Aplikace matematiky

Libuše Grygarová

Qualitative Untersuchung des I. Optimierungsproblems in mehrparametrischer Programmierung

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 4, 276–295

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103296

QUALITATIVE UNTERSUCHUNG DES I. OPTIMIERUNGSPROBLEMS IN MEHRPARAMETRISCHER PROGRAMMIERUNG

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen am 23. September 1969)

In der üblichen Literatur über die lineare parametrische Optimierung, hauptsächlich über die lineare einparametrische Optimierung, wird am meistens die sogenannte Simplexmethode als Ausgangspunkt genommen und auf Grund dieses Verfahrens gelangt man zu verschiedenen theoretischen Folgerungen, die nachher für allgemeinere Aufgaben des entsprechenden Typs gelten. Vom mathematischen Standpunkt aus ist dieser Zugang nicht ganz korrekt, denn, es kann nicht der qualitative Faktor des allgemein formulierten Problems auf diese Weise umgefasst werden (z.B. die Voraussetzungen für das Simplex-Verfahren schränken schon die qualitative Theorie ein). Aus diesem Grunde scheint es natürlicher zu sein, einen neuen Weg zu den Beweisen den entsprechenden Sätze aus der Theorie der linearen parametrischen Optimierung einzuschlagen, wobei das Simplex-Verfahren selbst nur zur Berechnung von konkreten Aufgaben führt. In meiner früheren Arbeit [5] habe ich ebenfalls für das Erreichen der theoretischen Ergebnisse, die den qualitativen Charakter einer linearen mehrparametrischen Optimierungsaufgabe beschreiben, die Simplexmethode benutzt.

Die vorgelegte Arbeit enthält ebenfalls eine qualitative Untersuchung des sogenannten „ersten mehrparametrischen linearen Optimierungsproblems", und zwar ohne irgendwelcher Benutzung irgendeines Verfahrens, welches selbst nur zur Berechnung in konkreten Fällen dienen soll. Alle theoretische Ergebnisse aus der oben zitierten Arbeit [5] sind hier enthalten. Darüber hinaus enthält die vorgelegte Arbeit einige neue Resultate, die die Menge aller optimalen Lösungen des Problems betreffen, also nicht nur eine einzige optimale Lösung (eine optimale Basis-Lösung), wie es bei der Simplexmethode vorkommt.

In der Arbeit sind nur die bekannten Tatsachen aus der elementaren Theorie der konvexen Polyeder (z.B. [1]) und die bekannten theoretischen Ergebnisse aus der linearen einparametrischen, bzw. mehrparametrischen Optimierung benutzt

(Arbeiten [2], [3], [4]). Die geometrische Interpretation, die oft bei der Durchführung von Beweisen angewendet wird, ist in der fraglichen Literatur nicht üblich und in dieser Hinsicht liegt hier keine Vorlage vor.

Es seien c_α, ${}_kc_\alpha$, $a_{r\alpha}$, b_r $(\alpha = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, d;\ r = 1, \ldots, m)$ gegebene reale Zahlen mit den Eigenschaften

a) $1 \leqq d \leqq n - 1$;

b) der Rang der Matrix $\|c_\alpha, {}_1c_\alpha, \ldots, {}_dc_\alpha\|$ ist $d + 1$;[1])

c) $\sum_{\alpha=1}^{n} |a_{r\alpha}| > 0$ für alle $r = 1, \ldots, m$.

Unter dem I. linearen mehrparametrischen Optimierungsproblem verstehen wir die folgende Aufgabe:

Man soll das Minimum (das Maximum) der Funktion

$$\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k\, {}_kc_\alpha\right) x_\alpha\,, \tag{1}$$

unter dem Restriktionen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r \quad (r = 1, \ldots, m)\,,$$

$$x_\alpha \geqq 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)\,,$$

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbf{I}_d\,,$$

bestimmen, wo $\mathbf{I}_d$ ein gegebenes abgeschlossenes und beschränktes d-dimensionales Intervall in $\mathbf{E}_d$ ist. Wir setzen voraus, dass

$$\mathfrak{M} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r, (r = 1, \ldots, m), x_\alpha \geqq 0, (\alpha = 1, \ldots, n)\right\} \neq \emptyset^{2)} \tag{2}$$

gilt.

Wir werden uns nur auf das Problem der Minimierung der Funktion $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ einschränken, denn der Fall der Maximierung von $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ wird auf dem Fall der Minimierung einfach dadurch überführt, dass statt $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ die Funktion $-\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ betrachtet wird.

In dieser Arbeit handelt es sich nicht um eine konkrete Berechnung des eben formulierten I. linearen Optimierungsproblems der mehrparametrischen Programmierung,

---

[1]) Die Voraussetzungen über die Vektoren ${}_1\mathbf{c}, \ldots, {}_d\mathbf{c}$ sind natürlich, denn, sonst — falls die entsprechenden Bedingungen nicht erfült wären — könnte man das gegebene lineare Optimierungsproblem auf ein ähnliches Problem mit einer kleineren Anzahl von Parametern reduzieren, wo die entsprechenden Bedingungen schon erfüllt sind.

[2]) Die Menge $\mathfrak{M}$ stellt also ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_n$, welches mindestens eine Ecke besitzt, dar.

sondern um eine qualitative Untersuchung eines ganzen Systems von Aufgaben

$$(3) \qquad \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\lambda}(\mathbf{x})\} \; !$$

und zwar für alle $\lambda \in \mathbf{E}_d$. Genauer gesagt, werden wir uns mit der folgenden Aufgabestellung beschäftigen:

1. Es soll der maximale Definitionsbereich der Funktion

$$(4) \qquad \varphi(\lambda) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\lambda}(\mathbf{x})\}$$

bestimmt und näher charakterisiert werden;

2. Falls die Menge

$$(5) \qquad \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_0\lambda) = \{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M} \mid \mathbf{F}_{0\lambda}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{0\lambda}(\mathbf{x})\}\}$$

die Lösung des Problems

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{0\lambda}(\mathbf{x})\} \; !$$

ist, so soll man die Menge

$$(6) \qquad \mathbf{P}_{0\lambda} = \{\lambda \in \mathbf{E}_d \mid \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\lambda) = \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_0\lambda)\}$$

berechnen;

3. Es soll die Funktion $\varphi(\lambda)$ in ihrem maximalen Definitionsbereich näher charakterisiert werden;

4. Es sollen die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Mengen $\mathbf{P}_{\lambda}$ $(\lambda \in \mathbf{E}_d)$ angegeben werden.

Satz 1. *Es sei für festgewähltes* ${}_0\lambda \in \mathbf{E}_d$ *das Problem*

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{0\lambda}(\mathbf{x})\} \; !$$

lösbar (d.h. $\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_0\lambda) \neq \emptyset$*). Ist* ${}_0\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_0\lambda)$ *eine Ecke des Polyeders* $\mathfrak{M}$[3]*, ist die Menge*

$$(7) \qquad \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) = \{\lambda \in \mathbf{E}_d \mid \mathbf{F}_{\lambda}({}_0\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\lambda}(\mathbf{x})\}\}$$

ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_d$.

---

[3]) Wir gehen von der bekannten Tatsache aus, dass unter der Voraussetzung der Lösbarkeit des Problems (3) (für ein festgewähltes $\lambda \in \mathbf{E}_d$) immer eine Ecke des Polyeders $\mathfrak{M}$, in der das Optimum eintritt, existiert.

