Václav Doležal

O nelineárních zpětnovazebních systémech

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 6, 497–515

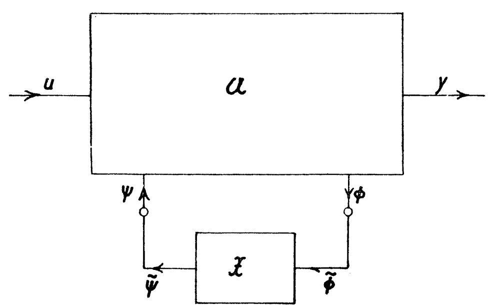
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103256

O NELINEÁRNÍCH ZPĚTNOVAZEBNÍCH SYSTÉMECH

VÁCLAV DOLEŽAL

(Došlo dne 3. května 1968)

V posledních letech byla věnována značná pozornost aplikacím funkcionálně-analytických metod v teorii dynamických systémů, a zejména v teorii zpětné vazby. Tento přehledový článek si klade za úkol seznámit čtenáře jednak s některými moderními výsledky v tomto oboru, a současně naznačit charakter používaných metod.



Obr. 1.

Nejprve si vyložme, jaké je matematické pozadí zpětnovazebního systému, a jakými problémy se budeme zabývat.

Nechť je dána nějaká neprázdná lineární množina F, jejíž prvky budeme interpretovat jako signály a odezvy vyšetřované soustavy. Tak například za F můžeme vzít množinu všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $(-\infty, \infty)$ nebo na $[0, \infty)$, nebo množinu všech spojitých n-vektorových funkcí na $[0, \infty)$, nebo množinu všech m-vektorových funkcí, jejichž norma je lokálně integrovatelná apod.

Buď nyní $\mathfrak{A}$ nějaký systém, který má dva vstupy u a Ψ a dva výstupy y a Φ, a předpokládejme, že každá dvojice (u, Ψ) signálů u, $\Psi \in F$ jednoznačně určuje odezvy y, $\Phi \in F$ na výstupech. Jinými slovy, předpokládejme, že jsou dány (obecně nelineární) operátory A a B, zobrazující kartézský součin $F \times F$ do F tak, že platí

(1) $$\Phi = A(u, \Psi), \quad y = B(u, \Psi).$$

Nechť dále je dán nějaký systém $\mathfrak{X}$, mající vstup $\tilde{\Phi}$ a výstup $\tilde{\Psi}$, a nechť signál $\tilde{\Phi} \in F$ jednoznačně určuje odezvu $\tilde{\Psi}$, tj. chování systému $\mathfrak{X}$ je popsáno rovnicí

$$\tilde{\Psi} = X\tilde{\Phi}, \tag{2}$$

kde X je operátor zobrazující F do sebe.

Utvořme nový systém tak, jak je to vyznačeno na obr. 1, tj. zaveďme podmínky $\tilde{\Phi} = \Phi$ a $\tilde{\Psi} = \Psi$. Jak známo, tento nový systém se nazývá zpětnovazebním systémem, a pokud nás nezajímají veličiny Φ a Ψ, má jediný vstup u a výstup y.

Nyní vznikají tyto otázky:

1. Má nově sestrojený systém vůbec smysl, tj. existují pro každé $u \in F$ jednoznačně určené prvky y, Φ, $\Psi \in F$ tak, že jsou splněny rovnice (1) a (2)? Všimněme si, že je-li tomu tak, pak zejména každým signálem u je jednoznačně stanovena odezva y, tj. vnější chování celého zpětnovazebního systému lze popsat rovnicí $y = Wu$, kde W je nějaký operátor z F do F, který budeme nazývat operátorem přenosu (over-all transfer operator).

2. Nechť některé prvky z F jsou interpretovány jako ohraničené signály nebo odezvy, a nechť platí 1. Má potom sestrojený systém tu vlastnost, že každý ohraničený signál dává ohraničenou odezvu?

3. Jestliže platí 1., je potom odezva y dostatečně necitlivá na malé změny signálu u, tj. mají malé změny u za následek pouze malé změny y?

Tyto otázky mohou být snadno zodpovězeny, známe-li vlastnosti jisté rovnice, dané systémy $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{X}$. Skutečně, dosadíme-li z (2) do první rovnice (1), máme

$$\Phi = A(u, X\Phi). \tag{3}$$

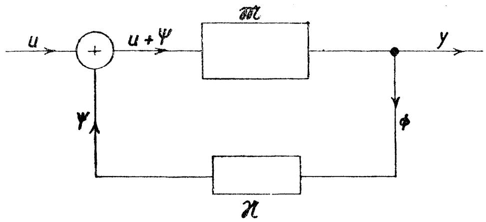
Je zřejmé, že má-li rovnice (3) pro každé $u \in F$ jednoznačně určené řešení $\Phi \in F$, potom prvky u a $\Psi = X\Phi \in F$ splňují první rovnici (1), a druhá rovnice (1) jednoznačně určuje y. Jinými slovy, má-li rovnice (3) zmíněnou vlastnost, definuje operátor Q z F do F, tj. klademe $\Phi = Qu$, kde Φ je řešení (3) odpovídající prvku u. Pak podle druhé rovnice (1) můžeme definovat operátor přenosu W předpisem

$$y = Wu = B(u, XQu). \tag{4}$$

Jednoznačná řešitelnost (3) nám tedy dává odpověď na naši první otázku .

Chceme-li zodpovědět i další dvě otázky, musíme mít nějaké prostředky, jak měřit „velikost" signálu nebo odezvy, nebo „vzdálenost" dvou signálů nebo odezev. K tomu cíli předpokládejme, že množina F obsahuje nějakou část $F^* \subset F$, která je lineárním normovaným prostorem (Viz [1].). To zejména značí, že pro každé $x \in F^*$ je definována norma $\|x\|$, tj. „velikost" prvku x, a dále pro každou dvojici x, $y \in F^*$ známe vzdálenost $\|x - y\|$. Prvky F^* budeme pak interpretovat jako ohraničené signály a odezvy.

Tak na příklad, je-li F množina všech spojitých funkcí na $[0, \infty)$, můžeme za F^* vzít množinu všech spojitých ohraničených funkcí na $[0, \infty)$, kde normu definujeme předpisem $\|x\| = \sup_{[0,\infty)} |x(t)|$. Podobně, značí-li F množinu všech měřitelných funkcí definovaných na $[0, \infty)$, které jsou lokálně integrovatelné s kvadrátem, můžeme položit $F^* = \{x : x \in F, \int_0^\infty |x(t)|^2 \, dt < \infty\}$ s normou $\|x\| = (\int_0^\infty |x(t)|^2 \, dt)^{1/2}$.



Obr. 2.

Nastane-li nyní ten případ, že operátor Q zobrazuje F^* do sebe, tj. pro každé $u \in F^*$ je odpovídající řešení Φ rovnice (3) opět prvkem F^*, a zároveň X zobrazuje F^* do F^* a B zobrazuje $F^* \times F^*$ do F^*, potom (4) ukazuje, že W zobrazuje F^* do F^*. Máme tedy situaci danou druhou otázkou; zde říkáme, že uvažovaný zpětnovazební systém vykazuje ohraničenost typu vstup-výstup (input-output boundedness).

