^2}{(1-a^4)^{2m-1}} \,.$$

$$. \left\{(1+a^2)^{2m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i}^2 a^{2i} - (1-a^2)^{2m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i}^2 (-1)^i a^{2i}\right\}.$$

Dále se studují za předpokladu $p(x) \equiv 1$ v $\langle -a, a\rangle$ obecné podmínky postačující k tomu, aby výraz $\sqrt{(\alpha_{m-1})} \,.\, |C|$ byl horním odhadem veličiny $\sqrt{(2\pi)}\,\sigma_{n+1}(a)$. Tyto podmínky jsou formulovány pro vzorce Newtonovy-Cotesovy v konkrétním tvaru.

Je uveden též dolní odhad veličiny $\sqrt{(2\pi)}\,\sigma_{n+1}(a)$:

$$(\mathrm{III}) \qquad \sqrt{(2\pi)}\,\sigma_{n+1}(a) \geqq 2am!\,|C|\,,$$

platný pro každou kvadraturní formuli s ekvidistantními uzly a $p(x) \equiv 1$.

Vyložená teorie je doplněna konkrétními vzorci (II) pro případ Newtonových-Cotesových formulí pro $n = 1, 2, 3, 4$ ($m = 2, 4, 4, 6$). Vzorce pro $n = 1, 2, 3$ jsou totožné se vzorci uvedenými ve [2].

Závěrem jsou uvedeny dva konkrétní příklady a provedeno srovnání s klasickými metodami odhadu.

Anschrift des Verfassers: Dr. *Josef Kofroň*, CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, Praha 1.