Beweis. Es ist $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \neq \emptyset$, da ${}_0\lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ gilt. Falls $\mathfrak{M}$ ein einziges Element enthält, d.h.

$$\mathfrak{M} = \{{}_0\mathbf{x}\} = \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_0\lambda)\,,$$

so stellt die Menge $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ den ganzen Raum $\mathbf{E}_d$ dar (der Raum $\mathbf{E}_d$ kann als ein Spezialfall eines konvexen Polyeders betrachtet werden)[4]). Falls die Menge $\mathfrak{M}$ mehrere Punkte besitzt, so gibt es mindestens eine Kante des Polyeders $\mathfrak{M}$, die aus der betrachteten Ecke ${}_0\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ herausgeht. Es seien ${}_jh$ $(j = 1, \dots, s)$ alle aus der betrachteten Ecke ${}_0\mathbf{x}$ ausgehende Kanten des Polyeders $\mathfrak{M}$. Auf jeder dieser Kante wählen wir einen beliebigen Punkt ${}_j\mathbf{x}$ $(j = 1, \dots, s)$[5]). Offenbar gilt

$$\mathbf{F}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \leqq \mathbf{F}_{0\lambda}({}_j\mathbf{x}) \quad (j = 1, \dots, s)\,.$$

Wir dfinieren weiter die Menge

$$\mathbf{I} = \{\lambda \in \mathbf{E}_d \mid \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x}) \leqq \mathbf{F}_\lambda({}_j\mathbf{x}), (j = 1, \dots, s)\} \tag{8}$$

die ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_d$ darstellt[6]). Die Menge

$$\mathfrak{M}' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{s} \beta_j\, {}_j\mathbf{x}, \sum_{j=0}^{s} \beta_j = 1, \beta_j \geqq 0, (j = 1, \dots, s)\} \tag{9}$$

ist ebenfalls ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_n$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}\,.$$

Für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}'$ und für jedes $\lambda \in \mathbf{I}$ gilt nach (8), (9)

$$\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_\lambda(\sum_{j=0}^{s} \beta_j\, {}_j\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} (c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k\, {}_kc_\alpha)(\sum_{j=0}^{s} \beta_j\, {}_jx_\alpha) =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} \beta_j (\sum_{\alpha=1}^{n} (c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k\, {}_kc_\alpha)\, {}_jx_\alpha = \sum_{j=0}^{s} \beta_j\, \mathbf{F}_\lambda({}_j\mathbf{x}) \geqq \sum_{j=0}^{s} \beta_j\, \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x}) = \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x})\,,$$

d.h.

$$\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}' \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbf{I}\,. \tag{10}$$

Wir wählen nun eine sphärische Umgebung des Punktes ${}_0\mathbf{x}$, die genügend klein ist, sodass alle Punkte aus dieser Umgebung, die der Menge $\mathfrak{M}$ angehören, zugleich Elemente der Menge $\mathfrak{M}'$ sind (die Existenz einer solchen Umgebung ist gesichert

---

[4]) d.h. ein konvexes Polyeder, welches keine Seite besitzt.

[5]) Die Punkte ${}_j\mathbf{x}$ $(j = 1, \dots, s)$ können auch die zu der Ecke ${}_0\mathbf{x}$ benachbarte Ecken, die die Randpunkte der entsprechenden Kanten sind, sein (soweit solche Ecken überhaupt existieren).

[6]) Wegen ${}_0\lambda \in \mathbf{I}$ ist, ist $\mathbf{I} \neq \emptyset$ und da die Menge $\mathbf{I}$ durch ein System von linearen Ungleichungen in λ beschrieben ist, stellt die Menge $\mathbf{I}$ einen nichtleeren Durchschnitt einer endlichen Anzahl von abgeschlossenen Halbräumen in $\mathbf{E}_d$ dar.

wie es sich aus der Definition (9) der Menge $\mathfrak{M}'$ ergibt). Nach (10) gilt in dieser Umgebung die Ungleichung

$$\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x}),$$

d.h., der Punkt ${}_0\mathbf{x}$ stellt ein lokales Extremum der Funktion $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ in bezug auf das Polyeder $\mathfrak{M}$ für alle $\lambda \in \mathbf{I}$ dar. Da die Funktion $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ beim festgewählten $\lambda \in \mathbf{I}$ eine lineare Funktion und daher eine konvexe Funktion in $\mathbf{x}$ ist, und da ebenfalls die Menge $\mathfrak{M}$ konvex ist, können wir hier den bekannten Satz anwenden,[7]) der besagt, dass ein jedes lokale Extremum einer konvexen Funktion über einer konvexen Menge zugleich ein absolutes Extremum dieser Funktion ist. Der Punkt ${}_0\mathbf{x}$ führt also für jedes $\lambda \in \mathbf{I}$ zum Minimum der Funktion $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ in bezug auf die Menge $\mathfrak{M}$, d.h.

$$\mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x}) \leqq \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbf{I}.$$

Daraus und aus (7) folgt

$$\mathbf{I} \subset \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}). \tag{11}$$

Ist $\hat{\lambda} \notin \mathbf{I}$, so existiert notwendig mindestens ein Punkt des ausgewählten Punktensystems $\{{}_j\mathbf{x}\}$ $(j = 1, \ldots, s)$ – sei es der Punkt ${}_k\mathbf{x}$ – so dass die Ungleichung

$$\mathbf{F}_{\hat{\lambda}}({}_0\mathbf{x}) > \mathbf{F}_{\hat{\lambda}}({}_k\mathbf{x})$$

gilt. Da zugleich ${}_k\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ ist, folgt daraus $\hat{\lambda} \notin \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und daher

$$\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \subset \mathbf{I}.$$

Daraus und aus (11) ergibt sich $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \equiv \mathbf{I}$ und daraus weiter, dass die Menge $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_d$ ist.

Satz 2. *Die Menge*

$$\mathfrak{A} = \{\lambda \in \mathbf{E}_d \mid \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\}! \text{ lösbar}\} \tag{12}$$

ist konvex und abgeschlossen in $\mathbf{E}_d$.

Beweis. Im Falle, wo $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ oder $\mathfrak{A} = \mathbf{E}_d$, gilt offenbar die Behauptung des Satzes. In übrigen Fällen werden wir die Konvexität der Menge $\mathfrak{A}$ indirekt beweisen.

Es sei ${}_1\lambda, {}_2\lambda \in \mathfrak{A}$, ${}_1\lambda \neq {}_2\lambda$. Betrachten wir einen Punkt $\bar{\lambda}$ mit

$$\bar{\lambda} = \beta\, {}_1\lambda + \gamma\, {}_2\lambda, \quad \beta + \gamma = 1, \quad \beta, \gamma > 0 \tag{13}$$

und setzen wir voraus, dass die Funktion $\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})$ ihr Minimum bezüglich $\mathfrak{M}$ nicht erreicht. Da $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist, so ist $\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})$ von unten unbeschränkt über der Menge $\mathfrak{M}$.

[7]) Siehe [6], Seite 58.

Daraus ergibt sich, dass die Menge $\mathfrak{M}$ ein unbeschränktes konvexes Polyeder ist. Es existiert daher ein Punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{M}$ und eine Halbgerade

$$(14) \qquad \mathbf{L} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \,\middle|\, x_\alpha = \hat{x}_\alpha + tv_\alpha, (\alpha = 1, \ldots, n), t \geqq 0, \sum_{\alpha=1}^{n} |v_\alpha| > 0\right\},$$

die der Menge $\mathfrak{M}$ angehört, wobei die Funktion $\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})$ entlang dieser Halbgeraden streng monoton fallend ist. Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ gilt also

$$\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x}) \equiv \widetilde{\mathbf{F}}_{\bar{\lambda}}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \bar{\lambda}_k \, {}_k c_\alpha\right) (\hat{x}_\alpha + t v_\alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \bar{\lambda}_k \, {}_k c_\alpha\right) \hat{x}_\alpha + t \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \bar{\lambda}_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha .$$

Da $t \geqq 0$ und $\widetilde{\mathbf{F}}_{\bar{\lambda}}(t)$ eine streng monoton abnehmende Funktion entlang der Halbgeraden $\mathbf{L}$ ist, ist notwendig

$$(15) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \bar{\lambda}_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha < 0 ,$$

d.h. nach (13)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} (\beta \, {}_1\lambda_k + \gamma \, {}_2\lambda_k) \, {}_k c_\alpha\right] v_\alpha < 0$$

oder auch

$$(16) \qquad \beta \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_1\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha + \gamma \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_2\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha < 0 .$$

Es kommen nun drei Möglichkeiten in Frage.

a) $$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_2\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha > \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_1\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha .$$