Obraťme se konečně ke třetí otázce. K tomu cíli zaveďme následující pojem spojitosti operátoru: Nechť V je operátor zobrazující F do F, a buď $x \in F$; operátor V nazveme spojitým v bodě x, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\tilde{x} \in F$ splňující podmínky $\tilde{x} - x \in F^*$ a $\|\tilde{x} - x\| < \delta$ platí $V\tilde{x} - Vx \in F^*$ a $\|V\tilde{x} - Vx\| < \varepsilon$. Operátor V nazveme spojitým, je-li spojitý v každém bodě $x \in F$. Obdobně definujeme spojitost operátoru U, který zobrazuje $F \times F$ do F. (Čtenáři je jistě zřejmé, že v případě $F^* = F$ se zavedené pojmy redukují na obvyklé pojmy spojitosti.)

Zpětnovazební systém pak nazveme stabilním ve smyslu vstup-výstup (input-output stable), jestliže jeho operátor přenosu W je spojitý. Je jistě zřejmé, že zavedené definice přesně vystihují představy, vyslovené ve třetí otázce.

Všimněme si hned na tomto místo této skutečnosti: Předpokládejme, že operátory X a B jsou spojité; jestliže operátor Q definovaný rovnicí (3) je rovněž spojitý, potom se lze snadno přesvědčit (viz rovnici (4)), že i operátor přenosu W je spojitý, a tedy systém je stabilní.

Z této diskuse vyplývá, že rovnice (3) má rozhodující význam pro studium zpětnovazebního systému. Jinými slovy, existence operátoru Q, definovaného rovnicí (3), jeho vlastnost $QF^* \subset F^*$ a spojitost triviálně implikují existenci operátoru přenosu W, ohraničenost a stabilitu typu vstup-výstup.

Je proto nasnadě, zaměřit se hlavně na vyšetřování rovnice (3). Než přikročíme ke konkrétním výsledkům, všimněme si ještě toho, jak (3) vypadá v některých speciálních ale důležitých případech systémů. Zabývejme se nejdříve klasickým zpětnovazebním obvodem, znázorněným na obr. 2. Nechť vnější chování systémů $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ je popsáno operátory M a N, které zobrazují F do sebe. Z obrázku je patrno, že podle našeho značení je

$$A(u, \Psi) = B(u, \Psi) = M(u + \Psi), \quad X = N, \tag{5}$$

a tedy rovnice (3) nabývá tvaru $\Phi = M(u + N\Phi)$. Z formálních důvodů je zde výhodnější užít v rovnicích (1), (2) substituci $u + \Psi = v$; potom je

$$v = u + NMv. \tag{6}$$

Je zřejmé, že vše. co bylo řečeno shora o významu rovnice (3) pro zpětnovazební systém, platí i pro (6). Na druhé straně, je-li speciálně M lineární operátor, potom (3) má tvar

$$\Phi = Mu + MN\Phi. \tag{7}$$

Všimněme si, že obě rovnice (6), (7) mají tvar tradiční funkcionální rovnice.

Pro úplnost zmiňme se ještě o případu, kdy celý zpětnovazební systém je lineární, tj. kdy

$$A(u, \Psi) = A_1 u + A_2 \Psi, \quad B(u, \Psi) = B_1 u + B_2 \Psi, \tag{8}$$

kde A_1, A_2, B_1, B_2, a X jsou lineárními operátory. Zde je pak rovnici (3) možno psát ve tvaru

$$\Phi = A_1 u + A_2 X \Phi, \tag{9}$$

tj. jde o lineární funkcionální rovnici.

Obraťme nyní naši pozornost k některým důležitým výsledkům; jak už bylo shora řečeno, půjde nám především o systémy nelineární. V této oblasti dokázal mnoho významných tvrzení I. W. SANDBERG v pracích [2]–[6]. Abychom se seznámili s těmito metodami, zaveďme nejprve některá označení a předpoklady.

Buď Ω prvná množina reálných čísel, a nechť pro každé $T \in \Omega$ je S_T lineární zobrazení z množiny F do F^*, které má tyto vlastnosti:

1. $S_T^2 = S_T$ pro každé $T \in \Omega$,
2. $\|S_T x\| \leqq \|x\|$ pro každé $T \in \Omega$ a $x \in F^*$,
3. $x \in F^*$ právě tehdy, když norma $\|S_T x\|$ je stejnoměrně ohraničená na Ω (tj. existuje $C > 0$ tak, že $\|S_T x\| \leqq C$ pro každé $T \in \Omega$).

Tak na příklad, je-li $p \geqq 1$ a položíme-li

$$F = \overline{L_p} = \left\{x : x \text{ měřitelná}, \int_0^\tau |x(t)|^p \, dt < \infty \text{ pro každé } 0 < \tau < \infty\right\},$$

a

$$F^* = L_p = \left\{x : x \text{ měřitelná} \int_0^\infty |x(t)|^p \, dt < \infty\right\}$$

s normou $\|x\| = (\int_0^\infty |x(t)|^p \, dt)^{1/p}$, potom se lze snadno přesvědčit, že pro $\Omega = (0, \infty)$ a S_T definované vztahem

$$\begin{aligned}(S_T x)(t) &= x(t) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq t \leqq T, \\ &= 0 \quad \text{pro} \quad t > T,\end{aligned}$$

platí shora uvedené požadavky 1., 2., 3.

Buď dále M (ne nutně lineární) operátor, zobrazující F do sebe; M nazveme kausálním operátorem, jestliže pro každé $T \in \Omega$ platí

(10) $$S_T M = S_T M S_T .$$

Čtenář snadno nahlédne, že rovnost (10) je splněna právě tehdy, když platí podmínka: je-li $x_1, x_2 \in F$ a $x_1(t) = x_2(t)$ pro $0 \leqq t \leqq T$, pak $(Mx_1)(t) = (Mx_2)(t)$ pro $0 \leqq t \leqq T$. Fyzikálně tedy kausalita značí, že v intervalu $[0, T]$ závisí odezva systému s přenosovým operátorem M pouze na hodnotách signálu v $[0, T]$ a nikoli na hodnotách pro $t > T$. Všimněme si též, že například operátor

$$(Mx)(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t g(t, \tau, x(\tau)) \, d\tau ,$$

kde $f(x, \xi)$ a $g(t, \tau, \xi)$ jsou skalární funkce skalárních argumentů t, τ, ξ je kausální. Naproti tomu operátor $\tilde{M}$, definovaný rovnicí $(\tilde{M}x)(t) = x(2t)$, zřejmě kausální není.

Nyní můžeme již vyslovit první tvrzení, které je uvedeno ve [2].

A. *Buďte L a N kausální operátory zobrazující F do sebe, a nechť L je lineární a zobrazuje F^* do sebe. Buď $x \in F$ a buď*

(11) $$g = x + LNx .$$

Nechť existuje taková konstanta λ, že

(i) *$(I + \lambda L)^{-1}$ existuje na F^* a je kausálním operátorem,*

(ii) *$(I + \lambda L)^{-1} L$ je ohraničený na F^*,*

(iii) *existuje kladná konstanta k_λ tak, že*

$$\|S_T(Nx - \lambda x)\| \leqq k_\lambda \|S_T x\|$$

pro každé $T \in \Omega$ a

$$r = \|(I + \lambda L)^{-1} L\| \, k_\lambda < 1 .$$

Potom platí

$$\|S_T x\| \leqq (1 - r)^{-1} \|S_T(I + \lambda L)^{-1} g\| \tag{12}$$

pro každé $T \in \Omega$. Je-li nadto $g \in F^*$, pak také $x \in F^*$.

