Alexander Ženíšek

Konvergence metody konečných prvků pro okrajové problémy systému eliptických rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 5, 355–377

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103246`

KONVERGENCE METODY KONEČNÝCH PRVKŮ PRO OKRAJOVÉ PROBLÉMY SYSTÉMU ELIPTICKÝCH ROVNIC

Alexander Ženíšek

(Došlo dne 28. března 1968, přepracované dne 6. července 1968)

V roce 1943 navrhl Courant ([1]) přibližnou metodu pro řešení okrajových problémů eliptických rovnic, která je teprve v poslední době podrobena hlubšímu teoretickému zkoumání (viz např. [2], [3]). Jde o variační metodu, ve které se hledá přibližné řešení na třídě spojitých a po částech lineárních funkcí. Praktické užití této metody vyžaduje velmi výkonných samočinných počítačů.

Nezávisle na tom byla v posledních dvanácti letech (počínaje prací [4]) vyvinuta v inženýrských aplikacích mechaniky kontinua velmi úspěšná přibližná metoda, nazývaná obvykle metoda konečných prvků, jejíž podstata je shodná s Courantovou metodou: na jisté třídě spojitých a po částech polynomických funkcí se hledá minimum kvadratického funkcionálu celkové potenciální energie. (Název metoda konečných prvků – the Finite Element Method – vznikl z toho, že v aplikacích této metody se rozkládá dané kontinuum na konečný počet geometricky jednoduchých prvků, na kterých se pomocí polynomických funkcí modelují elastické vlastnosti kontinua.) Ačkoliv o metodě konečných prvků byly napsány desítky prací (téměř vyčerpávající seznam viz [5]), otázkou konvergence této metody se hlouběji zabývá teprve [6].

V této práci dokazuji konvergenci metody konečných prvků v prostoru $[W_2^{(1)}(V)]^m$ pro variační problém, na který vede okrajový problém systému eliptických parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu (1)–(3). ($[W_2^{(1)}(V)]^m = W_2^{(1)}(V) \times \ldots \times W_2^{(1)}(V)$ je kartézský součin m prostorů $W_2^{(1)}(V)$ všech funkcí, které se svými zobecněnými prvními parciálními derivacemi náleží do prostoru $L_2(V)$ všech reálných kvadraticky integrovatelných funkcí na oblasti $V \subset E_2$.) Jako v [2], [3], [6] se zde pracuje s třídou spojitých a po částech lineárních funkcí, okrajové podmínky jsou zde však obecnější a pomocí vět dokázaných v [7] lze dokázat, že uvedené výsledky platí i pro třídu spojitých a po částech polynomických funkcí vyšších stupňů. Řád konvergence je v tomto případě lepší než u funkcí po částech lineárních. Všechny zde uvedené výsledky se dají přenést do trojrozměrného prostoru E_3; to bude však obsahem jiné práce.

I. Nechť V je konečná jednoduše (či vícenásobně) souvislá oblast dvojrozměrného prostoru E_2, jehož body x jsou určeny kartézskými souřadnicemi x_1, x_2, a B její hranice. Uvažujme v oblasti V následující okrajový problém systému m parciálních rovnic 2. řádu pro m funkcí $u_1, \ldots, u_m$:

$$(1) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^{(kl)} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right) + c^{(kl)} u_l = f_k ,$$

$$(2) \qquad [u_k]_{B_1} = F_k ,$$

$$(3) \qquad \left[\sigma u_k + a_{ij}^{(kl)} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \nu_j\right]_{B_2} = g_k ,$$

kde $i, j = 1, 2$ a $k, l = 1, \ldots, m$. (Zde i nadále užíváme pro indexy i, j, k, l zkrácené sumační symboliky: sčítáme podle těch indexů i, j od 1 do 2 resp. k, l od 1 do m, které se vyskytují ve výraze dvakrát. Horní indexy dáváme do závorek, abychom je odlišili od exponentů.) Symboly ν_j značí složky vektoru vnější normály hranice B.

Přitom předpokládáme:

1. Funkce $a_{ij}^{(kl)}$, $(\partial/\partial x_r)\, a_{ij}^{(kl)}$, $c^{(kl)}$, f_k jsou spojité na $\bar{V} = V \cup B$, funkce F_k spojité a ohraničené na B_1, funkce g_k spojité a ohraničené na B_2; $B = B_1 \cup B_2$.

2. Funkce σ je spojitá a ohraničená na B_2 a platí pro ni

$$(4) \qquad [\sigma]_{B_2} \geqq 0 .$$

3. Platí relace symetričnosti

$$(5) \qquad a_{ij}^{(kl)} = a_{ji}^{(kl)} = a_{ij}^{(lk)} , \quad c^{(kl)} = c^{(lk)} .$$

4. Existuje taková konstanta $\mu > 0$ a taková spojitá funkce $c \geqq 0$ na $\bar{V}$, že pro libovolná čísla $t_i^{(k)}$, t_k platí

$$(6) \qquad a_{ij}^{(kl)} t_i^{(k)} t_j^{(l)} \geqq \mu t_i^{(k)} t_i^{(k)} ,$$

$$(7) \qquad c^{(kl)} t_k t_l \geqq c t_k t_k .$$

Přitom v případě $B_1 = \emptyset$, $\sigma \equiv 0$, jestliže neplatí $c^{(kl)} \equiv 0$ $(k, l = 1, \ldots, m)$, předpokládáme, že $c > 0$ na množině $V_1 \subset V$.

Jestliže $B_1 = \emptyset$, $\sigma \equiv 0$, $c^{(kl)} \equiv 0$ $(k, l = 1, \ldots, m)$, potom se problém (1)–(3) redukuje na Neumannův problém. V tomto případě nutnou podmínkou pro existenci řešení je platnost vztahů

$$(8) \qquad \int_V f_k \,\mathrm{d}V + \int_B g_k \,\mathrm{d}B = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) .$$

Jestliže řešení Neumannova problému existuje, je určeno až na aditivní konstantu.

Tuto nejednoznačnost odstraníme požadavkem

$$\int_V u_k \, dV = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) . \tag{9}$$

Systém funkcí $(w_1, \ldots, w_m)$ budeme stručně značit $\boldsymbol{w}$ a nazývat vektorem. Pro normu vektoru $\boldsymbol{w} \in [L_2(V)]^m \doteq L_2(V) \times \ldots \times L_2(V)$ platí

$$\|\boldsymbol{w}\|^2_{[L_2(V)]^m} = \int_V \boldsymbol{w} \, . \, \boldsymbol{w} \, dV = \int_V w_k w_k \, dV = \sum_{k=1}^{m} \|w_k\|^2_{L_2(V)} ,$$

kde tečkou mezi vektory značíme skalární součin.

Operátor $\hat{A}$ homogenního okrajového problému příslušného k (1)–(3) (resp. (1), (3) resp. (1), (3), (9) v případě $B_1 = \emptyset$)

$$\begin{gathered} (\hat{A}\boldsymbol{u})_k \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^{(kl)} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right) + c^{(kl)} u_l = f_k , \\ [u_k]_{B_1} = 0 , \quad \left[\sigma u_k + a_{ij}^{(kl)} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} v_j\right]_{B_2} = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

je positivně definitní. (V případě $B_1 \neq \emptyset$ to snadno dokážeme pomocí vztahu (16) a zobecněné Friedrichsovy nerovnosti – viz [8], str. 203, vztah (2) nebo [11], str. 198. V případě $B_1 = \emptyset$ to dokážeme metodou obdobnou metodě uvedené v [8], §§ 30, 31.)