In diesem Falle können wir die Relation (16) in der Form

$$0 > \gamma \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\sigma + \sum_{k=1}^{d} {}_2\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha + \beta \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{n} {}_1\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha >$$

$$> \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_1\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha$$

schreiben. Die Funktion $\mathbf{F}_{1\lambda}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ (d.h. $\mathbf{F}_{1\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_1\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) (\hat{x}_\alpha + t v_\alpha)$, $t \geqq 0$) nimmt mit anwachsendem t beliebig kleine Werte an, was einen Widerspruch mit der Voraussetzung ${}_1\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}$ bedeutet.

b) $$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_2\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha < \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_1\lambda_k \, {}_k c_\alpha\right) v_\alpha .$$

Ähnlich wie im Falle a) erhält man hier, dass die Funktion $\mathbf{F}_{2\lambda}(\mathbf{x})$ entlang der betrachteten Halbgeraden $\mathbf{L}$ streng monoton abnimmt, sodass sie von unten unbeschränkt über der Halbgeraden $\mathbf{L}$ und daher über der Menge $\mathfrak{M}$ ist. Dies ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung ${}_2\lambda \in \mathfrak{A}$.

c) $$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_2\lambda_k\, {}_kc_\alpha\right) v_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_1\lambda_k\, {}_kc_\alpha\right) v_\alpha\,.$$

In diesem Falle übergeht die Ungleichung (16) in die Ungleichung

$$(\gamma + \beta) \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_2\lambda_k\, {}_kc_\alpha\right) v_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_2\lambda_k\, {}_kc_\alpha\right) v_\alpha =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} {}_1\lambda_k\, {}_kc_\alpha\right) v_\alpha < 0$$

und beide der Funktionen $\mathbf{F}_{1\lambda}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_{2\lambda}(\mathbf{x})$ sind von unten unbeschränkt über der Halbgeraden $\mathbf{L} \subset \mathfrak{M}$, was wiederum einen Widerspruch mit der Voraussetzung ${}_1\lambda, {}_2\lambda \in \mathfrak{A}$ bedeutet.

Es bleibt noch zu beweisen, dass die Menge $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist. Zu jedem ${}_0\lambda \in \mathfrak{A}$ gibt es – nach Satz 1 – eine Ecke ${}_0\mathbf{x}$ des Polyeders $\mathfrak{M}$ (mit der Eigenschaft ${}_0\mathbf{x} \in \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\lambda)$) und zugleich ein konvexes Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ (wo $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ eine in $\mathbf{E}_d$ abgeschlossene Menge ist). Die Anzahl dieser Polyeder ist eine endliche, denn, die Anzahl aller Ecken des Polyeders $\mathfrak{M}$ ist ebenfalls endlich. Die Vereinigung solcher abgeschlossenen Polyeder ist daher eine abgeschlossene Menge. Diese Vereinigung ist doch die Menge $\mathfrak{A}$ selbst.

Satz 3. *Ist die Menge $\mathfrak{A}$ aus (12) nichtleer, so stellt sie ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_d$ dar.*

Beweis. Falls die Menge $\mathfrak{A}$ ein Punkt ist, so ist die Behauptung trivial erfült. In anderen Fällen ist die Menge $\mathfrak{A}$ eine Vereinigung einer endlicher Anzahl von konvexen Polyedern des Typs $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ aus (7). Da die Menge $\mathfrak{A}$ zugleich eine abgeschlossene Menge ist, folgt daraus, dass sie ebenfalls ein konvexes Polyeder darstellt. In Falle $\mathfrak{A} = \mathbf{E}_d$, gilt die Behauptung ebenfalls.[4])

Satz 4. *Die Menge $\mathfrak{B}$ aller $\lambda \in \mathbf{E}_d$, für welche das Problem (3) unlösbar ist, ist entweder leer, oder stellt sie eine offene unbeschränkte Menge in $\mathbf{E}_d$ dar.*

Beweis. Betrachten wir die Menge $\mathfrak{A}$ aus (12). Falls $\mathfrak{A} = \emptyset$, so ist $\mathfrak{B} = \mathbf{E}_d$ und die Behauptung gilt. Falls $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ und beschränkt in $\mathbf{E}_d$ ist, so ist $\mathfrak{B} = \mathbf{E}_d - \mathfrak{A}$. Da die Menge $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist, folgt daraus, dass ihr Komplement in $\mathbf{E}_d$, d.h. die Menge $\mathfrak{B}$, ist eine offene Menge in $\mathbf{E}_d$ und wegen der Beschränktheit der Menge $\mathfrak{A}$ die Unbeschränktheit des Komplementes $\mathfrak{B}$ in $\mathbf{E}_d$. Falls $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ und unbeschränkt in $\mathbf{E}_d$ ist, so ist die Menge $\mathfrak{B} = \mathbf{E}_d - \mathfrak{A}$ entweder leer oder ist diese eine nichtleere offene Menge in $\mathbf{E}_d$ und aus der Konvexität der Menge $\mathfrak{A}$ ergibt sich, dass die Menge $\mathfrak{B}$ in $\mathbf{E}_d$ unbeschränkt sein muss.

Satz 5. *Es sei* ${}_0\boldsymbol{\lambda}, {}_1\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}$ *und* ${}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x} \neq {}_0\mathbf{x}$ *zwei Ecken des Polyeders* $\mathfrak{M}$ *mit der Eigenschaft*

$$\mathbf{F}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{0\lambda}(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{F}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{1\lambda}(\mathbf{x})\}. \tag{17}$$

Betrachten wir die Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ *und* $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$, *die im Sinne des Satzes* 1 *den Punkten* ${}_0\boldsymbol{\lambda}$, ${}_1\boldsymbol{\lambda}$ *zugeordnet sind. Falls es einen Punkt* $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})$[8]) *gibt, der der Menge* $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ *angehört, so gilt*

$$\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \equiv \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x}).$$

Beweis. Für einen Punkt $\boldsymbol{\lambda}^*$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ gilt

$$\mathbf{F}_{\lambda^*}({}_0\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\lambda^*}(\mathbf{x})\} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{\lambda^*}({}_1\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\lambda^*}(\mathbf{x})\}. \tag{18}$$

Definieren wir für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{E}_d$ die Funktionen

$$\varphi_0(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}_{\lambda}({}_0\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}_{\lambda}({}_1\mathbf{x}). \tag{19}$$

Nach (18) ist also

$$\varphi_0(\boldsymbol{\lambda}^*) = \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}^*). \tag{20}$$

Wir setzen nun voraus, dass die Mengen $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ nicht identisch sind, d.h., dass es einen Punkt $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ mit $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \notin \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ (bzw. $\bar{\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \notin \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$, $\bar{\bar{\boldsymbol{\lambda}}} \in \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$) gibt.

Betrachten wir zuerst den ersten Fall, d.h. den Fall der Existenz eines Punktes $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ mit den vorausgesetzen Eigenschaften. Es gilt dann

$$\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_0\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_0\mathbf{x}) < \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_1\mathbf{x})$$

und nach (19) ist

$$\varphi_0(\bar{\boldsymbol{\lambda}}) < \varphi_1(\bar{\boldsymbol{\lambda}}). \tag{21}$$

Wir betrachten die Gerade

$$l = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{E}_d \mid \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^* + (\bar{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}^*)\, t, \quad t \in (-\infty, \infty)\}. \tag{22}$$

In den Punkten $\boldsymbol{\lambda} \in l$ gehen die Funktionen $\varphi_0(\boldsymbol{\lambda})$ und $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ in die Funktionen $\tilde{\varphi}_0(t)$ und $\tilde{\varphi}_1(t)$ einer einzigen Veränderlichen t über (die Graphen dieser Funktionen sind offenbar bestimmte Geraden), für die sich aus (20) und (21)

$$\tilde{\varphi}_0(0) = \tilde{\varphi}_1(0), \quad \tilde{\varphi}_0(1) < \tilde{\varphi}_1(1)$$

---

[8]) Die Menge $\mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})$ ist die Menge aller inneren Punkte des Polyeders $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$.

ergibt. Daraus folgt weiter

(23) $$\tilde{\varphi}_0(t) > \tilde{\varphi}_1(t) \quad \text{für} \quad t < 0\,.$$

Da $\lambda^* \in \mathbf{P}^{\text{int}}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ist, gibt es offenbar einen Punkt $\hat{\lambda} \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ mit

(24) $$\hat{\lambda} = \lambda^* + (\bar{\lambda} - \lambda^*)\,\hat{t}\,, \quad \text{wo} \quad \hat{t} < 0\,, \quad \text{d.h.} \quad \hat{\lambda} \in l\,.$$

Da nach (23)

(25) $$\tilde{\varphi}_0(\hat{t}) > \tilde{\varphi}_1(\hat{t})$$

gilt, gilt auch

$$\varphi_0(\hat{\lambda}) > \varphi_1(\hat{\lambda}) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{\hat{\lambda}}({}_0\mathbf{x}) > \mathbf{F}_{\hat{\lambda}}({}_1\mathbf{x})\,,$$

was einen Widerspruch mit der Voraussetzung $\hat{\lambda} \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ bedeutet.