Pro ilustraci užívaných metod si zde dokažme toto tvrzení. Pro zkrácení zápisu pišme $S_T y = y_T$ pro každé $T \in \Omega$ a $y \in F$. Ježto S_T je lineární zobrazení, z (11) plyne $g_T = x_T + S_T L N x$; poněvadž dále L a N jsou kausální operátory, můžeme předchozí rovnici psát ve tvaru

$$g_T = x_T + S_T L S_T(Nx) = x_T + S_T L S_T N S_T x = x_T + S_T L S_T N x_T\,. \tag{13}$$

Ze (13) plyne

$$g_T = S_T(I + \lambda L)\, x_T + S_T L S_T(N x_T - \lambda x_T)\,, \tag{14}$$

neboť $S_T x_T = S_T^2 x = S_T x = x_T$ podle požadavku 1. Avšak $(I + \lambda L)^{-1}$ existuje na F^* a je kausální podle (i), tj. platí $S_T(I + \lambda L)^{-1} = S_T(I + \lambda L)^{-1} S_T$. Ježto oba členy na pravé straně (14) patří do F^*, máme ze (14)

$$x_T = -S_T(I + \lambda L)^{-1} S_T L S_T(N x_T - \lambda x_T) + S_T(I + \lambda L)^{-1} g_T\,. \tag{15}$$

Na druhé straně, podle podmínky (ii), (i) a požadavku 2. platí pro každé $u \in F^*$, že

$$\begin{aligned} \|S_T(I + \lambda L)^{-1} S_T L u\| &= \|S_T(I + \lambda L)^{-1} L u\| \leqq \\ &\leqq \|(I + \lambda L)^{-1} L u\| \leqq \|(I + \lambda L)^{-1} L\| \,.\, \|u\|\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Přejdeme-li v (15) k normě a užijeme-li (16) s $u = S_T(N x_T - \lambda x_T) = S_T(Nx - \lambda x)$, dostaneme podle (iii), že

$$\begin{aligned} \|x_T\| &\leqq \|(I + \lambda L)^{-1} L\| \,.\, \|S_T(Nx - \lambda x)\| + \|S_T(I + \lambda L)^{-1} g_T\| \leqq \\ &\leqq k_\lambda \|(I + \lambda L)^{-1} L\| \,.\, \|x_T\| + \|S_T(I + \lambda L)^{-1} g_T\|\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne konečně podle podmínky $r < 1$ a kausality $(I + \lambda L)^{-1}$, že

$$\|x_T\| = \|S_T x\| \leqq (1 - r)^{-1} \|S_T(I + \lambda L)^{-1} g\|\,,$$

což jsme měli dokázat.

Je-li dokonce $g \in F^*$, je $(I + \lambda L)^{-1} g \in F^*$, a tedy podle 2. platí $\|S_T(I + \lambda L)^{-1} g\| \leqq \leqq \|(I + \lambda L)^{-1} g\| = C$; je tedy $\|S_T x\| \leqq (1 - r)^{-1} C$ pro každé $T \in \Omega$, a tedy podle požadavku 3. máme $x \in F^*$. Věta A je dokázána.

Věnujme nyní několik slov výkladu věty A. Předpokládejme, že vyšetřovaný zpětnovazební systém je toho typu, že rovnice (3) má tvar (6) nebo (7), tj. že jde právě o rovnici (11). Potom uvedená věta zřejmě řeší otázku ohraničenosti. Skutečně, je-li

$g \in F^*$ a víme-li, že řešení x rovnice (11) splňuje podmínku (iii), pak platí $x \in F^*$. Je-li tedy speciálně podmínka (iii) splněna pro libovolné $x \in F$, pak pro libovolné $g \in F^*$ je řešení x rovnice (11) opět prvkem F^*, a nastává ohraničenost typu vstup-výstup.

Smysl podmínky (iii) samé je dosti názorný; zhruba řečeno, (iii) požaduje, aby pro řešení x „nepřesáhla hodnota nelineární části" $(N - \lambda)\, x$ jistý dosti malý násobek x na každém konečném intervalu $[0, T]$. (Viz shora uvedený případ $F = \overline{Lp}$, $F^* = Lp$ a S_T.) Věta A nám tedy umožňuje usuzovat z lokálních vlastností operátoru N na ohraničenost x, tj. na jistou globální vlastnost.

Další tvrzení, dokázané ve [2], zní:

B. *Nechť L a N mají stejný význam jako ve větě* A; *nechť $x_1, x_2 \in F$ a buď*

$$g_1 = x_1 + LNx_1\,, \quad g_2 = x_2 + LNx_2\,. \tag{17}$$

Nechť existuje konstanta λ tak, že jsou splněny podmínky (i) *a* (ii) *věty* A; *mimo to, nechť*

(iii*) *existuje konstanta $k_\lambda > 0$ tak, že*

$$\|S_T\{(Nx_1 - Nx_2) - \lambda(x_1 - x_2)\}\| \leqq k_\lambda \|S_T(x_1 - x_2)\|$$

pro každé $T \in \Omega$ a je

$$r = \|(I + \lambda L)^{-1} L\|\, k_\lambda < 1\,.$$

Potom platí

$$\|S_T(x_1 - x_2)\| \leqq (1 - r)^{-1} \|\, S_T(I + \lambda L)^{-1}\,(g_1 - g_2)\| \tag{18}$$

pro každé $T \in \Omega$. Je-li nadto $g_1 - g_2 \in F^*$. potom $x_1 - x_2 \in F^*$.

Tato věta je zřejmě obdobná předchozí, jenže zde podmínka (iii) je nahrazena „inkrementální" podmínkou (iii*). Rovněž její důkaz je analogický jako pro větu A. Snadno se můžeme přesvědčit, že věta B je klíčem k zodpovězení otázky stability. Skutečně, předpokládejme, že rovnice (3) uvažovaného zpětnovazebního systému má tvar (11), že podmínka (iii*) je dokonce splněna pro každou dvojici x_1, $x_2 \in F$ a že $(I + \lambda L)^{-1}$ je ohraničený na F^*. Mimo to předpokládejme, že kromě požadavku 3. je splněna i podmínka

3*. F^* je úplný, a je-li $\|S_T x\| \leqq C$ pro každé $T \in \Omega$ pak $x \in F^*$ a $\|x\| \leqq C$. (Tato podmínka je zřejmě splněna pro případ $F = \overline{Lp}$, $F = Lp$.) Poznamenejme, že potom pro libovolné $g \in F$ existuje právě jedno $x \in F$ splňující rovnici (11).

Zvolme tedy pevně nějaké $g_1 \in F$ a $\varepsilon > 0$, a buď $x_1 \in F$ dáno první rovnicí (17). Je-li $g_2 \in F$ takové, že $g_1 - g_2 \in F^*$ a $\|g_1 - g_2\| < (1 - r)\, \|(I + \lambda L)^{-1}\|^{-1}\, \varepsilon$, potom podle požadavku 2. máme

$$\|S_T(I + \lambda L)^{-1} (g_1 - g_2)\| \leqq \|(I + \lambda L)^{-1} (g_1 - g_2)\| \leqq \|(I + \lambda L)^{-1}\| . \|g_1 - g_2\| < \\ < (1 - r) \varepsilon ,$$

a tedy podle (18) je $\|S_T(x_1 - x_2)\| < \varepsilon$ pro každé $T \in \Omega$, kde x_2 značí řešení druhé rovnice (17). Pak ale podle podmínky 3*. je $x_1 - x_2 \in F^*$ a $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$, tj. operátor Q definovaný rovnicí (11) je spojitý. Odtud plyne stabilita systému jak jsme to naznačili shora.

Všimněme si ještě té skutečnosti, že požadavek linearity operátoru L značí, máme-li na mysli klasický zpětnovazební obvod z obr. 2, že buď systém $\mathfrak{M}$ nebo $\mathfrak{N}$ musí být lineární. (Viz rovnice (6) a (7).)