Protože operátor $\hat{A}$ problému (10) je positivně definitní, můžeme užít postupu uvedeného v [9], § 18 (viz též [11], str. 208) a s užitím předpokladu (5) dokázat, že klasické řešení problému (1)–(3) (pokud existuje) minimalizuje funkcionál

$$\Pi(\boldsymbol{w}) = \tfrac{1}{2}E(\boldsymbol{w}) - \int_V w_k f_k \, dV - \int_{B_2} w_k g_k \, dB \tag{11}$$

na třídě $\mathscr{T}$ všech vektorů $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$, jejichž složky $w_1, \ldots, w_m$ splňují okrajovou podmínku (2). (Je-li $B_1 = \emptyset$ a nejde-li o Neumannův problém, potom $\mathscr{T} = [W_2^{(1)}(V)]^m$; v případě Neumannova problému je $\mathscr{T}$ množina těch vektorů z $[W_2^{(1)}(V)]^m$, které splňují (9).)

Forma E je definována takto:

$$E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_V \left(a_{ij}^{(kl)} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_l}{\partial x_j} + c^{(kl)} v_k w_l\right) dV + \int_{B_2} \sigma v_k w_k \, dB , \tag{12}$$

$$E(\boldsymbol{w}) = E(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) . \tag{13}$$

V dalším budeme ještě potřebovat formy $\mathscr{D}$ a D definované takto:

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_V a_{ij}^{(kl)} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_l}{\partial x_j} \, dV , \quad \mathscr{D}(\boldsymbol{w}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) , \tag{14}$$

$$(15) \qquad D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_V \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V , \qquad D(\boldsymbol{w}) = D(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) .$$

Kvadratická forma $D(\boldsymbol{w})$ je známý Dirichletův integrál, pro který platí v důsledku (6):

$$(16) \qquad \mathscr{D}(\boldsymbol{w}) \geqq \mu \, D(\boldsymbol{w}) .$$

Z (5), (6), (7), (12), (13) plyne, že forma E má vlastnosti:

$$(17) \qquad E(\boldsymbol{w}) \geqq 0 , \quad E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = E(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) ,$$

$$(18) \qquad \alpha \, E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = E(\alpha \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) , \quad E(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = E(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + E(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) ,$$

$$(19) \qquad E(\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) = \alpha^2 \, E(\boldsymbol{v}) + \beta^2 \, E(\boldsymbol{w}) + 2\alpha\beta \, E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) ,$$

kde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ jsou libovolné vektory z $[W_2^{(1)}(V)]^m$ a α, β libovolná reálná čísla. Další vlastnosti formy E jsou uvedeny v lemmatech 1, 2.

Lemma 1. *Nechť vektor $\hat{\boldsymbol{u}}$ minimalizuje funkcionál $\Pi(\boldsymbol{w})$ na třídě $\mathscr{T}$. Je-li $B_1 = \emptyset$, potom pro $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$ platí*

$$(20) \qquad E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}) = \int_V w_k f_k \, \mathrm{d}V + \int_B w_k g_k \, \mathrm{d}B .$$

Nechť v případě $B_1 \neq \emptyset$ jsou složky $\hat{u}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ vektoru $\hat{\boldsymbol{u}}$ spojité na $\bar{V}$ a mají ve V ohraničené a téměř všude spojité parciální derivace druhého řádu a necht V se dá vyjádřit ve tvaru sjednocení konečného počtu oblastí V_r $(r = 1, \ldots, n)$, přičemž každá oblast V_r je hvězdná vzhledem ke každému bodu nějakého kruhu $K_r \subset \subset V_r$[1]*). Potom pro $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$ platí*

$$(21) \qquad E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}) = \int_V w_k f_k \, \mathrm{d}V + \int_{B_2} w_k g_k \, \mathrm{d}B + \Phi(\boldsymbol{w}) ,$$

kde

$$(22) \qquad \Phi(\boldsymbol{w}) = \int_{B_1} w_k a_{ij}^{(kl)} \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_i} \, v_j \, \mathrm{d}B ,$$

takže

$$(23) \qquad |\Phi(\boldsymbol{w})| \leqq C \|\boldsymbol{w}\|_{[L_2(B_1)]^m} ,$$

kde konstanta C nezávisí na vektoru $\boldsymbol{w}$.

---

[1]) Říkáme, že oblast V je hvězdná vzhledem k bodu $x \in V$, jestliže každá polopřímka vycházející z tohoto bodu protne hranici oblasti V pouze v jednom bodě.

Důkaz. Protože $\Pi(\hat{\boldsymbol{u}})$ je minimální na třídě $\mathcal{T}$, platí

$$\delta\,\Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\,\Pi(\hat{\boldsymbol{u}} + \varepsilon\boldsymbol{\eta})\right]_{\varepsilon=0} = 0 \tag{24}$$

pro všechny vektory $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{u}}$, kde $\boldsymbol{v} \in \mathcal{T}$. Z (24) plyne dle vztahů (11) a (19) snadným výpočtem

$$E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta}) = \int_V \eta_k f_k\,\mathrm{d}V + \int_{B_2} \eta_k g_k\,\mathrm{d}B\,. \tag{25}$$

Je-li $B_1 = \emptyset$, potom $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{T}$. V případě, že nenastává situace $c^{(kl)} \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$ (tj. nejde o Neumannův problém), je $\mathcal{T} = [W_2^{(1)}(V)]^m$. Zbývá probrat Neumannův problém. Nechť $\boldsymbol{w}$ je libovolný vektor z $[W_2^{(1)}(V)]^m$. Nechť $\boldsymbol{K} = (K_1, \ldots, K_m)$ je takový konstantní vektor (závislý na $\boldsymbol{w}$), že $\overline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K} \in \mathcal{T}$, tj.

$$\int_V \overline{w}_k\,\mathrm{d}V = \int_V (w_k + K_k)\,\mathrm{d}V = 0 \quad (k = 1, \ldots, m)\,.$$

Potom dle (25) platí ($E = \mathcal{D}$)

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{w}}) = \int_V \overline{w}_k f_k\,\mathrm{d}V + \int_B \overline{w}_k g_k\,\mathrm{d}B\,.$$

Vzhledem k (14) platí

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{w}}) = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w})$$

a z (8) plyne

$$\int_V \overline{w}_k f_k\,\mathrm{d}V + \int_B \overline{w}_k g_k\,\mathrm{d}B = \int_V w_k f_k\,\mathrm{d}V + \int_B w_k g_k\,\mathrm{d}B\,.$$

Z posledních tří vztahů dostáváme

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}) = \int_V w_k f_k\,\mathrm{d}V + \int_B w_k g_k\,\mathrm{d}B\,.$$

Dokážeme (21). Protože $\partial\hat{u}_l/\partial x_i \in W_2^{(1)}(V)$, $\eta_k \in W_2^{(1)}(V)$, můžeme užít lemmatu 1 uvedeného v [8], § 36, podle kterého pro dvě funkce $u \in W_2^{(1)}(V)$, $v \in W_2^{(1)}(V)$ platí (je-li V sjednocením konečného počtu hvězdných oblastí)

$$\int_V u\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V = -\int_V v\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V + \int_B uv\nu_j\,\mathrm{d}B\,.$$

