Eva Kohútová

Stabilitätsbedingungen von rekurrenten Relationen und deren Anwendung

*Aplikace matematiky*, Vol. 15 (1970), No. 3, 207–212

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103286`

SVAZEK 15 (1970) APLIKACE MATEMATIKY ČISLO 3

# STABILITÄTSBEDINGUNGEN VON REKURRENTEN RELATIONEN UND DEREN ANWENDUNG

EVA KOHÚTOVÁ

(Eingegangen am 21. Mai 1969)

Bei numerischen Berechnungen kommen häufig rekurrente Relationen in der Form

$$y_n = a_n + b_n y_{n-m} \quad \text{für} \quad n = m, m+1, \ldots$$

mit Anfangswerten $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ vor, wo $m$ eine fest gegebene natürliche Zahl ist, $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=m}^{\infty}$ Koeffizientenfolgen sind. Dieses ist eigentlich ein Spezialfall einer $m+1$-gliedrigen Relation, die in $m$ binomen Relationen geschrieben sein kann:

$$y_{km+i} = a_{km+i} + b_{km+i} y_{km+i-1} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

mit dem Anfangswert $y_i$, wo $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $\{a_{km+i}\}_{i=1}^{\infty}$ und $\{b_{km+i}\}_{i=1}^{\infty}$ die Koeffizientenfolgen darstellt, die den Folgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ entnommen worden sind. Es kommt oft vor, dass diese Relationen numerisch instabil sind.

(Numerisch instabil wird so eine Relation genannt, für welche zu einer beliebigen Zahl $Q > 0$ ein Index $N$ gegeben ist, sodass für sämtliche Zahlen $n > N$ die Ungleichung $|y_n - z_n| > Q$ gilt, wo $y_n$ die genaue Lösung und $z_n$ die errechnete Lösung ist – mit Zahlen endlicher Länge.)

Über den absoluten Fehler (weiter nur Fehler) der binomen Relation:

$$y_n = a_n + b_n y_{n-1} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

mit Anfangswert $y_0$ gibt der folgende Satz eine Aussage:

**Satz.** 1. *In der binomen Relation ist der absolute Fehler durch die folgende Beziehung gegeben*:

$$\Delta y_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k-1} \prod_{i=k}^{n} b_i + \delta_n$$

*für sämtliche natürliche $n$, wo $\delta_0$ der Fehler des Ausgangwertes $y_0$ ist und $\delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jene Fehler sind, welche in die Berechnung die arithmetische Operationen und die Koeffizienten im i-ten Schritt einführen (mit Rücksicht auf die endliche Anzahl der Dezimalstellen).*

*$\Delta y_n$ ist die Lösung einer weiteren rekurrenten Relation:*

$$\Delta y_n = \delta_n + b_n \Delta y_{n-1} \quad \textit{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

*wo $\Delta y_0 = \delta_0$ ist.*

2. *Es konvergiere die Folge $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ und es gelte, dass deren Grenzwert $b$, $|b| < 1$ ist, dann gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $N_1$, dass für sämtliche natürliche $n > N_1$ die folgende Abschätzung für $\Delta y_n$ (siehe 1.) gilt:*

$$|\Delta y_n| < \frac{\delta}{1 - |b|} + \varepsilon_1$$

*wo*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon M_n\,, \quad \delta = \max_{i > N_1} \{\delta_i\}$$

*und*

$$\lim_{n \to \infty} M_n = \Big|\sum_{k=1}^{N_1} \delta_{k-1} \prod_{i=k}^{N_1} |b_i|\Big| + \delta \frac{|b|}{1 - |b|}\,.$$

3. *Die Koeffizientenfolge $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ sei durch die Konstante $L < 1$ begrenzt, dann gilt für sämtliche $\Delta y_n$ die folgende Abschätzung der Fehler:*

$$|\Delta y_n| < \frac{\delta}{1 - q} + |b_n b_{n-1} \ldots b_1|\, \delta_0 < \frac{\delta}{1 - q} + q^n \delta_0$$

*wo $q = \max\limits_{i=1(1)n} \{|b_i|\}$.*

4. *Ist die $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, dann gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $N_2$, dass für sämtliche natürliche $n > N_2$ diese Abschätzung für die Fehler $\Delta y_n$ gilt:*

$$|\Delta y_n| < |K|\, \varepsilon^{n - N_2} + \delta\,, \quad K = \sum_{k=1}^{N_2} \delta_{k-1} \prod_{i=k}^{N_2} |b_i|\,.$$

Beweis. 1. Der Beweis war mit Hilfe der mathematischen Induktion durchgeführt.

