

# Aplikace matematiky

---

Jozef Zámožík

Raster in der Perspektive

*Aplikace matematiky*, Vol. 15 (1970), No. 5, 339–351

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103305>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## RASTER IN DER PERSPEKTIVE

JOZEF ZÁMOŽÍK

(Eingegangen am 8. September 1969)

Unter einem Raster werden wir in diesem Artikel die als ein Vordruck hergestellte Vorlage auffassen, mittels der wir auf einem passenden Papier (z.B. auf Transparentpapier) durch die Punktkonstruktion direkt eine Perspektive aus der Monogesischen Projektion eines gegebenen Gebildes zeichnen können.<sup>1)</sup>

## 1. DIE KONSTRUKTION DES RASTERS IN DER KONISCHEN PERSPEKTIVE

Die zylindrische Perspektive, die Zirkorama, das Rundbild (Panorama) kann man als eine unmittelbare Anwendung der sog. konischen Perspektive auffassen, die wir hier kurz einführen werden. In der technischen Praxis kann man sie zur Abbildung z.B. von zusammenhängenden architektonischen Komplexen, wie die städtebauliche urbanistische Lösung der Siedlungen, bzw. der Stadtplätze u.ä., anwenden, wenn die Anwendung der linearen Perspektive nicht geeignet ist.

Gegeben seien eine Drehkegelfläche  $\Phi$  und ein von der Kegelspitze  $V$  verschiedener, auf ihrer Achse  $o$  liegender Punkt  $S$ . Unter der Distanzkegelfläche  $\Delta$  werden wir eine Normalfäche zur Fläche  $\Phi$  mit der Spitze  $S$  verstehen. Wir bezeichnen  $h^d = \Phi \cap \Delta$ ,  $d = \varrho(S, \Phi)$ ;  $h^d$  heisst Hauptdistanzkreis und  $d$  ist die Distanz.

$Z$  sei ein Drehkegelraum mit der Spitze  $S$ , dessen Achse eine Kegelerzeugende der Kegelfläche  $\Delta$  ist und dessen Kegelspitzenwinkel  $60^\circ$  beträgt. Durch eine Drehung dieses Kegelraums um die Achse  $o$  entsteht ein Gebilde, das wir einen  $Z^s$ -Raum nennen werden. Seine Hüllfläche wird durch zwei Drehkegelflächen mit gemeinsamer Spitze  $S$  erzeugt (eine von diesen Flächen kann auch die Ebene sein, die senkrecht zur Achse  $o$  ist). Den Durchschnitt dieser Flächen mit der Fläche  $\Phi$  bilden zwei Parallelen  $^1k^z$  und  $^2k^z$  auf der Fläche  $\Phi$ .

<sup>1)</sup> Zum Unterschied von bekannten Netzvordrucken erfordert sie nicht notwendig die Ergänzungs-konstruktionen.

**Definition 1.** Unter der konischen Perspektive werden wir eine Projektion in die Projektionsfläche  $\Phi$  aus dem Mittelpunkt  $S$  verstehen, wobei wir

1. nur im  $Z^s$ -Raum liegende Gebilde abbilden werden,
2. nur die Bilder der Punkte vom  $Z^s$ -Raum in Betracht nehmen werden, die auf Halbgeraden liegen, die die abgebildeten Punkte enthalten und ihren Ursprung in  $S$  haben,
3.  $d > 2l$  cm voraussetzen werden.

Bemerkung 2. Wenn wir irgendeine von den Bedingungen 1., 2., 3. nicht berücksichtigen, geht es um eine zentralkonische Projektion<sup>2)</sup>.

Bemerkung 3. Da die konische Perspektive eine Abbildung in die Kegelfläche ist, beachten wir aus praktischen Gründen gleichzeitig auch die Abwicklung dieser Fläche (und auch der in ihr liegenden Bilder), wobei wir natürlich in Betracht nehmen, dass ein richtiges Bild (im Sinne dieser Abbildung) auf der Fläche  $\Phi$  ist. Durch die Abwicklung der Fläche  $\Phi$  gehen ihre Gebilde in andere über, die wir durch den Index „0“ (unten rechts liegend, z.B.  ${}^i k_0$ ) unterscheiden werden.

Ferner führen wir einige mit der Konstruktion des Rasters für die konische Perspektive zusammenhängende Eigenschaften an.

Wir unterbringen die Fläche  $\Phi$  im rechtwinkligen Koordinatensystem  $(Oxyz)$ , sodass  $o = z$ ,  $V = O$  ist. In Abb. 1a ist die Fläche  $\Phi$  und das Koordinatensystem  $(Oxyz)$  in der Mongeschen Projektion angeführt.

Es sei  $A$  ein Punkt,  $A \notin o$ . Durch die Gerade  $[SA]$  führt man zwei Ebenen, und zwar  $\varkappa \perp [xy]$  und  $\lambda \perp [xz]$ . Wir bezeichnen  $\{k, \bar{k}\} = \varkappa \cap \Phi$ ,  $l = \lambda \cap \Phi$ ;  $k$  und  $\bar{k}$  sind die Erzeugenden und  $l$  ist ein in der Fläche  $\Phi$  liegender Kegelschnitt<sup>3)</sup>.