Odtud a z (12) plyne

$$E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta}) = \int_B \eta_k a_{ij}^{(kl)}\,\frac{\partial\hat{u}_l}{\partial x_i}\,\nu_j\,\mathrm{d}B + \int_V \eta_k \hat{f}_k\,\mathrm{d}V + \int_{B_2} \sigma\eta_k\hat{u}_k\,\mathrm{d}B\,, \tag{26}$$

kde jsme pro stručnost položili

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^{(kl)}\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_i}\right) + c^{(kl)}\hat{u} = \hat{f}_k \quad (k = 1, \ldots, m)\,. \tag{27}$$

Protože $[\eta_k]_{B_1} = 0$, dostáváme z (25) a (26)

$$\int_V \eta_k(\hat{f}_k - f_k)\,\mathrm{d}V + \int_{B_2}\eta_k\left(\sigma\hat{u}_k + a_{ij}^{(kl)}\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_i}v_j - g_k\right)\mathrm{d}B = 0\,. \tag{28}$$

Označme symbolem M_0 množinu všech vektorů $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$ spojitých na $\overline{V}$, které nabývají na hranici B nulové hodnoty. Potom je $M_0 \subset \mathscr{T}_0$, kde $\mathscr{T}_0 = \{\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{v} \in \mathscr{T}\}$. Dle (28) platí pro každé $\boldsymbol{\eta} \in M_0$

$$\int_V \eta_k(\hat{f}_k - f_k)\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{29}$$

Nyní užijeme následujícího lemmatu, která se dokáže podobným způsobem jako základní lemma variačního počtu:

Nechť $\int_V \eta f\,\mathrm{d}V = 0$ pro libovolnou funkci $\eta \in W_2^{(1)}(V)$ spojitou na $\overline{V}$, pro kterou $[\eta]_B = 0$, a pevnou funkci f téměř všude spojitou ve V. Potom funkce f je ekvivalentní nule.

Dle předchozích předpokladů jsou funkce $\hat{f}_k - f_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ téměř všude spojité ve V, takže z (29) plyne

$$\hat{f}_k \sim f_k \text{ ve } V \quad (k = 1, \ldots, m)\,. \tag{30}$$

Protože funkce η_k $(k = 1, \ldots, m)$ jsou na B_2 zcela libovolné, plyne z (28) a (30)

$$\sigma\hat{u}_k + a_{ij}^{(kl)}\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_i}v_j \sim g_k \text{ na } B_2 \quad (k = 1, \ldots, m)\,. \tag{31}$$

Stejným způsobem jako jsme upravili $E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta})$ můžeme upravit $E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w})$, kde $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$, na tvar

$$E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}) = \int_V w_k\hat{f}_k\,\mathrm{d}V + \int_{B_2} w_k\left(\sigma\hat{u}_k + a_{ij}^{(kl)}\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_i}v_j\right)\mathrm{d}B + \int_{B_1} w_k a_{ij}^{(kl)}\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_i}v_j\,\mathrm{d}B\,.$$

Odtud a z (30) a (31) plyne (21) a (22). Vztah (23) plyne z toho, že dle Sobolevových vět (viz např. [8], § 22, poznámka k větě 3) funkce z $W_2^{(1)}(V)$ náleží též do $L_2(B_1)$.

Lemma 2. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu* 1. *Potom pro každý vektor* $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$ *platí*

$$\Pi(\boldsymbol{w}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}E(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{w}) + \Phi(\boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{u}})\,, \tag{32}$$

kde funkcionál Φ je dán vztahem (22). Je-li $B_1 = \emptyset$ nebo je-li $\boldsymbol{w}$ přípustný vektor, tj. $\boldsymbol{w} \in \mathscr{T}$, potom se (32) zjednoduší na tvar

$$\Pi(\boldsymbol{w}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}E(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{w}) . \tag{33}$$

Důkaz. Vztah (32) je zobecněním podobného vztahu ze [6]. Dle (11)

$$\Pi(\boldsymbol{w}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}E(\boldsymbol{w}) - \tfrac{1}{2}E(\hat{\boldsymbol{u}}) - J , \tag{34}$$

kde jsme položili

$$J = \int_V (w_k - \hat{u}_k) f_k \,\mathrm{d}V + \int_{B_2} (w_k - \hat{u}_k)\, g_k \,\mathrm{d}B .$$

Pomocí vztahů (18) a (19) upravíme (34) na tvar

$$\Pi(\boldsymbol{w}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}E(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{w}) + E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{u}}) - J .$$

To je však již vztah (32), protože podle (21) je

$$E(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{u}}) = J + \Phi(\boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{u}}) .$$

Vztah (33) plyne z (20) a (22).

II. Nadále se budeme zabývat variačním problémem funkcionálu (11) pouze pro ty oblasti V, jejichž hranice je mnohoúhelník. (Je-li V vícenásobně souvislá, potom i hranice „otvorů" jsou mnohoúhelníky.)

Nechť $\{\mathfrak{M}_1^{(n)}\}$ je posloupnost dělení množiny $\bar{V} = V \cup B$ na uzavřené trojúhelníky, která má tyto vlastnosti:

(A) $\bar{V} = \bigcup_{r=1}^{m_n} T_r^{(n)}$, $\mathfrak{M}_1^{(n)} = \{T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \ldots, T_{m_n}^{(n)}\}$.

(B) Každé dva trojúhelníky z $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jsou buď disjunktní nebo mají společný vrchol nebo mají společnou stranu.

(C) Část B_1 hranice B se dá vyjádřit ve tvaru sjednocení některých stran některých trojúhelníků dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$.

(D) $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$, kde h_n je délka maximální strany v dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$.

(E) $2\Omega_n \leqq \pi - \alpha$, kde $2\Omega_n$ je maximální úhel v dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ a α je pevný úhel, pro který platí $0 < \alpha \leqq 2\pi/3$.

Vrcholy trojúhelníků množiny $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazveme uzlovými body dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$.

Dále definujeme posloupnost $\{\mathfrak{M}_2^{(n)}\}$ dělení množiny $\bar{V}$ na uzavřené trojúhelníky: vlastnosti (A)–(D) zůstávají beze změny, vlastnost (E) nahrazujeme vlastností (E'):

(E') $\vartheta_n \geqslant \alpha > 0$, kde ϑ_n je minimální úhel v dělení $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ a α je pevný úhel.

Uzlovými body dělení $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ nazveme vrcholy trojúhelníků a půlicí body stran trojúhelníků množiny $\mathfrak{M}_2^{(n)}$.

Symbolem $F_{s,k}^{(n)}$ $(s = 1, 2;\ k = 1, \ldots, m)$ budeme značit spojitou funkci, která má na části B_1 hranice B tyto vlastnosti:

1. V každém uzlovém bodě dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$, který leží na B_1, je $F_{s,k}^{(n)} = F_k$, kde F_k je funkce z okrajové podmínky (2).

2. Na každé straně trojúhelníka z $\mathfrak{M}_s^{(n)}$, která leží na B_1, je funkce $F_{s,k}^{(n)}$ polynomem nanejvýš s-tého stupně. (Tento polynom je jednoznačně určen hodnotami funkce F_k v uzlových bodech, které leží na této straně.)