2. Aus dem Punkt 1. und aus den Voraussetzungen von 2. folgt, dass

$$|\Delta y_n| < \Big|(|b| + \varepsilon)^{n-N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1} \prod_{i=k}^{N} |b_i| + \delta[(|b| + \varepsilon)^{n-N} + (|b| + \varepsilon)^{n-N-1} + \\ + \ldots + (|b| + \varepsilon) + 1]\Big|\,,$$

wo $\delta = \max_{i>N} \{\delta_i\}$ ist, gilt. Mit der Benützung des binomischen Satzes bekommt man das nächste Verhältnis:

$$|\Delta y_n| < |K| \, |b|^{n-N} + \delta \frac{|b|^{n-N+1}}{1 - |b|} + \frac{\delta}{1 - |b|} + \delta \sum_{k=1}^{n-N} \varepsilon^k \sum_{i=k}^{n-N} \binom{n - N - i + k}{i}$$

$$|b|^{n-N-i} + |K| \sum_{i=1}^{n-N} \binom{n - N}{i} |b|^{n-N-i} \varepsilon^i ,$$

wo

$$K = \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1} \prod_{i=k}^{N} |b_i|$$

ist. Weiter gilt, dass wenn $|b|^{n-N} < \varepsilon$ für $n - N > [\log \varepsilon / \log |b|] + 1 = n_0$ ist (wo $[x]$ der ganze Teil von der Zahl $x$ ist), dann gilt für $n > N + n_0 = N_1$ der Punkt 2.

Der Beweis der Abschätzungen 3. und 4. war mit Hilfe von 1. und 2. durchgeführt.

Folgerungen. 1. Gelten die Voraussetzungen 2., 3., oder 4., dann hängt für ein genügend grosses $n$, der Fehler $\Delta y_n$ von dem Anfangswert nicht ab, und der kann daher beliebig gewählt werden.

2. Divergiert die Folge $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, wird der Lösungvorgang umgekehrt. Man erhält eine binome Relation:

$$y_{n-1} = \frac{1}{b_n} y_n - \frac{a_n}{b_n} \quad \text{für} \quad n = n_0, n_0 - 1, \ldots, n_1 ,$$

für welche Voraussetzungen 3. gelten. Da der Anfangswert unbekannt ist, wird dieser beliebig gewählt und zu jeder Lösung $y_n$ auch $|\Delta y_n|$ ausgerechnet. Es muss aber wenigstens die gröbste obere Abschätzung $\delta_{n_0}$ gegeben sein.

Dieser Satz hat eine besondere Anwendung für eine Integralgleichung Volterrschen Typs mit dem Kern der Form $K(x, y) = k(x) \, h(y)$:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) \, \varphi(y) \, \mathrm{d}y = f(x) .$$

Dieser entspricht der Differenzialgleichung:

$$\varphi'(x) - H(x) \, \varphi(x) = F(x) .$$

Durch die Anwendung der Differenzenformel

$$\varphi'(x_{i+1}) = \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h} + R$$

und nach Vernachlässigung des Restes $R$ für die Lösung, ergibt sich die binome rekurrente Relation:

$$\varphi_{i+1} = a_i + b_i \varphi_i \,,$$

$$a_i = h\left(f'(x_i) - f(x_i)\,\frac{k'(x_i)}{k(x_i)}\right),$$

$$b_i = 1 + h\left(\frac{k'(x_i)}{k(x_i)} + \lambda\, h(x_i)\, k(x_i)\right),$$

wo $\varphi_i = \varphi(x_i)$ und $x_i = a + ih$. Man untersucht die Folge $\{b_i\} = \{b(x_i)\}$ nach 2., oder 3. und es wird bestimmt, welche Teile von vorn und welche von hinten berechnet werden müssen.

Beispiel 1. Man berechne das Integral

$$W_m = \int_0^1 x^m \cos 6\pi x \,\mathrm{d}x$$

mittels der „per partes“ Methode. Es entsteht eine dreigliedrige rekurrente Relation:

$$W_m = \frac{m}{(6\pi)^2} - \frac{m(m-1)}{(6\pi)^2}\, W_{m-2}\,, \quad m = 2, 3, \ldots$$

mit den Anfangswerten $W_0 = W_1 = 0$.

Es ist leicht festzustellen, dass die folgende Abschätzung gültig ist:

$$|W_m| \leqq \frac{1}{m+1}\,.$$

Aus der Tabelle 1 sieht man, dass die Werte $W_m$ für $m \geqq M = 50$ bestimmt nicht die Lösung darstellen. Eine mehrfache Genauigkeit löst das Problem nicht, sondern verschiebt nur die Grenze $M$. Die Ergebnisse, die von hinten berechnet werden,