V obou uvedených větách je dosti nepohodlný požadavek existence konstanty λ. V práci [2] je ukázáno, že když F^* je Hilbertovým prostorem, potom lze vyslovit obdobné věty, kde tento požadavek je nahrazen jistými podmínkami positivity operátorů L a N. Tak například platí

C. *Buďte A, B kausální operátory, buď $g \in F^*$, $x \in F$ a nechť $g = x + ABx$. Jestliže existují konstanty $\alpha > 0$ a $p > 1$ tak, že*

$$\text{Re}\langle S_T A y, S_T y\rangle \geqq \alpha \|S_T y\|^p \tag{19}$$

a

$$\text{Re}\,\langle S_T B y, S_T y\rangle \geqq 0 \tag{20}$$

pro všechna $y \in F$ a $T \in \Omega$, potom platí $x \in F^*$.

Na druhé straně, v práci [3] je dokázáno, že když $F^* = L_2$ a $\Omega = (0, \infty)$, potom podmínky (i)–(iii) jsou splněny, platí-li následující podmínky (iv):

(iv) Existují konstanty k_1, $c \geqq 0$ a $k_2 > 0$ tak, že $k_1 + c > 0$ a

$$\text{Re}\,\langle N S_T x, x\rangle \geqq k_1 \|S_T x\|^2 , \quad \|N S_T x\|^2 \leqq k_2 \|S_T x\|^2$$

pro všechna $T > 0$, (x má stejný význam jako ve větě A), a

$$\text{Re}\,\langle Lh, h\rangle \geqq c\|h\|^2$$

pro všechna $h \in L_2$.

Poznamenejme, že existuje úzký vztah mezi pojmem kausality a pasivity operátoru, která se definuje vztahem (20); bližší poučení o tom, lze najít v práci [7].

Věta A, B a C představují abstraktní základnu pro četné další speciálnější výsledky, publikované v pracech [2]–[4]. Jedná se zejména o případ, kdy operátor LN má tvar

$$(LNx)(t) = \int_0^t k(t - \tau)\, \xi(x(\tau), \tau)\, d\tau ;$$

podmínky pro ohraničenost resp. spojitost jsou pak dány „kriterii ve frekvenční oblasti", tj. podmínkami pro Laplaceův obraz funkce $k(t)$ a jistými mezemi pro $\xi(u, t)$. Aby si čtenář učinil představu o charakteru těchto výsledků, citujme dvě věty, dokázané v práci [2] a [3]. K tomu cíli zaveďme toto označení:

Buď $\alpha \leqq \beta$, a buď $\xi(u, t)$ reálná funkce definovaná na $(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$; budeme psát $\xi(u, t) \in \Psi_0(\alpha, \beta)$, když platí

$$\alpha \leqq \frac{\xi(u, t)}{u} \leqq \beta$$

pro všechna $t \geqq 0$ a $u \neq 0$. Podobně symbol $\xi(u, t) \in \Psi(\alpha, \beta)$ bude značit, že

$$\alpha \leqq \frac{\xi(u_1, t) - \xi(u_2, t)}{u_1 - u_2} \leqq \beta$$

pro všechna $t \geqq 0$ a $u_1 \neq u_2$.

Nechť $k(t)$ je funkce definovaná pro $t \geqq 0$, a nechť Laplaceův integrál $K(s) = \int_0^\infty k(t)\, e^{-st}\, dt$ konverguje v polorovině $\operatorname{Re} s \geqq 0$. Budeme psát $k(t) \in \Phi(\alpha, \beta)$, jestliže

(i) $1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\, K(s) \neq 0$ pro $\operatorname{Re} s \geqq 0$,

(ii) $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \sup\limits_{-\infty < \omega < \infty} \left|(1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\, K(i\omega))^{-1}\, K(i\omega)\right| < 1$.

Nechť konečně $\bar{L}_2$, L_2 mají shora uvedený význam. Pak platí

D. *Buď $k(t) \in \Phi(\alpha, \beta)$, $\xi(u, t) \in \Psi_0(\alpha, \beta)$ a nechť*

$$g(t) = x(t) + \int_0^t k(t - \tau)\, \xi(x(\tau), \tau)\, d\tau\,, \quad t \geqq 0\,,$$

kde $g \in L_2$ a $x \in \bar{L}_2$. Potom $x \in L_2$ a existuje číslo $\varrho > 0$, závisející jen od k, α a β tak, že

$$\|x\| \leqq \varrho \|g\|\,.$$

E. *Buď $k(t) \in \Phi(\alpha, \beta)$, $\xi(u, t) \in \Psi(\alpha, \beta)$ a nechť*

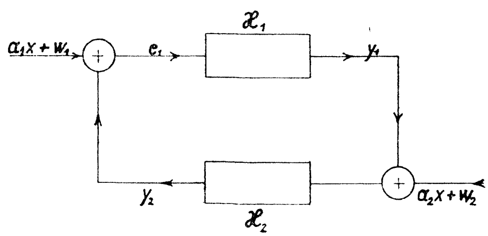
$$g_i(t) = x_i(t) + \int_0^t k(t - \tau)\, \xi(x_i(\tau), \tau)\, d\tau\,, \quad i = 1, 2\,;\ t \geqq 0\,,$$

kde g_1, g_2, x_1, $x_2 \in \bar{L}_2$ a $g_1 - g_2 \in L_2$. Potom $x_1 - x_2 \in L_2$ a existuje číslo $\varrho' > 0$, závisející jen od k, α a β tak, že

$$\|x_1 - x_2\| \leqq \varrho' \|g_1 - g_2\|\,.$$

Vztah těchto výsledků k otázkám ohraničenosti a stability zpětnovazebních soustav jistě nepotřebuje komentář; pokud jde o obvod z obr. 2, pak věty D a E jsou aplikovatelné například na ten případ, kdy $\mathfrak{M}$ je lineární časově nezávislý systém, a $\mathfrak{N}$ je zesilovač bez paměti s časově nelineárním ziskem.

Metody, které vedly ke shora uvedeným výsledkům, mohou být aplikovány i na příbuzné problémy. Uveďme jen práci [5], kde jsou sledovány otázky existence periodických režimů, a práci [6], kde některé výsledky V. M. POPOVA jsou dokázány metodami abstraktních prostorů.



Obr. 3.

Další zajímavé výsledky týkající se zpětnovazebních systémů dokázal G. ZAMES v pracích [8], [9]. Jeho přístup se poněkud liší od toho, který jsme právě uvedli. Za prvé, za základ zpětnovazebního systému bere obvod, znázorněný na obr. 3. Zde x značí vstupní signál, e_1, y_1, y_2, e_2 hledané veličiny určující odezvu, w_1, w_2 pevné veličiny (zahrnující například počáteční podmínky), a α_1, α_2 pevná čísla. Za druhé, na rozdíl od předchozího pojetí, systémy $\mathscr{H}_1$ a $\mathscr{H}_2$ nejsou popsány operátory, ale relacemi. Jak známo, relací H na množině F nazýváme neprázdnou podmnožinu kartézského součinu $F \times F$. V této interpretaci je tedy systém popsán množinou dvojic (signál, odezva); to zejména značí, že systém obecně může reagovat na signál více odezvami. Tento přístup má jistou výhodu v tom, že umožňuje eliminovat otázky jednoznačnosti.

Než přistoupíme k formulaci některých výsledků, zaveďme tyto pojmy.