Ke každému dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$ přiřadíme v případě $B_1 \neq \emptyset$ tzv. náhradní okrajové podmínky na B_1:

$$(2_{n,s}) \qquad [w_k]_{B_1} = F_{s,k}^{(n)} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Věta 1. *Nechť $\mathscr{P}_s^{(n)}$ je množina všech spojitých funkcí na $\bar{V}$, které jsou na každém trojúhelníku dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$ $(s = 1, 2;\ n = 1, 2, \ldots)$ polynomy nanejvýš s-tého stupně. Nechť v případě $B_1 \neq \emptyset$ je $\mathscr{P}_{sk}^{(n)}$ množina všech funkcí z $\mathscr{P}_s^{(n)}$, které splňují okrajovou podmínku $(2_{n,s})$ pro k-tou složku $(k = 1, \ldots, m)$. Potom:*

1. *V případě $B_1 \neq \emptyset$ existuje právě jeden vektor $\hat{w}^{(n)} \in [\mathscr{P}_s^{(n)}]_0^m = \mathscr{P}_{s1}^{(n)} \times \ldots \times \mathscr{P}_{sm}^{(n)}$, který minimalizuje funkcionál (11) na $[\mathscr{P}_s^{(n)}]_0^m$.*

2. *V případě $B = B_2$, $c^{(kl)} \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$ existuje právě jeden vektor $\hat{w}^{(n)} \in [\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$, který na této množině minimalizuje funkcionál (11) a splnuje vztah (9).*

3. *V případě $B = B_2$, kdy nenastává situace ad 2., existuje právě jeden vektor $\hat{w}^{(n)} \in [\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$, který na $[\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$ minimalizuje funkcionál (11).*

Důkaz. Větu dokážeme zobecněním postupu naznačeného v [7]. Nechž p je počet uzlových bodů dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$ a q počet uzlových bodů, které neleží na B_1. Očíslujme uzlové body A_r $(r = 1, \ldots, p)$ tak, aby

$$A_r \notin B_1 \quad (r = 1, \ldots, q), \qquad A_t \in B_1 \quad (t = q + 1, \ldots, p).$$

Nechť pro funkce $\varphi_r \in \mathscr{P}_s^{(n)}$ $(r = 1, \ldots, p)$ platí

$$(35) \qquad \varphi_r(A_t) = \delta_{rt} \quad (r, t = 1, \ldots, p),$$

kde δ_{rt} je Kroneckerovo delta. Jestliže $w \in [\mathscr{P}_s^{(n)}]_0^m$, potom

$$(36) \qquad w_k = \sum_{r=1}^{q} \alpha_r^{(k)} \varphi_r + \sum_{t=q+1}^{p} F_k(A_t)\, \varphi_t \quad (k = 1, \ldots, m),$$

kde $\alpha_r^{(k)}$ jsou nějaká reálná čísla. Dosadíme-li (36) do (11), vidíme, že $\Pi(w)$ je na $[\mathscr{P}_s^{(n)}]_0^m$ kvadratickou funkcí mq parametrů $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_q^{(m)}$:

$$(37) \qquad \Pi(w) = \sum_{r,\varrho=1}^{q} \sum_{k,l=1}^{m} b_{r\varrho}^{(kl)} \alpha_r^{(k)} \alpha_\varrho^{(l)} + \sum_{r=1}^{q} \sum_{k=1}^{m} b_r^{(k)} \alpha_r^{(k)} + b_0 .$$

Jestliže $w \in [\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$, potom $q = p$; v (36) odpadá druhý člen, v lineárním členu funkce (37) jsou obecně jiné koeficienty a $b_0 = 0$.

Abychom tvrzení věty dokázali, stačí dokázat, že kvadratická forma v (37) je positivně definitní (potom funkce (37) nabývá minima v jediném bodě $(\hat{\alpha}_1^{(1)}, \ldots, \hat{\alpha}_q^{(m)})$). V případě 1. je snadno vidět, že kvadratická forma v (37) je totožná s kvadratickou formou $E(w)$, jestliže $w \in [\mathscr{P}_s^{(n)}]_h^m$, kde $[\mathscr{P}_s^{(n)}]_h^m$ značí množinu těch vektorů z $[\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$, které splňují na B_1 homogenní okrajovou podmínku. V případě $B_1 \neq \emptyset$ stačí tedy dokázat positivní definitnost formy $E(w)$ na $[\mathscr{P}_s^{(n)}]_h^m$. Dle (17) platí $E(w) \geqq 0$. Nechť $E(w) = 0$. Z (12)–(16) plyne, že $w =$ konst. na každém trojúhelníku z $\mathfrak{M}_s^{(n)}$. Protože w je spojitý vektor na $\bar{V}$ a na B_1 je roven nule, plyne odtud, že $w = \boldsymbol{0}$.

Dále je snadno vidět, že v případě $B = B_2$ $(q = p)$ je kvadratická forma v (37) totožná s kvadratickou formou $E(w)$, jestliže $w \in [\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$. V případě 2. stačí tedy dokázat, že forma $\mathscr{D}(w)$ je positivně definitní na množině všech vektorů w z $[\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$, které splňují vztah (9). Dle (17) platí $\mathscr{D}(w) \geqq 0$. Nechť $\mathscr{D}(w) = 0$. Z (14)–(16) plyne, že $w =$ konst. na každém trojúhelníku z $\mathfrak{M}_s^{(n)}$. Protože w je spojitý vektor na $\bar{V}$, plyne odtud a z (9), že $w = \boldsymbol{0}$.

V případě 3. stačí dokázat, že forma $E(w)$ je positivně definitní na $[\mathscr{P}_s^{(n)}]^m$. Budeme rozlišovat dva případy:

a) $\sigma \not\equiv 0$; v tomto případě $\sigma > 0$ na $B_3 \subset B_2$, kde mes $B_3 > 0$. Nechť $E(w) = 0$; potom jako dříve $w_k = K_k =$ konst.; z $E(w) = 0$ dále plyne, že $\int_{B_2} \sigma w_k w_k \, \mathrm{d}B = \int_{B_3} \sigma \, \mathrm{d}B \sum K_k^2 = 0$; tedy $w = \boldsymbol{0}$.

b) $\sigma \equiv 0$; v tomto případě $c > 0$ ve $V_1 \subset V$, kde mes $V_1 > 0$. Nechť $E(w) = 0$; potom $w_k = K_k$ a $\sum K_k^2 \int_{V_1} c \, \mathrm{d}V \leqq \int_V c^{(kl)} K_k K_l \, \mathrm{d}V = 0$; tedy $w = \boldsymbol{0}$.

Vektor $\hat{w}^{(n)}$ budeme nazývat přibližným řešením variačního problému funkcionálu $\Pi(w)$, které přísluší dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$.

III. V dalším ukážeme, že posloupnost $\{\hat{w}^{(n)}\}$ přibližných řešení konverguje k řešení $\hat{u}$ variačního problému funkcionálu $\Pi(w)$ v normě prostoru $[W_2^{(1)}(V)]^m$ dané vztahem

$$(38) \qquad \|w\|^2_{[W_2^{(1)}(V)]^m} = \int_V w \cdot w \, \mathrm{d}V + D(w) = \sum_{k=1}^m \left[\int_V w_k^2 \, \mathrm{d}V + D(w_k) \right] =$$
$$= \sum_{k=1}^m \left[\int_V w_k^2 \, \mathrm{d}V + \sum_{i=1}^q \int_V \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}V \right] = \sum_{k=1}^m \|w_k\|^2_{W_2^{(1)}(V)} \, .$$

Dokážeme, že řád konvergence v této normě je v případě obecných nehomogenních okrajových podmínek na B_1 $O(h_n^{(s+1)/2})$ a v případě homogenních okrajových podmínek na B_1 či $B_1 = \emptyset$ $O(h_n^s)$.