Der zweite Fall, d.h. die Existenz eines Punktes $\bar{\bar{\lambda}}$ mit $\bar{\bar{\lambda}} \in \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$, $\bar{\bar{\lambda}} \notin \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$, führt in ähnlicher Weise zum Widerspruch mit der Voraussetzung. Es ist daher $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \equiv \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$.

Bemerkung 1. Für zwei nichtleere konvexe Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ die – nach Satz 1 – den verschiedenen Ecken ${}_0\mathbf{x}$, ${}_1\mathbf{x}$ des Polyeders $\mathfrak{M}$ angehören, kommen die drei folgenden Möglichkeiten in Frage:

a) $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$;

b) $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \cap \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x}) = \emptyset$;

c) $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \cap \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ enthält nur die Randpunkte der Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$. In diesem Falle ergibt sich aus der Konvexität beider Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$, dass diese höchstens eine gemeinsamme Seite haben. Wir wollen nun zeigen, dass diese Polyeder im Falle c) genau eine einzige gemeinsamme abgeschlossene Seite als ihre Durchschnittsmenge besitzen.

Satz 6. *Es habe die Menge $\mathfrak{A}$ die Bedeutung aus* (12). *Über der Menge $\mathfrak{A}$ definieren wir die Funktion*

(26) $$\varphi(\lambda) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\}\,.$$

Die Funktion $\varphi(\lambda)$ ist über der Menge $\mathfrak{A}$ konkav (soweit $\mathfrak{A} \neq \emptyset$).

Beweis. In Falle, wo $\mathfrak{A}$ aus einem einzigen Punkt besteht, ist die Behauptung klar. Falls $\mathfrak{A}$ mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, so wollen wir zeigen, dass für ${}_1\lambda, {}_2\lambda \in \mathfrak{A}$, ${}_1\lambda \neq {}_2\lambda$ die Ungleichung $\varphi(\mu_1\, {}_1\lambda + \mu_2\, {}_2\lambda) \geqq \mu_1\, \varphi({}_1\lambda) + \mu_2\, \varphi({}_2\lambda)$ gilt, wobei

(27) $$\mu_1 + \mu_2 = 1\,, \quad \mu_1, \mu_2 \geqq 0\,.$$

Aus (26) und (27) ergibt sich

$$\varphi(\mu_1\, {}_1\boldsymbol{\lambda} + \mu_2\, {}_2\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\mu_1\, {}_1\lambda + \mu_2\, {}_2\lambda}(\mathbf{x})\} =$$

$$= \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{ \sum_{\alpha=1}^{n} [c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} (\mu_1\, {}_1\lambda_k + \mu_2\, {}_2\lambda_k)\, {}_k c_\alpha]\, x_\alpha\} =$$

$$= \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{ \sum_{\alpha=1}^{n} [(\mu_1 + \mu_2)\, c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} (\mu_1\, {}_1\lambda_k + \mu_2\, {}_2\lambda_k)\, {}_k c_\alpha]\, x_\alpha\} =$$

$$= \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mu_1\, \mathbf{F}_{{}_1\lambda}(\mathbf{x}) + \mu_2\, \mathbf{F}_{{}_2\lambda}(\mathbf{x})\} \geqq \mu_1 \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{{}_1\lambda}(\mathbf{x})\} +$$

$$+ \mu_2 \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{{}_2\lambda}(\mathbf{x})\} = \mu_1\, \varphi({}_1\boldsymbol{\lambda}) + \mu_2\, \varphi({}_2\boldsymbol{\lambda})\,,$$

womit die Konkavität der Funktion $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ über der Menge $\mathfrak{A}$ bewiesen ist.

Folgerung 1. In Falle, wo die Menge $\mathfrak{A}$ aus (12) nichtleer ist, stellt die Menge

$$\mathbf{Q} = \{(\boldsymbol{\lambda}, t) \in \mathbf{E}_{d+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A},\, t \leqq \varphi(\boldsymbol{\lambda})\} \tag{28}$$

(wo $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ die Bedeutung aus (26) hat) ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_{d+1}$ dar.

Beweis. Es ist $\mathbf{Q} \neq \emptyset$, da die Menge $\mathbf{Q}$ mindestens den Graphen der Funktion $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}$, d.h. die Menge

$$\mathbf{O} = \{(\boldsymbol{\lambda}, t) \in \mathbf{E}_{d+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A},\, t = \varphi(\boldsymbol{\lambda})\} \tag{29}$$

enthält. (Die Punkte $(\boldsymbol{\lambda}, t) \in \mathbf{O}$ sind offenbar Randpunkte von Q.) Wir wollen zuerst die Konvexität der Menge $\mathbf{Q}$ beweisen. Es sei $({}_1\boldsymbol{\lambda}, {}_1t), ({}_2\boldsymbol{\lambda}, {}_2t) \in \mathbf{Q}$ und wir betrachten alle Punkte $(\boldsymbol{\lambda}, t)$ mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{\lambda} = \beta_1\, {}_1\boldsymbol{\lambda} + \beta_2\, {}_2\boldsymbol{\lambda}\,, \quad t = \beta_1\, {}_1t + \beta_2\, {}_2t\,, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1\,, \quad \beta_1, \beta_2 \geqq 0\,.$$

Da ${}_1t \leqq \varphi({}_1\boldsymbol{\lambda})$, ${}_2t \leqq \varphi({}_2\boldsymbol{\lambda})$ gilt, gilt auch

$$t = \beta_1\, {}_1t + \beta_2\, {}_2t \leqq \beta_1\, \varphi({}_1\boldsymbol{\lambda}) + \beta_2\, \varphi({}_2\boldsymbol{\lambda})\,. \tag{30}$$

Aus der Konkavität der Funktion $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ über der Menge $\mathfrak{A}$ ergibt sich

$$\beta_1\, \varphi({}_1\boldsymbol{\lambda}) + \beta_2\, \varphi({}_2\boldsymbol{\lambda}) \leqq \varphi(\beta_1\, {}_1\boldsymbol{\lambda} + \beta_2\, {}_2\boldsymbol{\lambda}) = \varphi(\boldsymbol{\lambda})\,. \tag{31}$$

Aus (30) und (31) folgt $t \leqq \varphi(\boldsymbol{\lambda})$. Die Tatsache, dass $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}$ gilt, folgt aus der Konvexität der Menge $\mathfrak{A}$. Wir definieren die Menge

$$\mathbf{Q}' = (\bigcap_{i=0}^{s} \overline{\mathbf{H}}_i) \cap \mathbf{L}\,, \tag{32}$$

wo

$$(33) \qquad \mathbf{L} = \{(\boldsymbol{\lambda}, t) \in \mathbf{E}_{d+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}, t \in \mathbf{E}_1\} ,$$

($\mathbf{L}$ ist offenbar ein konvexes Polyeder in $\mathbf{E}_{d+1}$),

$$(34) \qquad \overline{\mathbf{H}}_j = \{(\boldsymbol{\lambda}, t) \in \mathbf{E}_{d+1} \mid t \leqq \mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}({}_j\mathbf{x})\} \quad (j = 0, \ldots, s) ,$$