Je-li H relace na F, buď $\mathrm{Do}\,(H) = \{x : (x, y) \in H\}$, a $\mathrm{Ra}\,(H) = \{y : (x, y) \in H\}$. (Ve fyzikální interpretaci je tedy $\mathrm{Do}\,(H)$ množina všech možných signálů, a $\mathrm{Ra}\,(H)$ množina všech odezev.) Když $x \in \mathrm{Do}\,(H)$, označíme symbolem Hx jakýkoli prvek (obraz) takový, že $(x, Hx) \in H$; půjde-li nám o právě jeden takový prvek, označíme jej $(Hx)_0$.

Buď $\mathscr{R}$ množina všech takových relací H na F, že $\Theta \in \mathrm{Do}\,(H)$ a $H\Theta = \Theta$, kde $\Theta \in F$ je nulový prvek.

Je-li H relace na F, buď $H^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in H\}$.

Podobně jako se definuje součet a součin dvou operátorů, definuje se i součet a součin dvou relací H_1 a H_2, jestliže množiny $\mathrm{Do}\,(H_1)$, $\mathrm{Do}\,(H_2)$, $\mathrm{Ra}\,(H_1)$ a $\mathrm{Ra}\,(H_2)$ splňují zřejmé vztahy.

Nechť $F^* \subset F$ je opět lineární normovaný prostor, a buď H relace na F; relaci H nazveme ohraničenou, jestliže $\{Hx : x \in A\}$ je ohraničenou podmnožinou F^* kdykoli A je ohraničenou podmnožinou F^* a $A \subset \text{Do}(H)$.

Relaci H na F nazveme spojitou, má-li tuto vlastnost: Pro každé $x \in \text{Do}(H) \cap F^*$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro kterékoli $(Hx)_0$ a každé $y \in \text{Do}(H) \cap F^*$, splňující podmínku $\|x - y\| < \delta$, existuje $(Hy)_0$ tak, že $(Hx)_0 - (Hy)_0 \in F^*$ a $\|(Hx)_0 - (Hy)_0\| < \varepsilon$.

Relaci H na F nazveme stabilní, je-li ohraničená a spojitá.

Vraťme se nyní k systému z obr. 3.; je zřejmé, že platí rovnice

$$\begin{aligned} (21) \qquad & e_1 = w_1 + \alpha_1 x + y_2\,, \quad & e_2 = w_2 + \alpha_2 x + y_1\,, \\ & y_2 = H_2 e_2\,, & y_1 = H_1 e_1\,, \end{aligned}$$

kde H_1, H_2 jsou dané relace z $\mathscr{R}$, popisující systémy $\mathscr{H}_1$ resp. $\mathscr{H}_2$. Ježto x je považováno za signál, zajímají nás veličiny e_1, e_2 určující odezvu. Přesně řečeno, zajímají nás relace mezi x, e_1 a x, e_2, tj. relace

$$(22) \qquad E_1 = \{(x, e_1) : x \in F \text{ a existují } e_2, y_1, y_2, (H_1 e_1)_0, (H_2 e_2)_0 \in F \text{ tak, že platí (21)}\}\,;$$

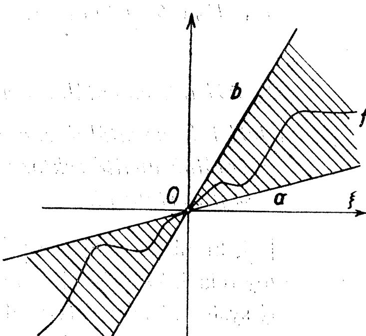
(relace E_2 je definována obdobně).

Stejně tak, jak bylo naznačeno úvodem, půjde nám především o podmínky pro H_1 a H_2, za kterých E_1 a E_2 jsou ohraničené, resp. stabilní. Poměrně vydatná tvrzení tohoto typu dostaneme, jsou-li H_1, H_2 tzv. kónické relace. Definujme si proto tyto pojmy.

Nechť F^* je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle .\,, .\rangle$ a nechť S_T má shora definovaný význam. Buď $H \in \mathscr{R}$ a buďte a, b reálná čísla, $a \leqq b$. Řekneme, že relace H leží uvnitř sektoru $\{a, b\}$, jestliže pro každé $x \in \text{Do}(H)$ a každé $T \in \Omega$ platí

$$(23) \qquad \langle S_T(Hx - ax)\,,\ S_T(Hx - bx)\rangle \leqq 0\,.$$

(Hx značí kterýkoli obraz x.)
Podobně řekneme, že H leží vně sektoru $\{a, b\}$, platí-li (23) s obráceným znaménkem nerovnosti. Leží-li H uvnitř nebo vně nějakého sektoru, nazývá se kónická relace.



Obr. 4.

Z rovnice (23) je zřejmé, že kónická relace je přirozeným zobecněním pojmu funkce, jejíž graf leží uvnitř nebo vně sektoru, tvořeného přímkami jdoucími počátkem, které mají směrnice a a b. (Viz obr. 4.)

Tak například snadno se můžeme přesvědčit, že když $f(\xi)$ je funkce splňující podmínku $a \leqq f(\xi)/\xi \leqq b$ pro každé $\xi \neq 0$, potom relace $H = \{(x, y) : x \in \bar{L}_2, y = f(x)\}$ leží uvnitř sektoru $\{a, b\}$.

Obdobným způsobem je definována inkrementálně kónická relace.

Buď $H \in \mathscr{R}$ a buď $a \leqq b$; řekněme, že relace H leží inkrementálně uvnitř [vně] sektoru $\{a, b\}$, platí-li tato podmínka: je-li $x, y \in \mathrm{Do}(H)$, pak pro libovolné $(Hx)_0$ existuje $(Hy)_0$ tak, že

$$\begin{aligned} (24) \qquad & \langle S_T\{(Hx)_0 - (Hy)_0 - a(x - y)\}, \\ & S_T\{(Hx)_0 - (Hy)_0 - b(x - y)\}\rangle \leqq 0 \quad [\geqq 0]. \end{aligned}$$

Je opět zřejmé, že například relace ležící inkrementálně uvnitř nějakého sektoru je zobecněním pojmu Lipschitzovské funkce.

Nyní už můžeme vyslovit tvrzení o ohraničenosti [8].

F. *Buď $H_1, H_2 \in \mathscr{R}$ a buďte δ_1, δ_2 čísla, z nichž jedno je kladné a druhé nula. Nechť*

(i) $-H_2$ *leží uvnitř sektoru* $\{a + \delta_1, b - \delta_1\}$, *kde* $b > 0$,

(ii) H_1 *leží vně sektoru* $\{-a^{-1} - \delta_2, -b^{-1} + \delta_2\}$ *je-li* $a > 0$, *nebo uvnitř sektoru* $\{-b^{-1} + \delta_2, -a^{-1} - \delta_2\}$ *je-li* $a < 0$.