Die zentralkonischen Projektionen  $A_s$  und  $\bar{A}_s$  des Punktes  $A$  sind:  $A_s = k \cap l$ ,  $\bar{A}_s = \bar{k} \cap l$ . Nach der Abwicklung der Fläche  $\Phi$  (Abb. 1b) sind  $A_0$  und  $\bar{A}_0$  die Bilder der Projektionen  $A_s$  und  $\bar{A}_s$ , wobei  $A_0 = k_0 \cap l_0$ , und  $\bar{A}_0 = \bar{k}_0 \cap l_0$  ist.

Das System der Linien  $l_0$  und der Halbgeraden  $k_0$  werden wir einen Raster der konischen Perspektive nennen und mit  $\mathfrak{Z}_0$  bezeichnen (auf der Fläche  $\Phi$  erzeugt die Liniensysteme  $k$  und  $l$  einen Raster  $\mathfrak{Z}$ ). Dem Raster  $\mathfrak{Z}_0$  ordnen wir einen Raster  $\mathfrak{M}$  (Mongeschen Raster) zu, der durch zwei Geradenbüschel  $S_1({}^i \varkappa_1, \dots)$  und  $S_2({}^i \lambda_2, \dots)$  gebildet ist. Die Gebilde  ${}^i k_0, {}^j l_0, {}^i \varkappa_1, {}^j \lambda_2$  heissen die Rasterelemente. In den Rastern  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{Z}_0$  beziffern wir übereinstimmend die einander entsprechenden Rasterelemente (Abb. 7ab). Die Halbgeraden  ${}^i k_0$  werden übereinstimmend mit den Halbgeraden  ${}^i \varkappa_1$  beziffert, wobei die Ziffern  $\bar{0}$  bis  $\bar{360}$  gleichzeitig die Winkel zwischen den Halbebenen  ${}^i \varkappa$  und der Koordinatenebene  $[xz]$  bezeichnen. Die Linien  ${}^j l_0$  kann man auf bekannte Weise (mit Hilfe des Catalanschen Satzes) konstruieren.

<sup>2)</sup> Die Bedingung 3. in der Definition 1 werden wir hier zwecks Raumersparnis auch für die konische Perspektive nicht einhalten.

<sup>3)</sup> Ist  $\lambda \perp x$  und also  $\lambda = \varkappa$ , ersetzen wir die Ebene  $\lambda$  durch eine andere, die zu  $[yz]$  senkrecht ist, und benutzen die Konstruktion für die Geraden, die zur Abb. 5 gehört.

Eine andere Konstruktion, die für unsere Zwecke geeigneter ist, folgt aus einer analytischen Darstellung. Wir bezeichnen mit  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi/2$ ) den Winkel zwischen der Erzeugenden der Fläche  $\Phi$  und der Ebene  $[xy]$  (Abb. 2); es seien  $(0, 0, s)$ ,  $s > 0$ , die Koordinaten des Punktes  $S$ . Die Kegelfläche  $\Phi$  hat dann die parametrischen Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= v \cos \varphi \cdot \cos u, \\ y &= v \cos \varphi \cdot \sin u, \\ z &= v \sin \varphi. \end{aligned}$$

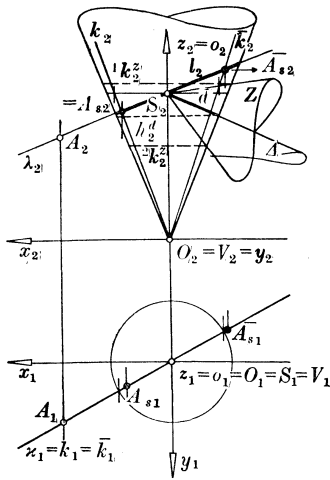


Abb. 1a.

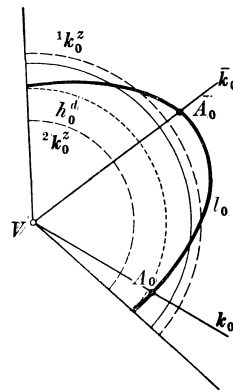


Abb. 1b.

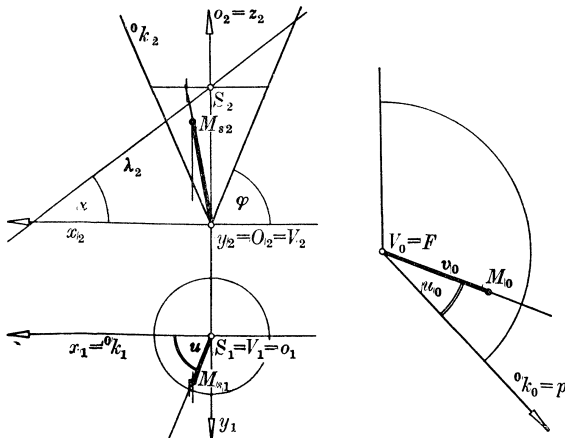


Abb. 2.

Wir führen nun in der Komplanationssebene der Fläche  $\Phi$  ein Polarsystem  $(V_0, {}^0k_0)$  ein, wobei die Polarachse  ${}^0k_0 = (\Phi \cap [xz])_0$  ist.