($\overline{\mathbf{H}}_j$ sind offenbar abgeschlossene Halbräume in $\mathbf{E}_{d+1}$), bedeutet.

a) Falls $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{t}) \in \mathbf{Q}'$ gilt, so ist $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathfrak{A}$ und es existiert daher mindestens ein Polyeder $\mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}({}_i\mathbf{x})$ (das der Einteilung der Menge $\mathfrak{A}$ angehört), welches diesen Wert $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ enthält. Die Funktion $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ ist über dem Polyeder $\mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}({}_i\mathbf{x})$ linear in $\boldsymbol{\lambda}$ und es gilt für diese

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}({}_i\mathbf{x}) .$$

Wegen $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{t}) \in \mathbf{Q}'$, gilt auch $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{t}) \in \overline{\mathbf{H}}_i$ und daher

$$\tilde{t} \leqq \mathbf{F}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}({}_i\mathbf{x}) .$$

Der Punkt $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{t})$ hat also die Eigenschaften

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathfrak{A} , \quad \tilde{t} \leqq \varphi(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})$$

und nach der Definition der Menge $\mathbf{Q}$, ist $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{t}) \in \mathbf{Q}$. Da $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{t}) \in \mathbf{Q}'$ ein beliebiger Punkt der Menge $\mathbf{Q}'$ war, folgt daraus die Inklusion

$$(35) \qquad \mathbf{Q}' \subset \mathbf{Q} .$$

b) Es sei $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{t})$ ein beliebiger Punkt der Menge $\mathbf{Q}$, d.h. $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathfrak{A}$ und $\bar{t} \leqq \varphi(\bar{\boldsymbol{\lambda}})$. Offenbar gilt auch $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{t}) \in \mathbf{L}$. Es existiert daher mindestens ein Polyeder $\mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}({}_i\mathbf{x})$ der Einteilung $\mathfrak{A}$ mit $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}({}_i\mathbf{x})$. Wegen

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}({}_i\mathbf{x}) \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}({}_i\mathbf{x}) ,$$

gilt

$$\bar{t} \leqq \mathbf{F}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}({}_i\mathbf{x}) \quad \text{und daher} \quad (\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{t}) \in \overline{\mathbf{H}}_i .$$

Setzen wir nun voraus, dass es mindestens einen Halbraum $\overline{\mathbf{H}}_k$ mit der Eigenschaft $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{t}) \notin \overline{\mathbf{H}}_k$ gibt, d.h.

$$(36) \qquad \bar{t} > \mathbf{F}_{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}({}_k\mathbf{x}) .$$

In der Einteilung der Menge $\mathfrak{A}$ existiert ein Polyeder $\mathbf{P}_{k\boldsymbol{\lambda}}({}_k\mathbf{x})$ in der Weise, dass

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}({}_k\mathbf{x}) \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}_{k\boldsymbol{\lambda}}({}_k\mathbf{x})$$

gilt und alle Punkte $(\boldsymbol{\lambda}', t')$ mit der Eigenschaft

$$(37) \qquad \boldsymbol{\lambda}' \in \mathbf{P}_k^{\boldsymbol{\lambda}}({}_k\mathbf{x}) , \quad t' = \mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}'}({}_k\mathbf{x}) ,$$

gehören dem Halbraum $\overline{\mathbf{H}}_k$ als seine Randpunkte zu. Nach Voraussetzung gehört der Punkt $(\bar{\lambda}, \bar{t}) \in \mathbf{Q}$ der Menge $\overline{\mathbf{H}}_k$ nicht an und zugleich gibt es einen Punkt $(\lambda', t') \in \overline{\mathbf{H}}_k$ mit $(\lambda', t') \in \mathbf{Q}$. Da aber $\mathbf{Q}$ eine konvexe Menge ist, gehört jeder Punkt der Verbindungsstrecke der Punkte $(\bar{\lambda}, \bar{t})$, (λ', t') dem Polyeder $\mathbf{Q}$ an. Für die Punkte $(\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{t}})$ dieser Verbindungsstrecke gilt nach (36) und (37)

$$\bar{\bar{\lambda}} = \beta_1 \bar{\lambda} + \beta_2 \lambda' ,$$

$$\bar{\bar{t}} = \beta_1 \bar{t} + \beta_2 t' > \beta_1 \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_k\mathbf{x}) + \beta_2 \mathbf{F}_{\lambda'}({}_k\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{\bar{\bar{\lambda}}}({}_k\mathbf{x}) = \varphi(\bar{\bar{\lambda}})$$

und es ist daher $(\bar{\bar{\lambda}}, \bar{\bar{t}}) \notin \mathbf{Q}$, was im Widerspruch mit der Konvexität der Menge $\mathbf{Q}$ ist. Daraus folgt $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}'$ und mit Hinsicht auf (35) weiter $\mathbf{Q}' \equiv \mathbf{Q}$. Dies bedeutet aber, dass die Menge

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \cap \left(\bigcap_{i=0}^{s} \overline{\mathbf{H}}_i \right)$$

ein Durchschnitt von einer endlichen Anzahl konvexer abgeschlossenen Halbräume $\overline{\mathbf{H}}_i$ $(i = 0, \ldots, s)$ und des Polyeders $\mathbf{L}$ ist und da dieser Durchschnitt nichtleer ist, stellt die Menge $\mathbf{Q}$ ein konvexes Polyeder dar.

Bemerkung 2. Die Menge $\mathbf{O}$ aus (29), die einen Teil des Randes des konvexen Polyeders $\mathbf{Q}$ darstellt, besteht aus bestimmten abgeschlossenen Seiten $\overline{\mathbf{S}}_i$ des Polyeders $\mathbf{Q}$ mit der Beschreibung

$$\overline{\mathbf{S}}_i = \{(\lambda, t) \in \mathbf{E}_{d+1} \mid \lambda \in \mathbf{P}_{i\lambda}({}_i\mathbf{x}), t = \varphi(\lambda)\} \quad (i = 0, \ldots, s) . \tag{38}$$

Die Projektion dieser Seiten in die Koordinatenhyperebene

$$\mathbf{R} = \{(\lambda, t) \in \mathbf{E}_{d+1} \mid t = 0, \lambda \in \mathbf{E}_d\} \tag{39}$$

sind die Mengen

$$\{(\lambda, t) \in \mathbf{E}_{d+1} \mid \lambda \in \mathbf{P}_{i\lambda}({}_i\mathbf{x}), t = 0\} \quad (i = 0, \ldots, s)$$

die eben die konvexe Polyeder $\mathbf{P}_{i\lambda}({}_i\mathbf{x})$ $(i = 0, \ldots, s)$ darstellen.

Satz 7. *Es seien $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ zwei verschiedene konvexe Polyeder aus der Einteilung der Menge $\mathfrak{A}$, die einen gemeinsammen Randpunkt λ^* haben. Es gibt, dann, genau eine gemeinsamme Seite bestimmter Dimension, die den beiden Polyedern $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ angehört und den Punkt λ^* enthält.*

Beweis.: Es sei $\mathbf{Z}_0^{(k)}$ eine k-dimensionale Seite des Polyeders $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{Z}_1^{(l)}$ eine l-dimensionale Seite des Polyeders $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ mit der Eigenschaft

$$\lambda^* \in \mathbf{Z}_0^{(k)} , \quad \lambda^* \in \mathbf{Z}_1^{(l)} . \tag{40}$$