Lemma 3. *Nechť $u(x_1, x_2)$ je funkce definovaná a spojitá na $\bar{V}$ a nechť má ve V*

ohraničené parciální derivace druhého řádu

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}\right| \leqq M_2 \quad (i, j = 1, 2) . \tag{39}$$

Nechť $v^{(n)}(x_1, x_2)$ je spojitá funkce, která je na každém trojúhelníku z $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ lineární a pro kterou v uzlových bodech $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ platí

$$v^{(n)}(A_r) = u(A_r) \quad (r = 1, \ldots, p) . \tag{40}$$

Potom ve všech vnitřních bodech každého trojúhelníka z $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ platí

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x_i}\right| \leqq 2M_2 h_n \cos^{-1} \Omega_n \quad (i = 1, 2) \tag{41}$$

a na celé množině $\overline{V}$ platí

$$|u - v^{(n)}| \leqq \tfrac{1}{2} M_2 h_n^2 , \tag{42}$$

kde Ω_n je polovina maximálního úhlu v dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ a h_n je délka maximální strany v dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$.

Důkaz. Lemma 3 je zobecněním Syngeova lemmatu ([10], str. 209–213), kde se navíc předpokládá spojitost prvních parciálních derivací funkce u na $\overline{V}$ a odhad pro rozdíl $u - v^{(n)}$ je závislý na $\cos^{-1} \Omega_n$. Důkaz provedeme pomocí metody užívané v [7].

Nejprve dokážeme (42). Zvolme libovolně, ale pevně, v množině $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ uzavřený trojúhelník $\overline{T}$ a označme jeho vrcholy A, B, C. Pro funkci

$$w = u - v^{(n)} \tag{43}$$

platí dle (40)

$$w(A) = w(B) = w(C) = 0 . \tag{44}$$

Trojím užitím Bunjakovského nerovnosti snadno dokážeme pomocí (39), že ve vnitřku T trojúhelníka ABC platí

$$\left|\frac{\partial^2 w(P)}{\partial s \, \partial t}\right| = \left|\frac{\partial^2 u(P)}{\partial s \, \partial t}\right| \leqq 2M_2 , \quad P \in T , \tag{45}$$

kde $\partial/\partial s$ resp. $\partial/\partial t$ je derivace ve směru $\mathbf{s}$ resp. $\mathbf{t}$ a $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ jsou dva libovolné směry.

Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je takové dostatečně malé číslo, že ve vrcholech A', B', C' trojúhelníka $\overline{T}'$, který vepíšeme do ABC a jehož strany jsou rovnoběžné se stranami ABC a vzdálené od nich o δ, platí

$$(46) \qquad |w(A')| \leqq \varepsilon\,, \quad |w(B')| \leqq \varepsilon\,, \quad |w(C')| \leqq \varepsilon\,.$$

To vždy lze, protože funkce $w(x_1, x_2)$ je spojitá na $\bar{V}$ a platí (44).

Platí ([7], lemma 2): Nechť $g(s)$ je funkce reálného parametru $s \in [0, l]$, spojitá na $[0, l]$ a mající ohraničenou derivaci 2. řádu v $(0, l)$,

$$(47) \qquad |g''(s)| \leqq K_2\,, \quad s \in (0, l)\,.$$

Jestliže $g(0) = \eta_1$, $g(l) = \eta_2$, potom

$$(48) \qquad |g(s)| \leqq \max(|\eta_1|, |\eta_2|) + \tfrac{1}{8}K_2 l^2\,, \quad s \in [0, l]\,.$$

Uvažujeme-li funkce $g_1 = [w]_{A'B'}$, $g_2 = [w]_{A'C'}$, $g_3 = [w]_{B'C'}$, vidíme okamžitě podle tohoto lemmatu, že na hranici trojúhelníka $A'B'C'$ platí dle (45) a (46)

$$(49) \qquad |w(P)| \leqq \varepsilon + \tfrac{1}{4}M_2 h'^2\,, \quad P \in \bar{T}' \setminus T'\,,$$

kde h' je délka maximální strany trojúhelníka $A'B'C'$. Nechť P je libovolný vnitřní bod trojúhelníka T' a P' průsečík přímky určené body A', P s úsečkou $B'C'$. Uvažujeme-li funkci $g = [w]_{A'P'}$, vidíme, že dle (45)–(49) platí ($K_2 = 2M_2$, $l \leqq h'$)

$$(50) \qquad |w(P)| \leqq \varepsilon + \tfrac{1}{2}M_2 h'^2\,.$$

Jestliže $\varepsilon \to 0+$, potom

$$(51) \qquad h' \to h\,, \quad \bar{T}' \to \bar{T}\,,$$

kde h je délka maximální strany trojúhelníka ABC. Ze (49), (50) a (51) plyne (42), protože $h \leqq h_n$.

Nerovnost (41) se dokáže tak, že na trojúhelníku $\bar{T}'$ provedeme všechny úvahy z [10], str. 209–213; limitním přechodem pro $\varepsilon \to 0+$ pak dostaneme (41).

Příkladem ukážeme, že závislost odhadu (41) na $\cos^{-1} \Omega_n$ je podstatná – odhad se dá nanejvýš zlepšit nějakou multiplikativní konstantou: Nechť T je rovnoramenný trojúhelník s vrcholy A, B, C, který má základnu delší než ramena:

$$(52) \qquad A = [0, 0]\,, \quad B = [h, 0]\,, \quad C = \left[\frac{h}{2}, y\right], \quad 0 < y < \frac{\sqrt{3}}{2}h\,.$$

Druhé parciální derivace funkce

$$(53) \qquad u(x_1, x_2) = \frac{h^2}{y_0}x_2 + 4x_1(x_1 - h)$$

jsou všude spojité a ohraničené ($M_2 = 8$), takže funkce u splňuje předpoklady lemmatu 3. Protože $u(A) = u(B) = 0$, $u(C) = h^2(y/y_0 - 1)$, platí pro lineární funkci v_T, která má ve vrcholech A, B, C hodnoty rovné hodnotám funkce u,

$$\frac{\partial v_T}{\partial x_2} = \frac{u(C)}{y} = h^2 \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}\right).$$

Označíme-li maximální úhel v trojúhelníku T symbolem 2Ω, potom $y = \frac{1}{2}h \operatorname{cotg} \Omega$, takže v T platí

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v_T}{\partial x_2}\right| = \frac{h^2}{y} = 2h \sin \Omega \cos^{-1} \Omega > h \cos^{-1} \Omega \,. \tag{54}$$

Vidíme, že pro funkci u neplatí na množině trojúhelníků (52), kde $h =$ konst. a y je parametr, odhad

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v_T}{\partial x_i}\right| \leqq 2M_2Kh = 16Kh \,, \tag{55}$$

kde K je konstanta nezávislá na trojúhelníku.