Potom relace E_1 a E_2, definované vztahem (22), *jsou ohraničené.*

Analogické tvrzení platí pro stabilitu [8]:

G. *Buď $H_1, H_2 \in \mathscr{R}$ a buďte δ_1, δ_2 čísla, z nichž jedno je kladné a druhé nula. Nechť*

(i)* $-H_2$ *leží inkrementálně uvnitř sektoru* $\{a + \delta_1, b - \delta_1\}$, *kde* $b > 0$,

(ii)* H_1 *leží inkrementálně vně sektoru* $\{-a^{-1} - \delta_2, -b^{-1} + \delta_2\}$ *je-li* $a > 0$, *nebo inkrementálně uvnitř sektoru* $\{-b^{-1} + \delta_2, -a^{-1} - \delta_2\}$ *je-li* $a < 0$. *Potom relace* E_1 a E_2 *jsou stabilní.*

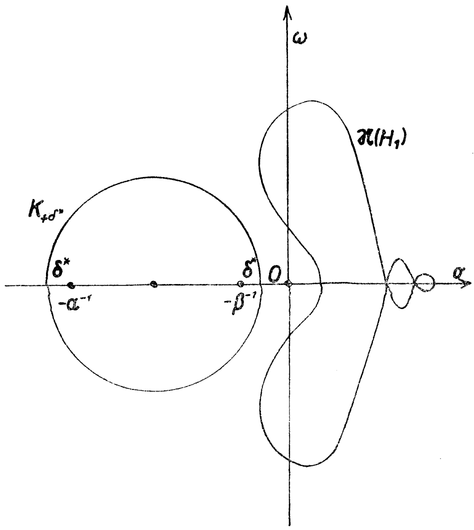
V práci [9], která navazuje na [8], jsou tyto výsledky dále rozvinuty pro některé speciální typy relací. Zejména jde o případ, kdy jedna relace popisuje lineární časově neproměnný systém. Získaná tvrzení mají geometrický charakter, a proto se nazývají kruhová kriteria (circle criteria). Uveďme zde alespoň jedno z nich. K tomu cíli zaveďme tato označení:

Nechť $F = \bar{L}_2$, $F^* = L_2$, a buď $\mathscr{L}$ třída všech relací $\{(x, Mx) : x \in \bar{L}_2\}$, kde

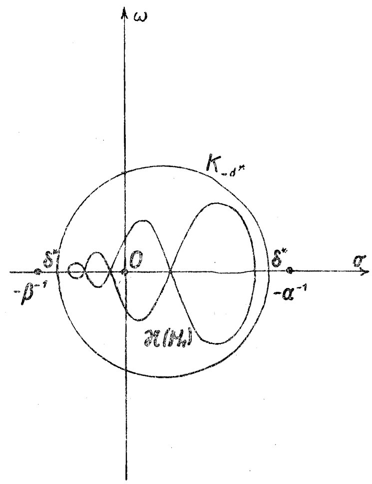
$$(25) \qquad (Mx)(t) = h_0 x(t) + \int_0^t h(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau\,, \quad t \geqq 0\,,$$

přičemž h_0 je reálné číslo a $h(t)$ je reálná funkce taková, že $\int_0^\infty |h(t)|\, e^{\sigma_0 t}\, dt < \infty$ pro nějaké $\sigma_0 > 0$. (Zřejmě tedy každá relace z $\mathscr{L}$ je lineárním operátorem z $\bar{L}_2 \to \bar{L}_2$).

Nyquistovým diagramem $\mathfrak{N}(H)$ relace $H \in \mathscr{L}$ nazveme množinu v komplexní rovině $s = \sigma + i\omega$, která se sestává z bodu h_0 a všech bodů $h_0 + \int_0^\infty h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$, kde $-\infty < \omega < \infty$. Je tedy $\mathfrak{N}(H)$ jakousi křivkou, ležící v ohraničené části s-roviny.



Obr. 5a.



Obr. 5b.

Lze ukázat, že existuje úzká souvislost mezi inkrementální kónicitou relace $H \in \mathscr{L}$ a polohou Nyquistova diagramu $\mathfrak{N}(H)$, tj. středem a poloměrem kružnice, uvnitř nebo vně které $\mathfrak{N}(H)$ leží. Použijeme-li této okolnosti ve tvrzeních F a G, dostáváme následující větu:

J. *Buď H_2 relace z $\mathscr{R}$ která leží [inkrementálně] uvnitř sektoru $\{\alpha + \delta, \beta - \delta\}$, kde $\beta > 0$, $\delta \geqq 0$. Je-li $\alpha > 0$, buď $H_1 \in \mathscr{L}$ taková relace, že $\mathfrak{N}(H_1)$ leží vně kružnice $K_{+\delta^*}$ (viz obr. 5a) a neobepíná její střed. Je-li $\alpha < 0$, buď $H_1 \in \mathscr{L}$ taková relace, že $\mathfrak{N}(H_1)$ leží uvnitř kružnice $K_{-\delta^*}$ (viz obr. 5b). Nechť $\delta + \delta^* > 0$. Potom relace E_1 a E_2 jsou ohraničené [spojité].*

Všimněme si, že věta J připomíná klasické Nyquistovo kriterium, jenže zde místo „kritického bodu" -1 vystupuje kritický kruh $K_{+\delta^*}$ resp. $K_{-\delta^*}$.

Věta J je podobná větě D; čtenář se může snadno přesvědčit, že tam uváděná podmínka $K(t) \in \Phi(\alpha, \beta)$ může být rovněž vyslovena ve tvaru kruhového kriteria (viz nerovnost (ii) v definici $\Phi(\alpha, \beta)$).

Efektivnost kritéria J lze dále zesílit, učiní-li se další předpoklady o charakteru relace $H_1 \in \mathscr{L}$; poučení o tom lze nalézt v práci [9].

Metody, které jsme právě naznačili, lze rozvíjet i dalším směrem; citujme práce [10] a [11], kde jsou stanoveny podmínky ohraničenosti a stability systémů, které obsahují jednu monotonní nelinearitu.

Zmiňme se nyní stručně o některých nedávných výsledcích, publikovaných v pracích [12] a [13]. Uvažujme opět obecnou zpětnovazební soustavu z obr. 1 a příslušné rovnice (1) a (2). Jestliže systém $\mathfrak{X}$ má tu vlastnost, že zpožďuje signály (v jistém zobecněném smyslu), potom operátor přenosu W existuje za velmi slabých předpokladů. Skutečně, platí následující tvrzení: [12]:

K. *Buď F daná množina zobrazení z intervalu $[0, \infty)$ do lineární množiny $\mathfrak{F}$.*

1. *Buď A operátor zobrazující $F \times F$ do F, a nechť $\{A(u, v_1)\}(t) = \{A(u, v_2)\}(t)$ na $[0, \mu)$ jakmile $v_1(t) = v_2(t)$ na $[0, \mu)$ a $u, v_1, c_2 \in F$.*

2. *Nechť existuje pevné číslo $T > 0$ a pevný prvek $a \in F$ tak, že*

(i) $(Xx_1)(t) = (Xx_2)(t)$ *na* $[0, \mu + T)$ *kdykoli* $x_1(t) = x_2(t)$ *na* $[0, \mu)$ *a* $x_1, x_2 \in F$,

(ii) $(Xx)(t) = a(t)$ *na* $[0, T)$ *pro libovolné* $x \in F$.

Potom existuje operátor přenosu W.

Význam podmínek 1. a 2. ve větě K je celkem zřejmý; 1. značí, že operátor A je kausální vzhledem k druhému argumentu, a 2. charakterizuje to, že systém $\mathfrak{X}$ zpožďuje signály. Všimněme si, že známý operátor posuvu P_T, $T > 0$, definovaný vztahem $(P_T x)(t) = x(t - T)$ pro $t \geqq T$ a $(P_T x)(t) = 0$ pro $0 \leqq t < T$, splňuje podmínku 2.

Předpokládejme nadále, že $F^* \subset F$ je Banachův prostor. Potom platí následující tvrzení, navazující na větu K.