Tabelle 1

| $n$ | $W_n$ (einf. Genauigkeit) | $1/(n+1)$ | $W_n$ (doppl. Genauigkeit) |
|---|---|---|---|
| 10 | $2{,}30783203\ {}_{10^{-2}}$ | $9{,}09090909\ {}_{10^{-2}}$ | $2{,}30783201\ {}_{10^{-2}}$ |
| 50 | $2{,}02937503\ {}_{10^{-2}}$ | $1{,}96078431\ {}_{10^{-2}}$ | $1{,}17351918\ {}_{10^{-2}}$ |
| 72 | $-5{,}19893289\ {}_{10^{8}}$ | $1{,}36986301\ {}_{10^{-2}}$ | $1{,}80064969\ {}_{10^{-2}}$ |
| 80 | $-3{,}81273902\ {}_{10^{13}}$ | $1{,}23456790\ {}_{10^{-2}}$ | $3{,}76560655\ {}_{10^{2}}$ |
| 140 | $-2{,}17546472\ {}_{10^{59}}$ | $7{,}09219858\ {}_{10^{-3}}$ | $2{,}14850620\ {}_{10^{48}}$ |

sind in der Tabelle 2. Die Anfangswerte werden illustrationshalber folgenderweise gewählt: $W_{200} = W_{199} = 100$, dann ist $\delta_{200} = \delta_{199} = 100$ und $\delta = 10^{-8}$; das ist die obere Abschätzung des Abrundungsfehlers für die dänische Rechenmaschine GIER. Die Genauigkeit ist ersichtlich.

Tabelle 2

| $n$ | $W_n$ (von hinten) | $\delta/(1-q) + \lvert b_n b_{n-1} \dots b_1 \rvert \delta_0$ | $1/(n+1)$ |
|---|---|---|---|
| 194 | $5{,}00584468_{10^{-3}}$ | $7{,}56065704_{10^{-5}}$ | $5{,}12820513_{10^{-3}}$ |
| 190 | $5{,}18586150_{10^{-3}}$ | $1{,}70482770_{10^{-8}}$ | $5{,}23560209_{10^{-3}}$ |
| 140 | $6{,}97017957_{10^{-3}}$ | $1{,}01806663_{10^{-8}}$ | $7{,}09219858_{10^{-3}}$ |
| 80 | $1{,}17317909_{10^{-2}}$ | $1{,}05651710_{10^{-8}}$ | $1{,}2345679_{10^{-2}}$ |
| 50 | $1{,}73519182_{10^{-2}}$ | $1{,}15470311_{10^{-8}}$ | $1{,}96078431_{10^{-2}}$ |
| 20 | $2{,}71019628_{10^{-2}}$ | $4{,}33013045_{10^{-8}}$ | $4{,}76190476_{10^{-2}}$ |

Beispiel 2. Die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \int_0^x (e^y + y^2)\,\varphi(y)\,dy = \cos x\left(1 - \frac{e^x}{2} - 2x\right) + \sin x\left(2 - x^2 - \frac{e^x}{2}\right)$$

wird von hinten durch die folgende rekurrente Relation gelöst:

$$\varphi_i = \frac{1}{b_i}\varphi_{i+1} - \frac{a_i}{b_i}$$

$$a_i = h(-\sin x_i - \cos x_i(-x_i^2 - e^{x_i}))\,,$$

$$b_i = 1 + h(e^{x_i} + x_i^2)\,,$$

$$h = 0{,}001\,, \quad R \leqq 0{,}0005\,.$$

Der Anfang ist im Punkt $x_{n_0} = 10$ illustrationshalber etwas grösser gewählt. Zur Vergleichung sind in der Tabelle 3 die Differenzen zwischen der genauen Lösung und der Lösung mit dieser Methode berechnet. Diese Methode ist für die Programmierungszwecke passend.

Tabelle 3

| $x_i$ | 6,000962 | 3,146956 | 1,571953 | 0,000952 |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\varphi(x_i) - \cos x_i\rvert$ | 0,0000011 | 0,0000147 | 0,0000065 | 0,0002399 |
| $1/(1-q) + \lvert b_n \dots b_1\rvert \delta_{n_0}$ | $0{,}3273613_{10^{-7}}$ | $0{,}3114910_{10^{-6}}$ | $0{,}1380794_{10^{-5}}$ | $0{,}1000046_{10^{-4}}$ |

$\varphi(x_{n_0}) = \varphi(10) = 10\,, \quad \delta_{n_0} = 11$

## Súhrn

# PODMIENKY STABILITY REKURENTNÝCH RELÁCIÍ A ICH APLIKÁCIA

KOHÚTOVÁ EVA

V článku je dokázaná veta o numerickej stabilite dvojčlenných rekurentných relácií a jej aplikácia na výpočet momentov a na riešenie integrálnych rovníc Volterrovho typu s jadrom, ktoré má tvar: $K(x, y) = k(x)\, h(y)$.



*Anschrift des Verfassers: Eva Kohútová,* prom. mat., Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta 1, Bratislava.