Setzen wir voraus, dass $\mathbf{Z}_0^{(k)} \neq \mathbf{Z}_1^{(l)}$ ist, d.h., dass es einen Punkt $\lambda \in \mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft

$$(41) \qquad \hat{\lambda} \in \mathbf{Z}_0^{(k)}, \quad \hat{\lambda} \notin \mathbf{Z}_1^{(l)}\ ^{9})$$

gibt. Betrachten wir den Punkt $(\hat{\lambda}, \hat{t}) \in \mathbf{E}_{d+1}$, wo $\hat{t} = \varphi(\hat{\lambda})$. Nach (29) ist der Punkt $(\hat{\lambda}, \hat{t})$ ein Randpunkt des konvexen Polyeders $\mathbf{Q}$ aus (28). Er ist daher ebenfalls ein Randpunkt einer Seite $\bar{\mathbf{S}}_0$ des Polyeders $\mathbf{Q}$, derer Projektion in die Hyperebene $\mathbf{R}$ aus (39) eben das Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ist (nach Bemerkung 2). Durch ähnliche Überlegung erhält man, dass der Punkt (λ^*, t^*) mit $t^* = \varphi(\lambda^*)$ ein Randpunkt der Seite $\bar{\mathbf{S}}_0$ ist. Zugleich ist aber dieser Punkt (λ^*, t^*) ein Randpunkt der Seite $\bar{\mathbf{S}}_1$ des Polyeders $\mathbf{Q}$, derer Projektion in die Hyperebene $\mathbf{R}$ das konvexe Polyeder $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ ist. Aus der Theorie der Polyeder ergibt sich, dass die Menge aller gemeinsamen Randpunkte der abgeschlossenen Seiten $\bar{\mathbf{S}}_0$, $\bar{\mathbf{S}}_1$ (d.h. der Durchschnitt $\bar{\mathbf{S}}_0 \cap \bar{\mathbf{S}}_1$) eine bestimmte Seite $\mathbf{S}^*$ des Polyeders $\mathbf{Q}$ ist. Aus der Linearität der Funktion $\varphi(\lambda) = \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x})$ für $\lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ergibt sich, dass ebenfalls $(\hat{\lambda}, \hat{t}) \in \mathbf{S}^*$ gilt und daher der Punkt $(\hat{\lambda}, \hat{t})$ einen Randpunkt der Seite $\bar{\mathbf{S}}_1$ darstellt. Daraus folgt (nach der Bemerkung 2), dass $\hat{\lambda}$ ein Randpunkt des Polyeders $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ ist. Aus (40) und aus der Konvexität der Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ folgt weiter $\hat{\lambda} \in \mathbf{Z}_1^{(l)}$, was einen Widerspruch mit (41) bedeutet.

Satz 8. *Falls das Polyeder* $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ *aus dem Satz* 1 *eine Dimension grösser als Null besitzt, so gilt*

$$(42) \qquad \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_1\lambda) = \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_2\lambda)$$

für jedes Punktenpaar ${}_1\lambda, {}_2\lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}^{\mathrm{int}}({}_0\mathbf{x})$, ${}_1\lambda \neq {}_2\lambda$, *wo* $\mathbf{P}_{0\lambda}^{\mathrm{int}}({}_0\mathbf{x})$ *die Menge aller inneren Punkte aus* $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ *bedeutet.*

B e w e i s. Setzen wir voraus, dass die Behauptung des Satzes nicht gilt, d.h., dass es zwei Punkte

$$(43) \qquad {}_1\lambda, {}_2\lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}^{\mathrm{int}}({}_0\mathbf{x}), \quad {}_1\lambda \neq {}_2\lambda$$

mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_1\lambda) \neq \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_2\lambda)$$

gibt. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken können wir die Existenz eines Punktes $\hat{\mathbf{x}}$ mit

$$(44) \qquad \hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_2\lambda), \quad \hat{\mathbf{x}} \notin \mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}({}_1\lambda)$$

[9]) Diese Voraussetzung widerspricht nicht der Allgemeinheit, da die Voraussetzung $\hat{\lambda} \in \mathbf{Z}_1^{(l)}$, $\hat{\lambda} \notin \mathbf{Z}_0^{(k)}$ durch geeignete Numerierung auf den betrachteten Fall überführt wird.

voraussetzen. Nach (43) ist

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{1\lambda}(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_{1\lambda}({}_0\mathbf{x}), \quad \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{2\lambda}(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_{2\lambda}({}_0\mathbf{x})$$

und nach (44)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{1\lambda}(\mathbf{x})\} < \mathbf{F}_{1\lambda}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{2\lambda}(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_{2\lambda}(\hat{\mathbf{x}}).$$

Daraus ergibt sich

(45) $$\mathbf{F}_{1\lambda}({}_0\mathbf{x}) < \mathbf{F}_{1\lambda}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{F}_{2\lambda}({}_0\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{2\lambda}(\hat{\mathbf{x}}).$$

Wenn wir für alle $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{E}_d$ die Funktionen

(46) $$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \mathbf{F}_{\lambda}({}_0\mathbf{x}), \quad \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \mathbf{F}_{\lambda}(\hat{\mathbf{x}})$$

einführen, so kann man die Relationen (45) in der Form

(47) $$\varphi_1({}_1\boldsymbol{\lambda}) < \varphi_2({}_1\boldsymbol{\lambda}), \quad \varphi_1({}_2\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_2({}_2\boldsymbol{\lambda})$$

schreiben. Betrachten wir in $\mathbf{E}_d$ die Gerade

$$\mathbf{p} = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{E}_d \mid \boldsymbol{\lambda} = {}_1\boldsymbol{\lambda} + t({}_2\boldsymbol{\lambda} - {}_1\boldsymbol{\lambda}), t \in (-\infty, \infty)\}.$$

Für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{p}$ gilt für die Funktionen $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$, $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ aus (46)

(48) $$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \tilde{\varphi}_1(t), \quad \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \tilde{\varphi}_2(t).$$

Für die Funktionen $\tilde{\varphi}_1(t)$, $\tilde{\varphi}_2(t)$ der einzigen Veränderlichen t gilt nach (47)

(49) $$\tilde{\varphi}_1(0) < \tilde{\varphi}_2(0), \quad \tilde{\varphi}_1(1) = \tilde{\varphi}_2(1).$$

Da die Funktionen $\tilde{\varphi}_1(t)$, $\tilde{\varphi}_2(t)$ linear sind, folgt aus (49) ummittelbar die Ungleichung

(50) $$\tilde{\varphi}_1(t) > \tilde{\varphi}_2(t) \quad \text{für} \quad t > 1.$$

Unter der Voraussetzung ${}_1\boldsymbol{\lambda}$, ${}_2\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}^{\text{int}}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$, gibt es einen Wert $t^* > 1$ mit der Eigenschaft, dass der Punkt

$$\boldsymbol{\lambda}^* = {}_1\boldsymbol{\lambda} + t^*({}_2\boldsymbol{\lambda} - {}_1\boldsymbol{\lambda})$$

(d.h. $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{p}$) der Menge $\mathbf{P}^{\text{int}}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ angehört und daher

(51) $$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\lambda^*}(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_{\lambda^*}({}_0\mathbf{x}).$$

Für den Punkt $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{p}$ gilt nach (50), (48), (46)

$$\tilde{\varphi}_1(t^*) > \tilde{\varphi}_2(t^*) \Rightarrow \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}^*) > \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}^*) \Rightarrow \mathbf{F}_{\lambda^*}({}_0\mathbf{x}) > \mathbf{F}_{\lambda^*}({}_1\mathbf{x}),$$

was einen Widerspruch mit (51) bedeutet.

Satz 9. *Falls* $\bar{\lambda}$ *ein Randpunkt des Polyeders* $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ *aus dem Satz* 1 *und* λ^* *ein beliebiger innerer Punkt mit* $\lambda^* \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ *ist, so gilt*

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \subset \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) .$$

Beweis. Nach Satz 8 gilt für alle $\lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x}) = \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}^*) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \equiv \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda) ,$$

d.h. für alle $\lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})$ und alle $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*)$ gilt

$$\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}^*) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M} .$$

Es sei $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ festgewählt. Die Funktion $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ stellt, dann, eine lineare Funktion und daher eine stetige Funktion in λ über dem Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ dar und es gilt

$$\lim_{\substack{\lambda\to\bar{\lambda} \\ \lambda\in\mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})}} \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}) \geqq \lim_{\substack{\lambda\to\bar{\lambda} \\ \lambda\in\mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})}} \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}^*) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) ,$$

d.h. $\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x}^*)$ für alle $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*)$ und alle $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$. Es ist daher

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \subset \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) .$$

Satz 10. *Für* $\lambda^* \in \mathbf{P}_{0\lambda}^{\text{int}}({}_0\mathbf{x})$ *und* $\bar{\lambda} \notin \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ *gilt*

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \cap \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) = \emptyset .$$

Beweis. Falls $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) = \emptyset$ ist, so ist die Behauptung trivialerweise erfült. Falls $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) \neq \emptyset$ ist, setzen wir die Existenz eines Punktes

$$\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) \tag{52}$$

mit

$$\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \tag{53}$$

voraus. Aus (52) folgt

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\hat{\mathbf{x}}) . \tag{54}$$

Nach Satz 8 und 9 ergibt sich aus (53)

$$\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) ,$$

d.h.