Lemma 4. *Nechť $\boldsymbol{v}^{(n)}$ je ten vektor z $[\mathscr{P}_1^{(n)}]^m$, pro který v uzlových bodech A_r dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ platí*

$$v_k^{(n)}(A_r) = \hat{u}_k(A_r) \quad (k = 1, \ldots, m;\ r = 1, \ldots, p)\,, \tag{56}$$

kde $\hat{\boldsymbol{u}}$ je vektor, který minimalizuje funkcionál $\Pi(\boldsymbol{w})$ na třídě $\mathscr{T}$. Nechť funkce $\hat{u}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ jsou spojité na $\overline{V}$ a mají ve V ohraničené a téměř všude spojité parciální derivace 2. řádu. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(\boldsymbol{v}^{(n)}) = \Pi(\hat{\boldsymbol{u}})\,. \tag{57}$$

Řád konvergence v (57) je $O(h_n^2)$.

Důkaz. Dle (E) je $\cos^{-1} \Omega_n \leqq \cos^{-1} \Omega$, takže dle lemmatu 3 v každém vnitřním bodě každého trojúhelníka z $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ platí

$$\left|\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial x_i}\right| \leqq 2M_2h_n \cos^{-1} \Omega \quad (i = 1, 2) \tag{58}$$

a na celé množině $\overline{V}$ platí

$$|\hat{u}_k - v_k^{(n)}| \leqq \tfrac{1}{2}M_2h_n^2 \,. \tag{59}$$

V případě $B_1 \neq \emptyset$ je dle (32)

$$\Pi(\boldsymbol{v}^{(n)}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}E(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{v}^{(n)}) + \Phi(\boldsymbol{v}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}})\,. \tag{60}$$

Dle (12), (13), (23), (58) a (59) platí

$$E(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{v}^{(n)}) = O(h_n^2), \quad \Phi(\boldsymbol{v}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}) = O(h_n^2). \tag{61}$$

Odtud plyne (57) a tvrzení o řádu konvergence. V případě $B_1 = \emptyset$ plyne lemma 4 z (33) a prvého vztahu (61).

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu 4. Potom pro posloupnost přibližných řešení* $\{\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}\}$ *příslušnou k posloupnosti dělení* $\{\mathfrak{M}_1^{(n)}\}$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) = \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}), \tag{62}$$

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}) = 0. \tag{63}$$

Řád konvergence v (62) *a* (63) *je* $O(h_n^2)$.

Důkaz. V případě $B_1 \neq \emptyset$ je dle (32)

$$\Pi(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}E(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) - \Phi(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}). \tag{64}$$

Dle (59) platí

$$[|\hat{u}_k - \hat{w}_k^{(n)}|]_{B_1} = [|F_k - F_{1,k}^{(n)}|]_{B_1} = [|\hat{u}_k - v_k^{(n)}|]_{B_1} \leqq \tfrac{1}{2}M_2 h_n^2. \tag{65}$$

Odtud a z (23) plyne

$$\Phi(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) = O(h_n^2). \tag{66}$$

Protože $E(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) \geqq 0$, plyne ze vztahu (64)

$$\Pi(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) + \Phi(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) \geqq \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}). \tag{67}$$

Dle věty 1 pro libovolný vektor $\boldsymbol{w} \in [\mathscr{P}_1^{(n)}]_0^m$ platí

$$\Pi(\boldsymbol{w}) \geqq \Pi(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) \tag{68}$$

a protože $\boldsymbol{v}^{(n)} \in [\mathscr{P}_1^{(n)}]_0^m$, dostáváme z nerovností (67), (68) (podobně jako v [6]) nerovnost

$$\Pi(\boldsymbol{v}^{(n)}) + \Phi(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) \geqq \Pi(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) + \Phi(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) \geqq \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}). \tag{69}$$

Z (57), (66) a (69) plyne (62), z (62), (64) a (66) plyne (63).

V případě $B_1 = \emptyset$ je $\Phi \equiv 0$. Nejde-li o Neumannův problém, tj. o případ $c^{(kl)} \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$, zůstává důkaz formálně stejný jako v právě probraném případě $B_1 \neq \emptyset$. Zbývá dokázat (62), (64) v případě Neumannova problému. Pro $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$ platí dle (33) ($E = \mathscr{D}$)

$$\Pi(\boldsymbol{w}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}\mathscr{D}(\boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{u}}), \tag{70}$$

takže označíme-li $\mathscr{T}_n = \{w : w \in [\mathscr{P}_1^{(n)}]^m, \int_V w_k \, dV = 0\}$, platí

$$(71) \qquad \tfrac{1}{2}\mathscr{D}(\hat{w}^{(n)} - \hat{u}) = \Pi(\hat{w}^{(n)}) - \Pi(\hat{u}) = \min_{w \in \mathscr{T}_n} \Pi(w) - \Pi(\hat{u}) =$$
$$= \min_{w \in \mathscr{T}_n} [\Pi(w) - \Pi(\hat{u})] = \tfrac{1}{2} \min_{w \in \mathscr{T}_n} \mathscr{D}(w - \hat{u}) \leqq \tfrac{1}{2}\mathscr{D}(\bar{w} - \hat{u}),$$

kde $\bar{w}$ je libovolný prvek $\mathscr{T}_n$. Nechť K je takový konstantní vektor, že

$$\int_V (v_k^{(n)} + K_k) \, dV = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Potom $\bar{w} = v^{(n)} + K \in \mathscr{T}_n$. Dle (14) a (58) platí

$$(72) \qquad \mathscr{D}(\bar{w} - \hat{u}) = \mathscr{D}(v^{(n)} + K - \hat{u}) = \mathscr{D}(v^{(n)} - \hat{u}) = O(h_n^2).$$

Z (70)–(72) plynou vztahy (62) a (63).

Důsledek. *Ze vztahů* (7), (12)–(16) *a* (63) *plyne okamžitě*

$$(73) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathscr{D}(\hat{w}^{(n)} - \hat{u}) = 0,$$

$$(74) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_V c^{(kl)}(\hat{w}_k^{(n)} - \hat{u}_k)(\hat{w}_l^{(n)} - \hat{u}_l) \, dV = 0,$$

$$(75) \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{B_2} \sigma(\hat{w}_k^{(n)} - \hat{u}_k)^2 \, dB = 0,$$

$$(76) \qquad \lim_{n \to \infty} D(\hat{w}^{(n)} - \hat{u}) = 0.$$

Řád konvergence v těchto vztazích je $O(h_n^2)$.

Věta 3. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu* 4. *Nechť kromě toho v případě* $B_1 \neq \emptyset$, $\sigma \equiv 0$, $c \equiv 0$ *jsou funkce* F_k $(k = 1, \ldots, m)$ *na každé úsečce, ze kterých se skládá* B_1, *spojitě diferencovatelné jako funkce bodu této úsečky a funkce* $\partial \hat{u}_k / \partial x_i$ $(i = 1, 2;\ k = 1, \ldots, m)$ *jsou spojité na* $\bar{V}$. *Potom pro posloupnost přibližných řešení* $\{\hat{w}^{(n)}\}$ *příslušnou k posloupnosti dělení* $\{\mathfrak{M}_1^{(n)}\}$ *platí*

$$(77) \qquad \lim_{n \to \infty} \|\hat{w}^{(n)} - \hat{u}\|_{[W_2^{(1)}(V)]^m} = 0.$$

Řád konvergence v (77) *je* $O(h_n)$.