Es sei  $M_s(u, v) \in \Phi$  ein beliebiger Punkt, der in den Punkt  $M_0(u_0, v_0) \in \Phi_0$  abgebildet wird. Dann kann man den Übergang von den Koordinaten  $u, v$  der Fläche  $\Phi$  zu den Koordinaten  $u_0, v_0$  im Polarsystem  $(V_0, {}^0k_0)$  durch diese Transformationsgleichungen erklären:

$$(2) \quad u_0 = u \cos \varphi, \quad v_0 = v^4).$$

Die erste Gleichung in (2) folgt aus der Beziehung für die Gleichheit der Bogen  $ur = vu_0$ , wo  $r = v \cos \varphi$  ist.

Es sei  $\alpha$  ein Winkel zwischen den Ebenen  $\lambda$  und  $[xy]$ . Durch die Lösung der Gleichung für

$$z - x \operatorname{tg} \alpha - s = 0$$

mit den Gleichungen (1) für  $\Phi$  erhalten wir eine Gleichung der Kegelschnittlinie

$$(3) \quad v - v \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} \alpha \cos u - \frac{s}{\sin \varphi} = 0,$$

die man anderenfalls auch als *die Gleichung der Kegelschnittlinie in den Polarkoordinaten* auffassen kann, wobei der Ursprung dieses Systems in einem Brennpunkt  $F$  der Kegelschnittlinie und die Polarachse  $p$  in ihrer Achse liegt. Dieses System bezeichnen wir  $(F, p)$ . Die Parameter  $u$  und  $v$  sind dann die *Polarkoordinaten*;  $\operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} \alpha$  ist die numerische Exzentrizität und  $s/\sin \varphi$  ist ein Parameter.

Wickelt man die Kegel­fläche  $\Phi$  in die Ebene ab, dann wickelt sich die Kegelschnittlinie (3) mit Hilfe der Transformation (2) in die Kurve

$$(4) \quad v_0 - v_0 \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{u_0}{\cos \varphi} - \frac{s}{\sin \varphi} = 0,$$

im Polarsystem  $(V_0, {}^0k_0)$  ab.

Um die Kurve aus der Gleichung (4) graphisch zu konstruieren, identifizieren wir die Polarsysteme  $(V_0, {}^0k_0)$  und  $(F, p)$ , danach konstruieren wir die Kegelschnittlinie (3) im System  $(F, p)$ .

Dann sind die Kurven (3) und (4) neuerdings durch die Transformation mit der Gleichung (2) in der Komplanationssebene verbunden; daraus folgt eine einfache Konstruktion der Kurve (4) mit Hilfe der Kegelschnittlinie (3).

In Abb. 3 ist ein Beispiel der Konstruktion der Kurve (4) für  $\varphi = \pi/3$ ,  $s = 1$  angeführt.

<sup>4</sup> Damit ist zugleich die Orientierung im System  $(V_0, {}^0k_0)$  mit Hilfe der Orientierung in der Fläche  $\Phi$  bestimmt.

Ist die Ebene  ${}^0\lambda \perp o$ , so ist  $\alpha = 0$  und die Gleichung (3) hat die Form  $v = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ; dann ist der Schnitt ein Kreis  ${}^0l$ , der durch die Abwicklung der Fläche  $\Phi$  in einen Kreisbogen mit dem Zentralwinkel  $u_0 = \pi$  und Radius  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$  übergeht.

Ist ferner z.B.  $\lambda$  eine Ebene, für die  $\alpha = \pi/6$  ist, so ist der Schnitt dieser Ebene mit der Fläche  $\Phi$  offenbar eine Ellipse  $l$  mit der Gleichung

$$v - \frac{1}{3}v \cos u - \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0,$$

weil  $\varepsilon = e/a = \frac{1}{3} < 1$  ist.

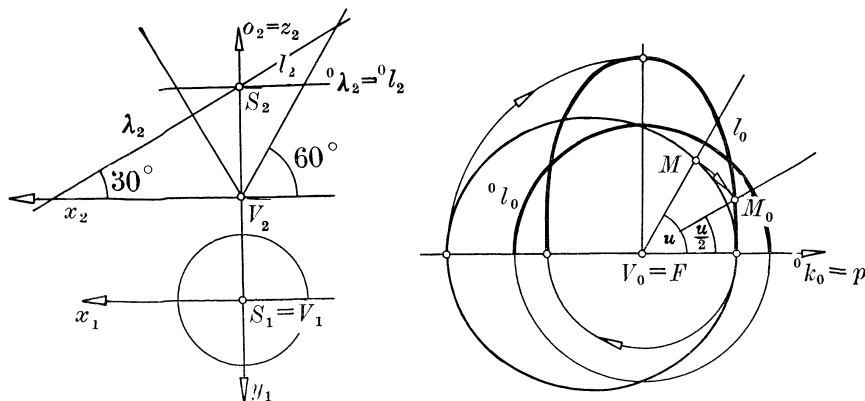


Abb. 3.

Aus der Gleichung (5) folgt auch eine graphische Konstruktion der Ellipse  $l$ . Ein Brennpunkt  $F$  der Ellipse deckt sich mit dem Punkt  $V_0$ . Die Punkte von  $l_0$  sind durch die Gleichung

$$v_0 - \frac{1}{3}v_0 \cos 2u_0 - \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0$$

gegeben, die wir durch die Transformation der Ellipse (5) im System  $(F, p)$  mit den Gleichungen  $2u_0 = u$ ,  $v_0 = v$  erhalten; wir konstruieren sie folgenderweise:

Zu einem beliebigen Punkt  $M$  der Ellipse (5) gehört ein Punkt  $M_0$ , der ein Schnittpunkt des Kreises  $(F, \overline{FM})$  mit dem Schenkel des Winkels  $u_0^M = u^M/2$  ist, wo  $u^M$  der Winkel der Geraden  $[FM]$  mit der positiven Richtung der Polarachse  $p = {}^0k_0$  ist.