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) . \tag{55}$$

Aus der Definition des Polyeder $\mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x})$ aus dem Satz 1 und weiter aus (55) erhalten wir

$$\mathbf{F}_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x}) .$$

Da $\mathbf{F}_\lambda(\hat{\mathbf{x}})$ und $\mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x})$ lineare Funktionen sind, die auf einer d-dimensionalen Menge gleich sind, ist $\mathbf{F}_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}_\lambda({}_0\mathbf{x})$, für alle $\lambda \in \mathbf{E}_d$ überhaupt. Daraus und aus (54) folgt

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_0\mathbf{x}) ,$$

woraus – mit Hinsicht auf die Definition des Polyeders $\mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x})$ aus dem Satz 1[10]) – die Eigenschaft $\bar{\lambda} \in \mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x})$ des Punktes λ sich ergibt. Dies ist aber ein Widerspruch mit der Voraussetzung.

Satz 11. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 9 ist die Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*)$ eine echte Teilmenge der Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda})$.*

Beweis. a) Es sei zuerst $\bar{\lambda}$ ein Randpunkt des Polyeders $\mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x})$, der zugleich ein innerer Punkt des Polyeders $\mathfrak{A}$ ist. Es existiert, dann, zu dem Polyeder $\mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ein benachbartes Polyeder $\mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x})$ mit den Eigenschaften

$${}_1\lambda \notin \mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x}) , \quad {}_1\lambda \in \mathbf{P}^{\text{int}}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x}) , \quad \bar{\lambda} \in \mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x}) , \quad \bar{\lambda} \in \mathbf{P}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x}) .$$

Nach Satz 10 gilt also

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \cap \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda) = \emptyset , \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \neq \emptyset , \quad \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda) \neq \emptyset ,$$

d.h. es gilt auch

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \not\supset \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda) \tag{56}$$

(wobei nach Voraussetzung $\lambda^* \in \mathbf{P}^{\text{int}}_{\lambda_0}({}_0\mathbf{x})$ ist). Der Behauptung des Satzes 9 nach ist

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda) \subset \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \subset \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) .$$

Es gilt daher auch

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \cup \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda) \subset \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) , \tag{57}$$

wobei nach (56) die Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*)$ eine echte Teilmenge der Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \cup \cup\, \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_1\lambda)$ und daher auch (nach (57)) eine echte Teilmenge der Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda})$ ist.

b) Es sei $\bar{\lambda}$ ein Randpunkt des Polyeders $\mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x})$, der zugleich ein Randpunkt des Polyeders $\mathfrak{A}$ ist. Unter dieser Voraussetzung gibt es in jeder Umgebung des Punktes $\bar{\lambda}$ einen Punkt $\hat{\lambda}$ mit der Eigenschaft, dass das Problem (3) bei der Wahl $\lambda = \hat{\lambda}$

[10]) Das Polyeder $\mathbf{P}_{o\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ist eben das maximale Polyeder mit den entsprechenden Eigenschaften.

nichtlösbar ist. Da $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist, folgt daraus, dass die Funktion $\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})$ über der Menge $\mathfrak{M}$ von unten unbeschränkt ist und dem zu Folge muss das Polyeder $\mathfrak{M}$ ebenfalls unbeschränkt in $\mathbf{E}_n$ sein. Da die Anzahl der Ecken des Polyeders $\mathfrak{M}$ endlich ist, gibt es eine solche Zahl $\mathbf{K} > 0$, so dass der offene Halbraum

$$\mathbf{H}^{\mathbf{K}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha < \mathbf{K}\}$$

alle diese Ecken enthält. Die Menge

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{K}} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \leqq \mathbf{K}\} \tag{58}$$

stellt offenbar ein beschränktes konvexes Polyeder mit

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{M}$$

in $\mathbf{E}_n$ dar, der die Eigenschaft hat, dass seine Ecken alle Ecken des ursprünglichen Polyeders $\mathfrak{M}$ sind und darüber hinaus noch andere Ecken besitzt (diese liegen offenbar auf den unbeschränkten Kanten des Polyeders $\mathfrak{M}$ und zugleich in der Hyperebene

$$\mathbf{R}^{\mathbf{K}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha = \mathbf{K}\}).$$

Wir betrachten nun das neue Problem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{K}}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\} \,! \tag{59}$$

Da $\mathfrak{M}^{\mathbf{K}}$ eine kompakte Menge und $\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})$ eine stetige Funktion über $\mathfrak{M}^{\mathbf{K}}$ ist, ist das neue Problem (59) für alle $\lambda \in \mathbf{E}_d$ lösbar, d.h. $\mathfrak{A}^{\mathbf{K}} = \mathbf{E}_d$, wo

$$\mathfrak{A}^{\mathbf{K}} = \{\lambda \in \mathbf{E}_d \mid \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{K}}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\}! \text{ lösbar}\} . \tag{60}$$

Der oben betrachtete Punkt $\bar{\lambda}$ ist nun ein innerer Punkt der Menge $\mathfrak{A}^{\mathbf{K}}$ und aus demselben Grunde wie in Fall a) gibt es einen Punkt

$${}_1\mathbf{x}^{\mathbf{K}} \neq {}_0\mathbf{x} \,, \quad {}_1\mathbf{x}^{\mathbf{K}} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{K}} \,,$$

für welchen das Polyeder $\tilde{\mathbf{P}}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x}^{\mathbf{K}})$ ein benachbartes Polyeder zu dem Polyeder $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ist, wobei

$${}_1\lambda \in \tilde{\mathbf{P}}^{\text{int}}_{1\lambda}({}_1\mathbf{x}^{\mathbf{K}}) \tag{61}$$

gilt. Weiter gilt

$${}_1\mathbf{x}^{\mathbf{K}} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{K}}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) \,.$$

Da

$$\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_0\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} \,, \quad \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_1\mathbf{x}^{\mathbf{K}}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{K}}} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}^{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{M}$$

ist, gilt

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} \leqq \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}^K} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} .$$

Wegen ${}_0\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^K$ ist, gilt

$$\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_0\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} = \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}^K} \{\mathbf{F}_{\bar{\lambda}}(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}_{\bar{\lambda}}({}_1\mathbf{x}^K)$$

und daner

(62) $${}_1\mathbf{x}^K \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) .$$

Die Einteilung der Menge $\mathfrak{A}^K$ besitzt die Eigenschaft, dass sie alle Polyeder $\mathbf{P}_{i\lambda}({}_i\mathbf{x})$ aus der Einteilung der Menge $\mathfrak{A}$ enthält. Dieses ist aus dem Beweis des Satzes 1 sichtbar, denn das Polyeder $\mathbf{P}_{i\lambda}({}_i\mathbf{x})$ ist einer Ecke ${}_i\mathbf{x}$ zugeordnet und durch diese Ecke und durch beliebige Punkte, die den aus dieser Ecke ausgehenden Kanten angehören, eindeutig bestimmt wird. Da das Polyeder $\mathfrak{M}^K$ alle Ecken ${}_i\mathbf{x}$ und alle aus ihnen ausgehenden endliche Kanten bzw. Strecken in Richtung der unendlichen Kanten enthält, stellt die Einteilung der Menge $\mathfrak{A}$ einen Teil der Einteilung der Menge $\mathfrak{A}^K$ dar. Daraus, aus (61) und aus dem Satz 10 ergibt sich

(63) $${}_1\mathbf{x}^K \notin \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) .$$

Zugleich gilt nach Satz 9 und nach (62)

$$\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \subset \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda})$$

und

$$\mathfrak{M}^K_{\text{opt}}({}_1\lambda) \subset \mathfrak{M}^K_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) \subset \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda}) .$$

Daraus und aus (63) folgt weiter, dass die Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*)$ eine echte Teilmenge der Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\lambda^*) \cup \mathfrak{M}^K_{\text{opt}}({}_1\lambda)$ und daher auch der Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}(\bar{\lambda})$ ist.