Důkaz. Vzhledem k (38) a (76) stačí dokázat

$$(78) \qquad \lim_{n \to \infty} \|\hat{w}^{(n)} - \hat{u}\|_{[L_2(V)]^m} = 0,$$

kde řád konvergence je $O(h_n)$. Budeme rozlišovat tři případy:

1. Platí alespoň jedna z relací

a) $\sigma > 0$ na $B_3 \subset B_2$, kde mes $B_3 > 0$,

b) $c > 0$ ve $V_1 \subset V$, kde mes $V_1 > 0$.

a) Nechť $w \in W_2^{(1)}(V)$. Položme

$$l(w) = \int_{B_3} \sqrt{(\sigma)} w \, dB . \tag{79}$$

Dle [8], § 22, věta 3 je funkce w kvadraticky integrovatelná na B, takže dle Bunjakovského nerovnosti

$$[l(w)]^2 \leqq \int_{B_3} \sigma \, dB \int_{B_3} w^2 \, dB \leqq C_1 \int_B w^2 \, dB . \tag{80}$$

Podle [8], § 22, vztah (14) platí

$$\int_B w^2 \, dB \leqq C_2 \left[\int_V w^2 \, dV + D(w) \right] . \tag{81}$$

Z (80) a (81) plyne, že funkcionál $l(w)$ je ohraničen v normě prostoru $W_2^{(1)}(V)$, která vystupuje v (38). Protože $l(1) \neq 0$, můžeme (viz [8], str. 102) zavést ve $W_2^{(1)}(V)$ normu vztahem

$$\|w\|^2_{W_2^{(1)}(V)} = [l(w)]^2 + D(w) . \tag{82}$$

Operátor vložení prostoru $W_2^{(1)}(V)$ do $L_2(V)$ je ohraničený ([8], § 22), takže z (79) a (82) dostáváme pomocí Bunjakovského nerovnosti

$$\|w\|^2_{L_2(V)} \leqq K_1^2 \, \|w\|^2_{W_2^{(1)}(V)} \leqq K_1^2 \left[\text{mes}\, B_3 \int_{B_2} \sigma w^2 \, dB + D(w) \right], \tag{83}$$

kde K_1 je konstanta nezávislá na funkci w. Nechť $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$. Položme v (83) $w = w_k$ a sečtěme od 1 do m. Potom

$$\|\boldsymbol{w}\|^2_{[L_2(V)]^m} = \sum_{k=1}^{m} \|w_k\|^2_{L_2(V)} \leqq K_1^2 \left[\text{mes}\, B_3 \sum_{k=1}^{m} \int_{B_2} \sigma w_k^2 dB + D(\boldsymbol{w}) \right] . \tag{84}$$

Položíme-li v (84) $\boldsymbol{w} = \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}$, plyne odtud dle (75) a (76) vztah (78) i řád konvergence $O(h_n)$.

b) Nechť $w \in W_2^{(1)}(V)$. Položme

$$l(w) = \int_{V_1} \sqrt{(c)} \, w \, dV .$$

Podle Bunjakovského nerovnosti platí

$$[l(w)]^2 \leqq \int_{V_1} c \, dV \int_{V_1} w^2 \, dV \leqq C \left[\int_V w^2 \, dV + D(w) \right] .$$

Protože $\bar{l}(1) \neq 0$, můžeme tedy ve $W_2^{(1)}(V)$ zavést normu vztahem

$$\|w\|^2_{W_2^{(1)}(V)} = [\bar{l}(w)]^2 + D(w)$$

a podobně jako v a) dostaneme pomocí věty o ohraničenosti operátoru vložení $W_2^{(1)}(V)$ do $L_2(V)$, Bunjakovského nerovnosti a vztahu (7), že

$$\|\boldsymbol{w}\|^2_{[L_2(V)]^m} \leqq K_2^2 \left[\operatorname{mes} V_1 \int_V c^{(kl)} w_k w_l \,\mathrm{d}V + D(\boldsymbol{w})\right], \tag{85}$$

kde K_2 je konstanta nezávislá na vektoru $\boldsymbol{w}$. Položíme-li v (85) $\boldsymbol{w} = \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}$, plyne odtud dle (74) a (76) vztah (78) i řád konvergence.

2. Neplatí ani jedna z relací a), b) v 1., platí $B_1 = \emptyset$; jde tedy o Neumannův problém. Dle Poincarého nerovnosti ([8], str. 147)

$$\int_V w^2 \,\mathrm{d}V \leqq C \left\{\left(\int_V w \,\mathrm{d}V\right)^2 + D(w)\right\},$$

kde konstanta C nezávisí na funkci w, platí

$$\|\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}\|^2_{[L_2(V)]^m} \leqq C \left\{\sum_{k=1}^m \left(\int_V (\hat{w}_k^{(n)} - \hat{u}_k) \,\mathrm{d}V\right)^2 + D(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}})\right\}. \tag{86}$$

Protože

$$\int_V \hat{w}_k^{(n)} \,\mathrm{d}V = \int_V \hat{u}_k \,\mathrm{d}V = 0 \quad (k = 1, \ldots, m),$$

je první člen ve složené závorce na pravé straně (86) roven nule. Vztah (78) i řád konvergence nyní plyne z (76).

3. Neplatí ani jedna z relací a), b) v 1.; platí $B_1 \neq \emptyset$. Pro všechny vektory $\boldsymbol{w} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$, které splňují podmínku

$$[w_k]_{B_1} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{87}$$

platí tzv. zobecněná Friedrichsova nerovnost ([11], str. 198)

$$\|\boldsymbol{w}\|^2_{[L_2(V)]^m} \leqq C\, D(\boldsymbol{w}), \tag{88}$$

kde konstanta C nezávisí na vektoru $\boldsymbol{w}$.

Omezme se na případ jednoduše souvislé oblasti V (z textu bude zřejmé, jak postupujeme v případě vícenásobně souvislé oblasti). Nechť hranice B je tvořena r-úhelníkem; jeho vrcholy označme $R_1, R_2, \ldots, R_r$. Vepišme do B r-úhelník B_n o vrcholech $S_1, \ldots, S_r$, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami B ($R_1R_2 \parallel S_1S_2$ atd.) a vzdáleny od nich o h_n. Vnitřek B_n označme V_n a položme $U_n = \bar{V} \setminus V_n$. Platí

$$\operatorname{mes} U_n = O(h_n). \tag{89}$$

Nechť $\{\varphi_k^{(n)}\} \subset W_2^{(1)}(V)$ $(k = 1, \ldots, m)$ jsou posloupnosti spojitých a téměř všude diferencovatelných ve V funkcí, přičemž

$$(90) \qquad [\varphi_k^{(n)}]_{B_1} = F_k - F_{1,k}^{(n)} .$$

Vektor $\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\varphi}^{(n)} \in [W_2^{(1)}(V)]^m$ splňuje (87) a tedy i (88). Je

$$(91) \qquad \|\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\varphi}^{(n)}\|^2_{[L_2(V)]^m} = \|\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}\|^2_{[L_2(V)]^m} + \\ + 2\int_V (\hat{w}_k^{(n)} - \hat{u}_k)\, \varphi_k^{(n)}\, \mathrm{d}V + \int_V \varphi_k^{(n)}\varphi_k^{(n)}\, \mathrm{d}V ,$$

$$(92) \qquad D(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\varphi}^{(n)}) = D(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}) + 2D(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\varphi}^{(n)}) + D(\boldsymbol{\varphi}^{(n)}) .$$

Za chvíli ukážeme, že lze zvolit funkce $\varphi_k^{(n)}$ tak, že jsou ve V_n rovny nule a v U_n pro ně platí

$$(93) \qquad \varphi_k^{(n)} = O(h_n^2) , \quad \frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial x_i} = O(h_n) \quad (i = 1, 2) .$$

S pomocí (89) a (93) snadno stanovíme, že poslední dva členy na pravé straně (91) resp. (92) jsou řádu $O(h_n^3)$ a $O(h_n^5)$ resp. $O(h_n^2)$ a $O(h_n^3)$. Odtud plyne dle (88), (91) a (92)

$$(94) \qquad \|\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}\|^2_{[L_2(V)]^m} + O(h_n^3) \leqq C\, D(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}) + O(h_n^2) .$$

Z (94) plyne dle (76) vztah (78) i řád konvergence. (Myšlenku užít nerovnost (88) prostřednictvím pomocných funkcí jsme převzali z [6]; proti [6] jsme však zlepšili odhad řádu konvergence z $O(h_n^{1/2})$ na $O(h_n)$.)