Wenn die Werte von  $\alpha$  veränderlich sind, ist die Gleichung (3) ein einparametrisches System der Kegelschnittlinien und die Gleichung (4) ein einparametrisches System der Linien, die zusammen mit den Halbgeraden  ${}^i k_0$  ein Raster  $\mathfrak{Z}_0$  bilden.

Falls man eine grössere Anzahl der Linien  ${}^j l_0$  konstruiert, kann man von der Tatsache ausgehen, dass alle Ebenen  ${}^j \lambda$  ein Büschel mit der Achse  $r \perp [xz]$ ,  $S \in r$ ,

bilden. So ist eine Punktreihe  ${}^i k({}^j M)$  auf jeder zu der Geraden  $r$  windschiefen Geraden  ${}^i k$  mit dem Bündel der Ebenen  $r({}^j \lambda)$  perspektiv, falls  ${}^j M = {}^i k \cap {}^j l$  ist, und für jedes Geradenpaar  ${}^i k$  und  ${}^{i'} k$  gilt

$${}^i k({}^j M) \bar{\bar{}} {}^{i'} k({}^j M').$$

Daraus folgt auch

$${}^i k_0({}^j M_0) \bar{\bar{}} {}^{i'} k_0({}^j M'_0).$$

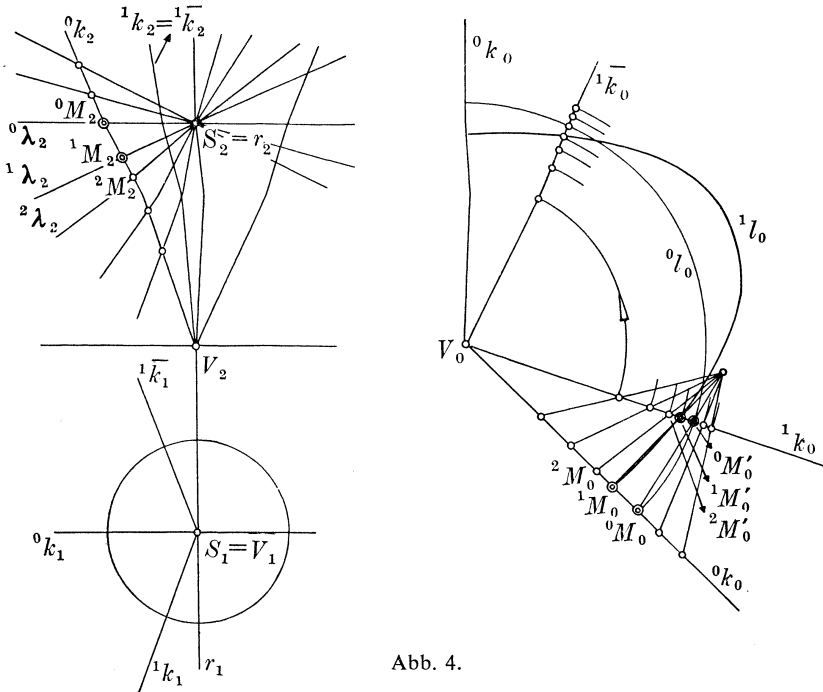


Abb. 4.

Kennt man zwei von den Linien  ${}^j l_0$  (eine von ihnen kann die Kreislinie  ${}^0 l_0$  sein), so kann man durch die Ausfüllung der perspektiven Punktreihen die Punkte der weiteren Linien konstruieren (Abb. 4).

Bemerkung 4. Da jede Schnittlinie durch die Ebene  ${}^j \lambda$  symmetrisch bezüglich einer die Achse  $o$  schneidender Fallgeraden ist, gibt es Paare  ${}^i k_0$  und  ${}^{i'} k_0$ , auf denen die Punktreihen kongruent sind (ausser den Fall, wenn eine Erzeugende durch den Punkt geht, der ein Lokalextremum hat).

Bei der Konstruktion der konischen Perspektive des technischen Objekts mit Hilfe des Rasters kann man oftmals vorteilhaft die zentralkonische Projektion der Geraden ausnützen.

Gegeben sei die Gerade  $a$  in einer allgemeinen Lage (in dem Sinne, dass wir die Fälle auslassen, wenn sich die Gerade  $a$  in die Raster Elemente abbildet oder wenn  $a \ni S$  ist). Ihre zentralkonische Projektion sei ein Kegelschnitt  $a_0$ . Um ihre Abwicklung  $a_0$  mit Hilfe des Rasters  $\mathfrak{Z}_0$  zu konstruieren, muss man eine solche Ebene  $\gamma$  bestimmen, die nach einer Drehung um die Achse  $o$  eine Projektionsebene  $\gamma = [Sa]$  der

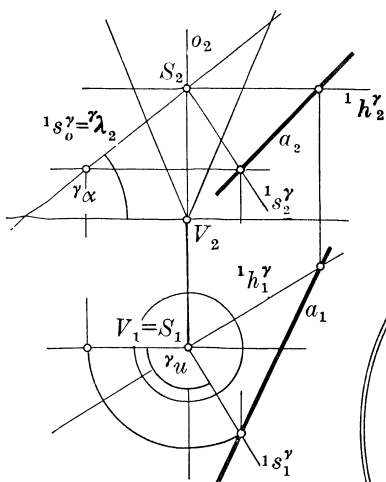


Abb. 5.