L. *Nechť operátory A a X splňují podmínky 1. a 2. věty* K, *a nechť A, B zobrazují $F^* \times F^*$ do F^* a X zobrazuje F^* do sebe. Nechť existují čísla $C_1, C_2 > 0$ tak, že platí*

$$\|A(u, v_1) - A(u, v_2)\| \leqq C_1 \|v_1 - v_2\|$$

a

$$\|Xv_1 - Xv_2\| \leqq C_2 \|v_1 - v_2\|$$

pro všechna $u, v_1, v_2 \in F^*$. Je-li $\tau > 0$, buď

$$\lambda_\tau = \sup_{S_\tau} \frac{\|A(u, v_1) - A(u, v_2)\|}{\|v_1 - v_2\|} \tag{26}$$

a

$$\mu_\tau = \sup_{\tilde{S}_\tau} \frac{\|Xv_1 - Xv_2\|}{\|v_1 - v_2\|},$$

kde

$$S_\tau = \{(u, v_1, v_2) : u, v_1, v_2 \in F^*, v_1 \neq v_2, v_1(t) = v_2(t) \text{ na } [0, \tau)\}$$

a

$$\tilde{S}_\tau = \{(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in F^*, v_1 \neq v_2, v_1(t) = v_2(t) \text{ na } [0, \tau)\} .$$

Jestliže platí $\lim_{\tau \to \infty} \lambda_\tau \cdot \lim_{\tau \to \infty} \mu_\tau < 1$, *potom operátor přenosu W zobrazuje* F^* *do sebe.*

Jestliže mimo to existuje konstanta $C > 0$ *tak, že*

$$\|A(u_1, v) - A(u_2, v)\| \leqq C\|u_1 - u_2\|$$

pro všechna $u_1, u_2, v \in F^*$ *a operátor B je spojitý (v obvyklém smyslu) na* $F^* \times F^*$, *potom W je spojitý na* F^*.

Smysl podmínky pro limity λ_τ a μ_τ je zcela názorný; zřejmě značí to, že zpětnovazební smyčka (tj. cyklus $\Psi \to \mathfrak{A} \to \Phi \to \mathfrak{X} \to \Psi$) tlumí signály pro všechna dosti velká t.

Uvažujme nyní kvasilineární případ zpětnovazebního systému z obr. 1, [13]. Nechť F má stejný význam jako ve větě K a je lineární množinou, nechť $F^* \subset F$ je opět Banachův prostor a nechť S_T, $T \in \Omega = (0, \infty)$ je lineární zobrazení z F do F^*, které kromě shora uvedených požadavků 1., 2. a 3. splňuje ještě podmínky $S_{T_1}S_{T_2} = S_{T_1}$ pro $0 < T_1 \leqq T_2$, a $S_T x = S_T y$ právě když $x(t) = y(t)$ na $[0, T]$.

Potom platí tvrzení

M. *Nechť operátory* A_1, $\tilde{X}$, C_1 *a* C_2 *zobrazují F do sebe, nechť* $\tilde{X}$, C_1 *a* C_2 *jsou kausální,* C_1 *a* C_2 *jsou lineární a* $I - C_1C_2$ *je prostý z F na F, a nechť* $(I - C_1C_2)^{-1}$ *je kausální. Nechť operátory* $\tilde{A}$ *a B zobrazují* $F \times F$ *do F a* $\tilde{A}$ *je kausální vzhledem ke druhému argumentu. Nechť dále pro každé* $T > 0$ *jsou splněny tyto podmínky:*

(i) S_TC_1 *a* S_TC_2 *jsou ohraničené na* F^*,

(ii) *existují čísla* $d_1^T, d_2^T > 0$ *tak, že*

$$\|S_T\{\tilde{A}(u, v_1) - \tilde{A}(u, v_2)\}\| \leqq d_1^T\|S_T(v_1 - v_2)\| \tag{26}$$

a

$$\|S_T(\{\tilde{X}v_1 - \tilde{X}v_2\}\| \leqq d_2^T\|S_T(v_1 - v_2)\| \tag{27}$$

pro všechna $u, v_1, v_2 \in F$,

(iii) $\|S_T(I - C_1C_2)^{-1}\| (\|S_TC_1\| d_2^T + \|S_TC_2\| d_1^T + d_1^Td_2^T) < 1$.

Jsou-li operátory A a X definovány rovnicemi

$$A(u, v) = A_1u + C_1v + \tilde{A}(u, v)$$
$$Xv = C_2v + \tilde{X}v$$

pro všechna $u, v \in F$, *potom operátor přenosu W existuje.*

Nadto platí: Jestliže

(iv) *C_1 a C_2 jsou ohraničené na F^* a $\|S_T(I - C_1C_2)^{-1}\| \leqq \mu$ pro všechna $T > 0$, kde $\mu > 0$ je pevná konstanta,*

(v) *existují pevná čísla d_1, $d_2 > 0$ tak, že (26) a (27) platí pro každé $T > 0$ a $u, v_1, v_2 \in F$,*

(vi) $\mu(\|C_1\| \, d_2 + \|C_2\| \, d_1 + d_1d_2) < 1$,

(vii) *operátory A_1, $\tilde{A}$ a B jsou spojité na F resp. $F \times F$, potom W je spojitý na F.*

Jestliže kromě toho A_1, $\tilde{X}$ zobrazují F^* do sebe a $\tilde{A}$, B zobrazují $F^* \times F^*$ do F^*, potom W zobrazuje F^* do sebe.

Smysl této věty je poměrně názorný. Má-li totiž linearizovaný zpětnovazební systém „dobré vlastnosti", tj. systém popsaný operátory $A'(u, v) = A_1u + C_1v$, $X'v = C_2v$ a $B' = B$, pak, jak ukazují podmínky (iii) a (vi), nejsou-li nelinearity příliš veliké, má dobré vlastnosti i původní nelineární systém.

Pojem stability systému tak, jak jsme ho definovali v úvodu článku, nepředstavuje jediný způsob, jak lze intuitivní představy o stabilitě matematicky interpretovat. Zmiňme se proto aspoň stručně o jiném pojetí stability, o tzv. energetické stabilitě, která byla zavedena a vyšetřována J. Kudrewiczem v pracích [14], [15] a [16].

Nechť tedy F nyní značí množinu všech takových funkcí lokálně integrovatelných s kvadrátem, že existuje $\lim_{T\to\infty} (1/T) \int_0^T |x(t)|^2 \, dt < \infty$. Položíme-li $\|x\| = \{\lim_{T\to\infty} (1/T) \, . \, \int_0^T |x(t)|^2 \, dt\}^{1/2}$ pro každé $x \in F$, pak se lze snadno přesvědčit, že $\|.\|$ je seminormou na F (tj. $\|.\|$ má všechny vlastnosti normy až na to, že z $\|x\| = 0$ obecně neplyne $x = 0$). Interpretujeme-li prvky F jako signály a odezvy, pak číslo $\|x\|$ má význam průměrného výkonu veličiny x v časovém rozmezí $[0, \infty)$. Označme ještě $F_0 = \{x : x \in F, \|x\| = 0\}$.

Předpokládejme nyní, že chování zpětnovazebního systému je popsáno rovnicí

$$x = Gx + z \, , \tag{28}$$

kde operátor G zobrazuje F do sebe, $z \in F$ je signál a $x \in F$ je hledaná odezva. Jestliže pro každé $z \in F_0$ patří příslušné řešení x rovnice (28) opět do F_0, pak zpětnovazební systém se nazývá energeticky stabilní. To tedy znamená, že systém reprodukuje každý signál s nulovým průměrným výkonem jako odezvu s touže vlastností.

Z matematického hlediska má teto přístup tu výhodu, že často umožňuje využít vlastností systému energetického charakteru.