Folgerung 2. Es sei ${}_0\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\lambda)$ eine Ecke des Polyeders $\mathfrak{M}$ und $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ das Polyeder mit der Bedeutung aus dem Satz 1. Es sei weiter $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\lambda)$, $\bar{\mathbf{x}} \neq {}_0\mathbf{x}$ beliebig (d.h. $\bar{\mathbf{x}}$ stellt ebenfalls einen optimalen Punkt des Problems (3) bei der Wahl $\lambda = {}_0\lambda$ dar). Falls das Symbol $\mathbf{P}_{0\lambda}(\bar{\mathbf{x}})$ die Menge aller λ, für welche der Punkt $\bar{\mathbf{x}}$ ebenfalls ein optimaler Punkt des Problems (3) ist, bedeutet und falls ${}_0\lambda \in \mathbf{P}^{\text{int}}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ ist, so gilt

$$\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \equiv \mathbf{P}_{0\lambda}(\bar{\mathbf{x}}) .$$

Beweis. Die Menge $\mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\lambda)$ bleibt für alle $\lambda \in \mathbf{P}^{\text{int}}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ unverändert, d.h. jeder Punkt $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}({}_0\lambda)$ ist ein optimaler Punkt für das Problem (3) für alle $\lambda \in \mathbf{P}^{\text{int}}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ und nach Satz 9 auch für die Randpunkte des Polyeders $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$. Aus dem obigen Satz 10 ergibt sich, dass kein Punkt mit $\hat{\lambda} \notin \mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x})$ die Eigenschaft $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\text{opt}}(\hat{\lambda})$ besitzt, so dass $\mathbf{P}_{0\lambda}({}_0\mathbf{x}) \equiv \mathbf{P}_{0\lambda}(\mathbf{x})$ gilt.

Bemerkung 3. Die Folgerung 2 weist darauf hin, dass bei der Einteilung der Menge $\mathfrak{A}$ der Parameterwerte λ in maximale Mengen (in der Arbeit mit $\mathbf{P}_\lambda(\mathbf{x})$ bezeichnet) können diese maximalen Mengen $\mathbf{P}_\lambda(\mathbf{x})$ einem beliebigen optimalen Punkt $\mathbf{x}$ aus der Menge aller optimalen Punkte zugeordnet werden (wobei die Menge aller optimalen Punkte allgemein eine grössere Dimensional als Null besitzen kann). Daraus folgt, dass die Tatsache, dass wir bei unserer qualitativen Untersuchung des Problems von einer bestimmten Ecke des Polyeders $\mathfrak{M}$ ausgegangen sind, ist unwesentlich. Die in der Arbeit durchgeführte qualitative Untersuchung gilt daher für ein beliebiges Problem der mehrparametrischen linearen Optimierung (mit den Parametern in der Zielfunktion) bei beliebig vorgegebenen linearen Restriktionsbedingungen, wo also das Polyeder $\mathfrak{M}$ durch eine endliche Anzahl von Ungleichungen und Gleichungen beschrieben ist (also auch in den Spezialfällen, wo das Polyeder $\mathfrak{M}$ keine Ecke besitzt).

Schlussbemerkung. Der Raum $\mathbf{E}_d$ des Parameters λ wird bei dem System

$$(64) \qquad \min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\}! \quad (\text{bzw. } \max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x})\}!)\,, \quad \lambda \in \mathbf{E}_d$$

der üblichen Aufgaben der linearen Optimierung in die Menge $\mathfrak{A}$ aus (12) aller $\lambda \in \mathbf{E}_d$, für welche die entsprechende Probleme (64) eine Lösung besitzen ($\mathfrak{A}$ ist ein konvexes Polyeder) und in das Komplement $\mathbf{E}_d - \mathfrak{A}$, wo die Probleme (64) unlösbar sind, eingeteilt. Das Polyeder $\mathfrak{A}$ (soweit $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ ist) ist eine Vereinigung einer endlichen Anzahl von konvexen Polyedern, die disjunkte Innenräume haben, wobei ein jedes dieser Polyeder die Eigenschaften aus dem Satz 1 besitzt.

Was die Lösung des auf der Seite 1 definierten Problems bei gegebenem Intervall $\mathbf{I}_d$ des Parameters λ angeht, genügt es offenbar sich nur auf diejenige maximale Polyeder aus der Einteilung der Menge $\mathfrak{A}$ einzuschränken, die mit dem Intervall $\mathbf{I}_d$ einen nichtleeren Durchschnitt haben.

Literatur

[1] *Reidemeister K.:* Topologie der Polyeder. Leipzig 1953.

[2] *Юдин Д. Б., Голштейн Э. Г.:* Задачи и методы линейного программирования. Издательство Советское радио, Москва 1964.

[3] *Гасс С.:* Линейное программирование. Физматгиз, Москва 1961.

[4] Линейные неравенства и смежные вопросы. (Сборник статей под редакцией Г. У. Куна и А. У. Таккера. Издательство иностранной литературы, Москва 1959.

[5] *Sokolová L.:* Problém víceparametrického lineárního programování. Ekonomicko-Matematický obzor 4, 44—68, 1968.

[6] *Кюнци Г. П., Крелле В.:* Нелинейное программирование. Издательство Советское радио, Москва 1965.

Souhrn

KVALITATIVNÍ ROZBOR I. ÚLOHY LINEÁRNÍHO VÍCEPARAMETRICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

LIBUŠE GRYGAROVÁ

Většina známých výsledků v teorii jedno- a víceparametrického programování byla z větší části dosažena na základě Simplexové metody. K těmže výsledkům a k výsledkům hlubším lze však dojít přímým kvalitativním rozborem, kde při důkazu příslušných vět se nepoužívá Simplexové ani žádné jiné výpočtové metody. V předložené práci jsou odvozeny všechny dosud známé věty z teorie víceparametrického lineárního programování (s parametry v cílové funkci), přičemž se rozbor týká množiny všech optimálních řešení a tedy nikoliv jen jednoho řešení bázického, jak je tomu při použití Simplexové metody.

Hlavní výsledky v práci dosažené jsou tyto:

Množina $\mathfrak{A}$ všech bodů $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, pro které má problém

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})\} \;!$$

kde

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} (c_\alpha + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k {}_k c_\alpha)\, x_\alpha\,,$$

$$\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r, (r = 1, \ldots, m), x_\alpha \geqq 0, (\alpha = 1, \ldots, n)\}$$

řešení, je konvexním polyedrem v prostoru $\mathbf{E}_d$ parametrů $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ (pokud to není množina prázdná). Funkce

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})\}$$

je konkávní nad množinou $\mathfrak{A}$. Existuje takové rozdělení množiny $\mathfrak{A}$ na konečný počet konvexních polyedrů $\mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}$ $(i = 1, \ldots, \mathrm{N})$, které pokrývají množinu $\mathfrak{A}$, přičemž každý z těchto polyedrů má tu vlastnost, že množina

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M} \mid \mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})\}\}$$

je tatáž pro všechna $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{int}}$. Je-li $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ bodem hranice polyedru $\mathbf{P}_{i\boldsymbol{\lambda}}$ potom

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{\lambda}) \quad \text{pro} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}_{i\lambda}^{\mathrm{int}}$$

je pravou podmnožinou množiny $\mathfrak{M}_{\mathrm{opt}}(\hat{\boldsymbol{\lambda}})$.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Libuše Grygarová*, CSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Malostranské nám. 25, Praha 1.