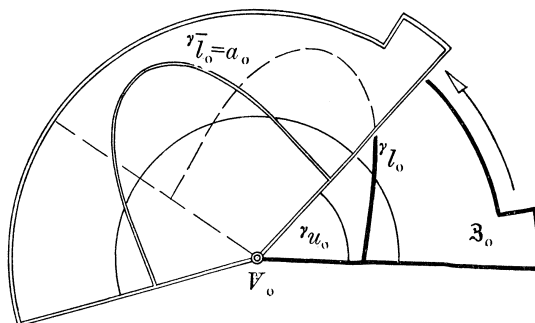


Abb. 6.

Geraden  $a$  ergibt (Abb. 5). Praktisch muss man eine Fallgerade  $^1s^\gamma \ni S$  der Ebene  $\gamma$  konstruieren und diese um die Achse  $o$  in die Frontlage drehen (d.h.  $\parallel [xz]$ ). Dem Winkel  $\gamma u$  dieser Umdrehung entspricht nach der Abwicklung ein Winkel  $\gamma u_0 = \gamma u \cos \varphi$ . Dem Winkel  $\gamma \alpha$  zwischen der Fallgeraden  $^1s^\gamma$  und der Ebene  $[xy]$  entspricht irgendeine Ebene  $\gamma \lambda$ , die denselben Winkel mit der Ebene  $[xy]$  einschließt. Drehen wir dann den Raster  $\mathfrak{Z}_0$  aus der ursprünglichen Lage um  $V_0$  um den Wert  $\gamma u \cos \varphi$ , so ist die Linie  $\gamma l_0$  auf dem Raster  $\mathfrak{Z}_0$  eine Abwicklung der zentralkonischen Projektion der Geraden  $a$  (Abb. 6).

Die konische Perspektive eines geschlossenen Stadtplatzes aus Abb. 7a mit Hilfe des Rasters in der Mongeschen Projektion ist schematisch in Abb. 7b angeführt. Die beiden Raster  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{Z}_0$  kann man praktisch in der Form eines Vordruckes herstellen. Auf den Raster  $\mathfrak{M}$  legen wir die Mongesche Projektion des Gebildes und in das auf dem Raster  $\mathfrak{Z}_0$  liegende Transparentpapier zeichnen wir durch die Punkt-konstruktion seine Perspektive. Die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  liegen z.B. auf den Geraden  $^{196}k_1 = \overline{196}$ , bzw.  $^{176}l_2 = 176$ , darum ist  $M_0$  der Schnittpunkt der Linien  $^{196}k_0 = \overline{196}$  und  $^{176}l_0 = 176$  im Raster  $\mathfrak{Z}_0$ . Die perspektiven Bilder der zur Ebene  $[yz]$  senkrechten Kanten erhalten wir durch die Drehung des Rasters  $\mathfrak{Z}_0$  um einem Winkel, der dem rechten Winkel (bei fester Zeichenfläche) entspricht.



Bemerkung 5. Ein Spezialfall der konischen Perspektive ist die bekannte zylindrische Perspektive. Die oben angeführten Konstruktionen lassen sich natürlich auch für diese Abbildung zurichten. Wenn man hier z.B. die Konstruktion des perspektiven Bildes einer Geraden anwendet, so gilt zwischen den Linien  $^i l_0$  eine perspektive Affinität mit der Achse  $^o l_0$  und mit einer zu  $^o l_0$  senkrechten Richtung [1].

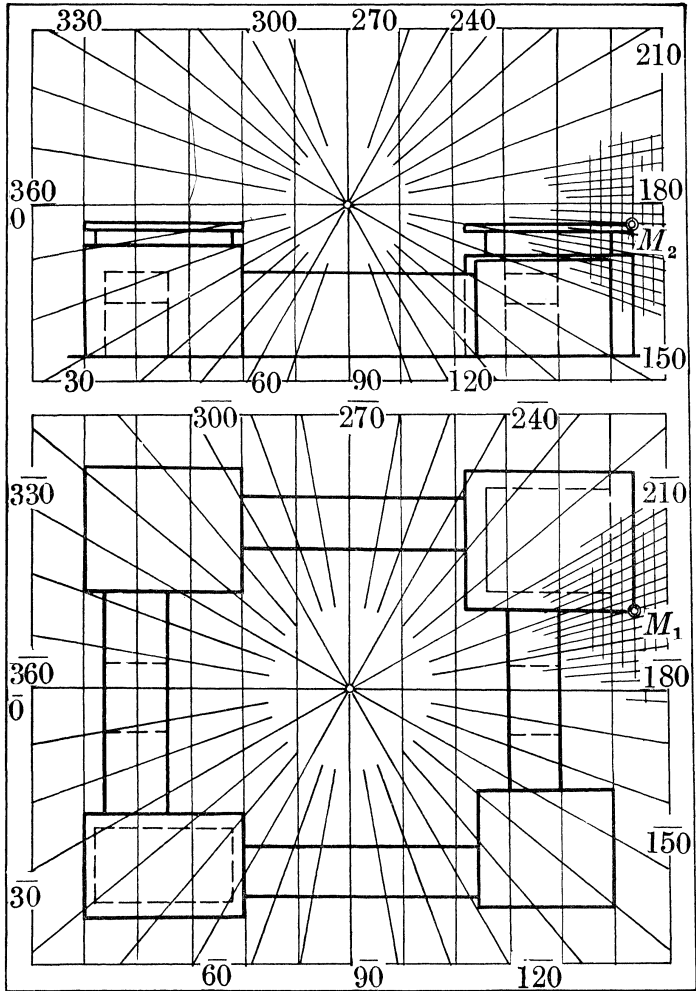


Abb. 7a.