V práci [14] je hlavně vyšetřována rovnice (28) s $G = -LN$, kde L je lineární a N nelineární operátor, které zobrazují F do sebe, tj. rovnice

$$x + LNx = z \, . \tag{29}$$

Abychom mohli uvést hlavní výsledky, zaveďme tato označení:

Řekneme, že operátor A, zobrazující F do sebe, má konečný zisk, existuje-li konstanta $C > 0$ tak, že platí $\|Ax\| \leqq C\|x\|$ pro každé $x \in F$ ($\|.\|$ značí shora zavedenou seminormu); potom klademe

$$|A| = \sup_{x \in F \setminus F_0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} . \tag{30}$$

Je zřejmé, že pro takový operátor pak platí $\|Ax\| \leqq |A| . \|x\|$ pro každé $x \in F$.

Pak platí toto tvrzení:

N. *Buďte L a N operátory, zobrazující F do sebe, a nechť L je lineární. Nechť existuje číslo λ tak, že*

(i) *operátor $I + \lambda L$ je prostým zobrazením z F na F,*

(ii) *operátory $(I + \lambda L)^{-1}$, $(I + \lambda L)^{-1} L$ a $N - \lambda I$ mají konečné zisky,*

(iii) $|(I + \lambda L)^{-1}L| . |N - \lambda L| < 1$.

Potom systém popsaný rovnicí (29) je energeticky stabilní.

Důkaz je velmi jednoduchý; buď $z \in F_0$ a nechť $x \in F$ je nějaké řešení rovnice (29). Píšeme-li tuto rovnici ve tvaru

$$x + \lambda Lx = -L(N - \lambda I) x + z$$

a užijeme-li podmínky (i), máme

$$x = -(I + \lambda L)^{-1} L(N - \lambda I) x + (I + \lambda L)^{-1} z . \tag{31}$$

Odtud plyne pro seminormy podle (ii), že

$$\begin{aligned} \|x\| &\leqq \|(I + \lambda L)^{-1} L(N - \lambda I) x\| + \|(I + \lambda L)^{-1} z\| \leqq \\ &\leqq |(I + \lambda L)^{-1} L| . |N - \lambda I| . \|x\| + |I(+ \lambda L)^{-1}| . \|z\| . \end{aligned} \tag{32}$$

Ježto $\|z\| = 0$, máme z (32) vzhledem k podmínce (iii) ihned $\|x\| \leqq 0$, tj. $\|x\| = 0$ a tedy $x \in F_0$.

Tento výsledek je pak ve [14] aplikován na rovnici

$$x(t) + a f(t, x(t)) + \int_0^t k(t - \tau) f(\tau, x(\tau)) \, d\tau = z(t) , \tag{33}$$

a je dokázána následující věta:

P. *Nechť a je reálné číslo, $f(t, \xi)$ reálná funkce splňující podmínku $m \leqq f(t, \xi)/\xi \leqq M$ pro každé $\xi \neq 0$ a každé $t \geqq 0$ s pevnými m a M, a nechť $k(t)$*

je spojitá funkce splňující nerovnost $|k(t)| \leqq \alpha t^{-\beta}$ *pro každé* $t > 0$, *kde* $\alpha > 0$ *a* $\beta > 1$. *Nechť* $K(s)$ *značí Laplaceův obraz* $k(t)$; *je-li*

$$\inf_{\mathrm{Re}\, s \geqq 0} \left| \frac{1}{K(s)} + \frac{M + m}{2} \right| > \frac{M - m}{2}, \tag{34}$$

potom systém popsaný rovnicí (33) *je energeticky stabilní.*

Je snadné se přesvědčit, že geometricky je podmínka (34) podmínkou kruhového kritéria, tj. požaduje, aby křivka $\{K^{-1}(i\omega): -\infty \leqq \omega \leqq \infty\}$ v komplexní rovině s ležela vně kružnice se středem v bodě $-\frac{1}{2}(M + m)$ a poloměru $\frac{1}{2}(M - m)$. Jde tedy zde o jistou obdobu věty D.

Vlastnosti energetické stability jsou dále sledovány v pracech [15] a [16], kde se využívá té okolnosti, že systém F má některé obdobné vlastnosti jako Hilbertův prostor. V práci [15] jsou stanoveny odhady pro rychlost ubývání odezvy, a práce [16] pak přináší velmi zajímavé výsledky, týkající se vztahů mezi energetickou stabilitou a positivními operátory.

Na závěr článku bychom chtěli zdůraznit tu okolnost, že věty, které jsme zde zavedli, zdaleka nevyčerpávají velké bohatství výsledků v teorii zpětné vazby. Podotkněme, že zcela stranou jsme nechali výsledky, založené na Ljapunovově metodě, nebo na metodě V. M. Popova.

Rovněž tak jsme se nezmínili o problémech citlivosti zpětnovazebních systémů vzhledem k danému parametru, které představují důležitou problematiku v teorii systémů a jsou dnes předmětem značného zájmu.

Nicméně doufáme, že zde naznačený jednotící přístup, užívající abstraktních prostorů, umožní čtenáři, aby si učinil aspoň hrubý obraz o základní problematice tohoto oboru a směrech dnešního výzkumu.

Literatura

[1] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин:* Элементы теории функций и функционального анализа, Изд. Моск. Унuверзитета 1964.

[2] *I. W. Sandberg:* Some results on the theory of physical systems governed by nonlinear functional equations, BSTJ, vol. 44, (1965), str. 871—898.

[3] *I. W. Sandberg:* On the L_2-boundedness of solutions of nonlinear functional equations, BSTJ, vol. 43, (1964), str. 1581—1599.

[4] *I. W. Sandberg:* On the boundedness of solutions of nonlinear integral equations, BSTJ, vol. 44, (1965), str. 439—453.

[5] *I. W. Sandberg:* On the response of nonlinear control systems to periodic input signals, BSTJ, vol. 43, (1964), str. 911—926.

[6] *I. W. Sandberg:* Some stability results related to those of V. M. Popov, BSTJ, vol. 44, (1965), str. 2133—2148.

[7] *I. W. Sandberg:* Conditions for the causality of nonlinear operators defined on a function space, Quarterly Appl. Math., Vol. XXIII (1965), str. 87—91.

[8] *G. Zames:* On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part. I., IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-11, (1966), str. 228—238.
[9] *G. Zames:* On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part II., IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-11, (1966), str. 465—476.
[10] *G. Zames:* Nonlinear time-varying feedback systems-conditions for L_∞-boundedness, Proc. 3rd Ann. Allerton Conf., (1965), str. 460—471.
[11] *G. Zames* and *L. P. Falb*, Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities, Proc. Conf. on Math. System Theory, Lon Angeles, (1967).
[12] *V. Doležal:* On general feedback systems containing delayers, Aplikace matematiky 13 (1968), 489—507.
[13] *V. Doležal:* On general nonlinear and quasi-linear unanticipative feedback systems, Aplikace matematiky 14 (1969), 220—240.
[14] *Я. Кудревич:* Устойчивость нелинейных систем с обратной связью, Автоматика и телемеханика, Том XXV, Но 8, стр. 1145—1155.
[15] *Я. Кудревич:* Быстрота расхождения или затухания колебаний в динамических системах, Бюллетен польской Академии наук, серия тех. наук, том XIII, Но 3, 1965, стр. 7—10.
[16] *Я. Кудревич:* Положительные операторы и условия устойчивости динамических систем, Бюллетен польской Академии наук, серия тех. наук, том XII, Но 12, 1964, стр. 41—44.

Summary

ON NONLINEAR FEEDBACK SYSTEMS

VÁCLAV DOLEŽAL

The paper gives a survey of some recent results on the stability and boundedness of the nonlinear feedback systems of the input-output type attained by the methods of abstract spaces.

Adresa autora: Ing. *Václav Doležal*, DrSc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.