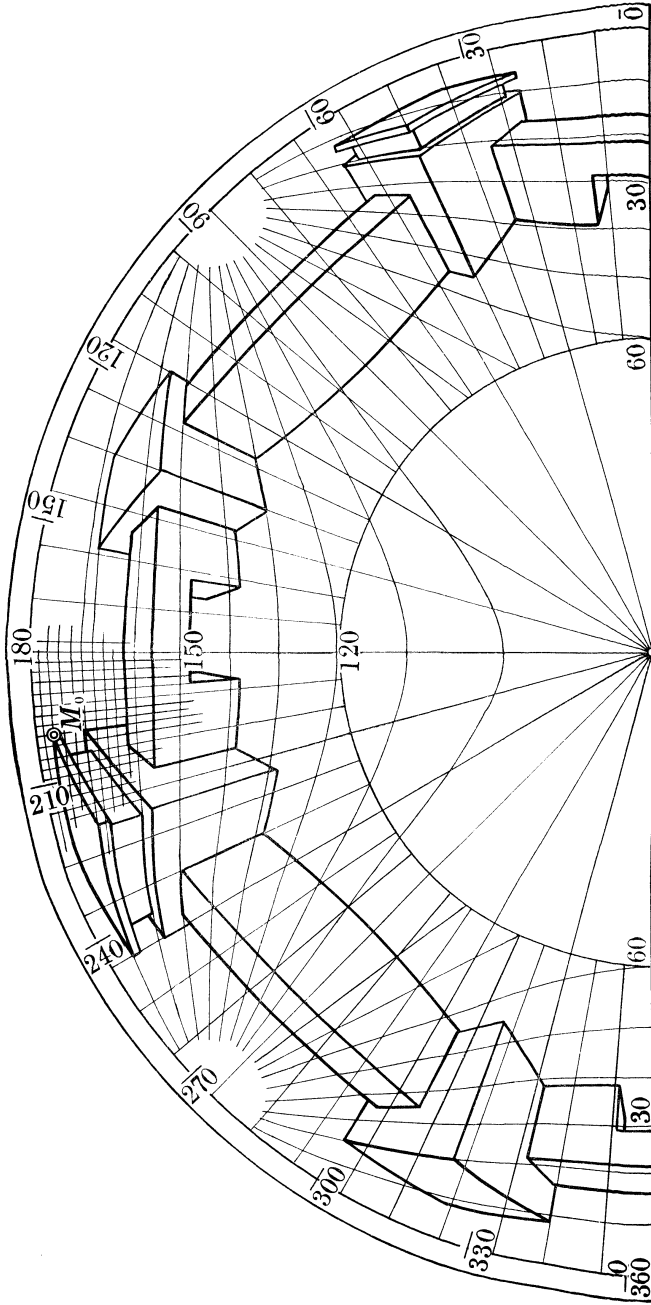


Abb. 7b.

## 2. DIE KONSTRUKTION DES RASTERS IN DER LINEAREN PERSPEKTIVE

Dieser Abschnitt behandelt die Einführung eines Rasters für die lineare Perspektive nach dem gewöhnlichen Durchschnittsverfahren [2], [3].

Gegeben seien in der Mongeschen Projektion ein Mittelpunkt  $S$  und die perspektive Projektionsebene  $q = [ABC]$ , sodass gilt:  $[AB] \parallel \pi$ ,  $[BC] \parallel v$  (Abb. 8a). Weiter sei das Parallelogramm  $A_0B_0C_0D_0$  ein Gebilde, das wir durch die Versetzung des

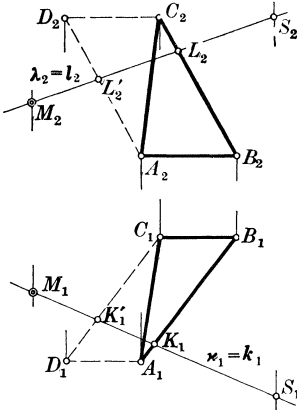


Abb. 8a.

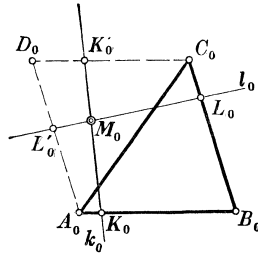


Abb. 8b.

Parallelogramms  $ABCD$  aus der Ebene  $q$  in die Zeichenfläche erhalten oder das diesem Gebilde ähnlich ist (für einen beliebigen Koeffizienten  $c \neq 0$ ). In Abb. 8b ist ein Gebilde für  $c = 1$  konstruiert. Das perspektive Bild eines beliebigen Punktes  $M$  ( $M \notin S$ ) kann man folgenderweise konstruieren:

Durch die Gerade  $[MS]$  führen wir die Ebenen  $\kappa$  und  $\lambda$ ,  $\kappa \perp \pi$ ,  $\lambda \perp v$ . Wir bezeichnen  $k = \kappa \cap q$ ,  $l = \lambda \cap q$ . Das perspektive Bild  $M_s$  des Punktes  $M$  ist dann der Punkt  $M_s = k \cap l$ . Ein Bild der Projektion  $M_s$  in der Zeichenfläche ist dann der Punkt  $M_0 = k_0 \cap l_0$ , wo  $k_0 = [K_0K'_0]$ ,  $l_0 = [L_0L'_0]$ ,  $K \in [AB]$ ,  $K' \in [CD]$ ,  $L \in [BC]$ ,  $L' \in [AD]$ ,  $\overline{A_0K_0} = c \overline{AK} = c \overline{A_1K_1}$ ,  $\overline{C_0K'_0} = c \overline{CK'} = c \overline{C_1K'_1}$ ,  $\overline{B_0L_0} = c \overline{BL} = c \overline{B_2L_2}$ ,  $\overline{A_0L'_0} = c \overline{AL'} = c \overline{A_2L'_2}$  ist.

Die Systeme der Geraden  ${}^i k_0$  und  ${}^j l_0$  werden wir Raster  $\mathfrak{Z}_0$  der linearen Perspektive nennen; ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt bilden die Büschel  $S_1({}^i \kappa_1)$  und  $S_2({}^j \lambda_2)$  einen Mongeschen Raster  $\mathfrak{M}$ . Die Rasterelemente  ${}^i \kappa_1$ ,  ${}^j \lambda_2$ ,  ${}^i k_0$ ,  ${}^j l_0$  bezieht man übereinstimmend in beiden Rastern  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{Z}_0$ .

Ähnlich wie im ersten Abschnitt konstruieren wir auf dem Transparentpapier, das man auf den Raster  $\mathfrak{Z}_0$  legt, das perspektive Bild (Abb. 9b) des durch seine Mongesche Projektion auf dem Raster  $\mathfrak{M}$  gegebenen Gebildes (Abb. 9a).

In der linearen Perspektive kann man mit Vorteil auch den sog. perspektiven Rahmen einführen, mit dem man auch die Perspektive auf ein undurchsichtiges Papier zeichnen kann. Der Rahmen  $\mathfrak{z}_0$  unterscheidet sich von dem Raster  $\mathfrak{Z}_0$  dadurch, dass wir die Geraden  ${}^i k_0$  und  ${}^j l_0$  nur am Rande des Papiers andeuten und die perspektiven Bilder der Punkte dann mit Hilfe zweier zu den entsprechenden Geraden  ${}^i k_0$  und  ${}^j l_0$  angelegten Lineale zeichnen. In Abb. 10b ist eine lineare Perspektive an die lotrechte Projektionsebene mit Hilfe des Rahmens aus der Mongeschen Projektion (Abb. 10a) angeführt.

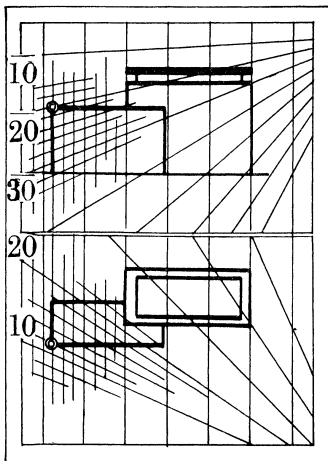


Abb. 9a.

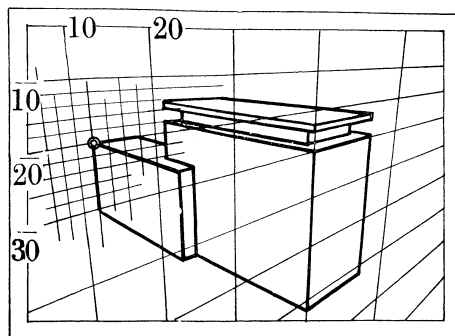


Abb. 9b.

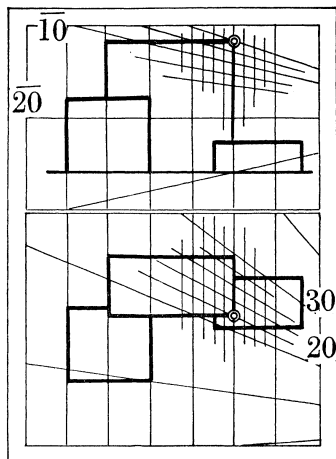


Abb. 10a.

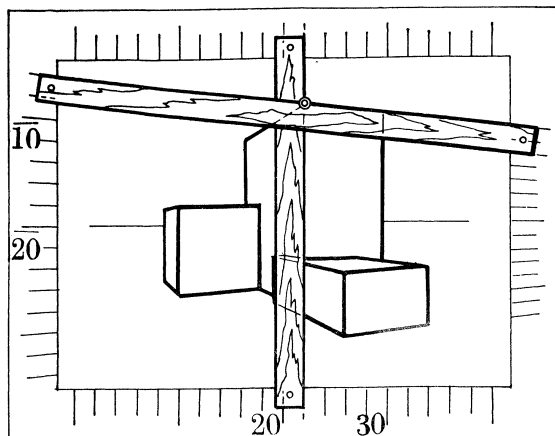


Abb. 10b.

Die perspektiven Rahmen können aber als eine Ergänzungsvorrichtung zu dem passenden Raster dienen. Es sei ein Raster  $\mathfrak{Z}_0$  für irgendeine Projektionsebene  $\varrho$

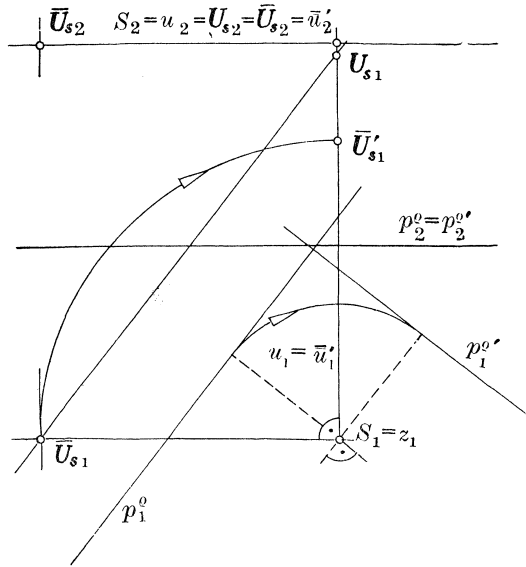


Abb. 11.

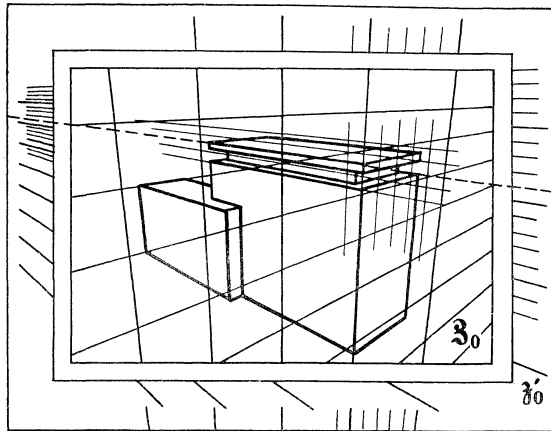


Abb. 12.

gegeben. Die Geraden  $^j l_0$  dieses Rasters gehen durch das Bild  $U_0$  des Fluchtpunktes  $U_s$  in der Richtung  $u \perp v$ . Die waagerechten zu dieser Richtung orthogonalen Geraden haben einen Fluchtpunkt  $\bar{U}_s$  (Abb. 11), dessen Bild in dem Raster  $\mathfrak{Z}_0$  nicht bezeichnet

wird. Durch die Rotation  $\mu$  der Basis  $(S, \varrho)$  der perspektiven Projektion um die Achse  $z \perp \pi$ ,  $S \in z$ , um den Winkel  $\pi/2$  bekommen wir eine neue Basis  $(S, \varrho')$  der linearen Perspektive. Die Geraden  $^j l'_0$  des Rahmens  $\mathfrak{z}'_0$  dieser Perspektive gehen durch den Punkt  $\bar{U}'_0$ , der ein Bild des Fluchtpunktes  $\bar{U}'_s$  in der Richtung  $\bar{u}' \perp v$ ,  $\bar{u}' = u$  ist. Durch die Umkehrrotation  $\mu^{-1}$  geht die Basis  $(S, \varrho')$  in  $(S, \varrho)$  und der Punkt  $\bar{U}'_s$  in  $\bar{U}_s$  über. Daraus folgt, dass die Geraden  $^j l'_0$  des Rahmens  $\mathfrak{z}'_0$  nach der Rotation  $\mu^{-1}$  zu den perspektiven Bildern der waagerechten Geraden werden, die zur Richtung  $u$  orthogonal sind. Der Rahmen  $\mathfrak{z}'_0$  ist dann ein Ergänzungsrahmen zu dem Raster  $\mathfrak{z}_0$ , der so um den fehlenden Fluchtpunkt ergänzt wird.

In Abb. 12 wird der Raster  $\mathfrak{z}_0$  aus Abb. 8b um den zugehörigen Ergänzungsrahmen  $\mathfrak{z}'_0$  ergänzt.

#### Literatur

- [1] J. Šlechta: Perspektiva cylindrická, Sb.: Geometrie v technice a umění, SNTL, Praha 1955, str. 125—130.
- [2] R. Piska - V. Medek: Deskriptivní geometrie I, SNTL — SVTL, Praha 1966.
- [3] A. Й. Зметный: Построение перспективы на наклонной картинной плоскости методом ограничения картины, Иссл. в области начерт. геом., сб. науч. тр., вып. 36, Ленингр. инж. строит. институт, Ленинград 1962.

#### Súhrn

### RASTER V PERSPEKTÍVE

JOZEF ZÁMOŽÍK

Pod rastrom v tomto článku sa rozumie predloha, pomocou ktorej možno bodovou konštrukciou zostrojiť tzv. kónickú a lineárnu perspektívu útvaru. Ilustrácie praktického použitia sú na obr. 7, 9, 10, 12.

*Anschrift des Verfassers:* RNDr. Jozef Zámožík, CSc., Stavebná fakulta SVŠT, katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Gottwaldovo nám. 2, Bratislava.