Zbývá ukázat, že lze zvolit funkce $\varphi_k^{(n)}$ tak, aby platilo (93): Položme $\varphi_k^{(n)} = 0$ na $\bar{V}_n$. Na B_1 je $\varphi_k^{(n)}$ dána vztahem (90), na B_2 klademe $\varphi_k^{(n)} = 0$. Z vlastnosti (C) dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ a definice funkcí $F_{1,k}^{(n)}$ plyne, že $\varphi_k^{(n)}$ je spojitá na B. Uvnitř U_n definujeme $\varphi_k^{(n)}$ takto:

Nechť $\overline{R_q R_{q+1}}$ je libovolná strana B (značíme $R_{r+1} \equiv R_1$). Nechť P je libovolný bod úsečky $\overline{S_q S_{q+1}}$ s vlastností, že kolmice spuštěná z P na přímku $R_q R_{q+1}$ protne úsečku $\overline{R_q R_{q+1}}$ v nějakém bodě $Q = [x_1^Q, x_2^Q]$. Na úsečce $\overline{PQ}$ definujeme $\varphi_k^{(n)}$ jako lineární funkci, jejímž grafem je úsečka $\overline{PT}$, kde $T = [x_1^Q, x_2^Q, \varphi_k^{(n)}(Q)]$.

Nechť R_q je libovolný vrchol B. Jsou dvě možnosti: a) existuje kruh K se středem v R_q, že $\bar{K} \cap \bar{V}$ je konvexní množina; b) takový kruh neexistuje. V případě a) nechť R', R'' jsou paty kolmic spuštěných z S_q na úsečky $\overline{R_{q-1}R_q}$, $\overline{R_q R_{q+1}}$. Nechť $N = [x_1^N, x_2^N]$ je libovolný bod lomené čáry $R'R_qR''$. Na úsečce $\overline{S_q N}$ definujeme $\varphi_k^{(n)}$ jako lineární funkci, jejímž grafem je úsečka $\overline{S_q T}$, kde $T = [x_1^N, x_2^N, \varphi_k^{(n)}(N)]$. V případě b) nechť S', S'' jsou paty kolmic spuštěných z R_q na úsečky $\overline{S_q S_{q-1}}$ a $\overline{S_q S_{q+1}}$. V uzavřeném čtyřúhelníku $R_q S' S_q S''$ definujeme $\varphi_k^{(n)} = 0$.

Takto definovaná funkce $\varphi_k^{(n)}$ je všude na $\bar{V}$ spojitá a $|\varphi_k^{(n)}|$ nabývá maxima na B_1. Odtud a z (65) a (90) plyne první vztah (93).

Nechť $\overline{R_q R_{q+1}}$ je libovolná strana B a $\vec{t}$ jednotkový vektor s ní rovnoběžný. Nechť $A_\varrho, A_\tau \in \overline{R_q R_{q+1}}$ jsou dva sousední uzlové body dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$. Je-li vnitřek úsečky $\overline{A_\varrho A_\tau}$ částí B_2, je derivace $\varphi_k^{(n)}$ na $\overline{A_\varrho A_\tau}$ ve směru $\vec{t}$ rovna nule. Nechť je vnitřek $\overline{A_\varrho A_\tau}$ částí B_1. Potom

$$\left[\frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial t}\right]_{\overline{A_\varrho A_\tau}} = \left[\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} - \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial t}\right]_{\overline{A_\varrho A_\tau}} . \tag{95}$$

Uvnitř trojúhelníka T, jehož dvěma vrcholy jsou body A_ϱ, A_τ, platí nerovnosti (58). Z předpokladu spojitosti funkcí $\partial \hat{u}_k / \partial x_i$ na $\bar{V}$ plyne, že (58) platí i na $\overline{A_\varrho A_\tau}$. Odtud a z (95) plyne

$$\left[\frac{\partial \varphi_k^{(n)}}{\partial t}\right]_{\overline{A_\varrho A_\tau}} = O(h_n) . \tag{96}$$

Tedy derivace funkce $\varphi_k^{(n)}$ ve směru $\vec{t}$ (dále stručně $\dot{\varphi}_k^{(n)}$) je na $\overline{R_q R_{q+1}}$ všude tam, kde existuje, řádu $O(h_n)$. ($\dot{\varphi}_k^{(n)}$ existuje na $\overline{R_q R_{q+1}}$ všude s případnou výjimkou v uzlových dělení $\mathfrak{M}_1^{(n)}$.) Z definice funkce $\varphi_k^{(n)}$ je zřejmé, že i uvnitř čtyřúhelníka $H_q = R_q R_{q+1} S_{q+1} S_q$ je $\dot{\varphi}_k^{(n)}$ řádu $O(h_n)$ a že $\dot{\varphi}_k^{(n)}$ existuje na $\bar{H}_q$ téměř všude.

Derivace funkce $\varphi_k^{(n)}$ v bodech úsečky $\overline{PQ}$ (resp. $\overline{S_q N}$) ve směru $\overrightarrow{PQ}$ (resp. $\overrightarrow{S_q N}$) je také řádu $O(h_n)$. Protože směr $\overrightarrow{PQ}$ (P, $Q \in \bar{H}_q$) je kolmý na směr $\overrightarrow{R_q R_{q+1}}$ a protože $\sphericalangle (S_q^{(n)} R_q R_{q+1}) = \sphericalangle (S_q^{(n+1)} R_q R_{q+1})$ $(q = 1, \ldots, r)$ (horním indexem n vyznačujeme příslušnost vrcholu S_q k r-úhelníku B_n), plyne odtud druhý vztah (93).

Poznámka. Věta 3 zůstává v platnosti, nahradíme-li předpoklad spojitosti $\partial \hat{u}_k / \partial x_i$ na $\bar{V}$ předpokladem, že funkce F_k $(k = 1, \ldots, m)$ mají na každé úsečce, ze kterých se skládá B_1, jako funkce bodu této úsečky ohraničenou druhou derivaci. Protože vzdálenost dvou libovolných sousedních uzlových bodů z $\mathfrak{M}_1^{(n)}$ je $\leqq h_n$, plyne pak (96) z Rolleovy věty.

IV. V [7] jsou dokázány věty podobné lemmatu 3 pro třídy $\mathscr{P}_s^{(n)}$ $(s = 2, 3, 5)$ spojitých funkcí na $\bar{V}$, které jsou po částech polynomy nanejvýš s-tého stupně. Pomocí těchto vět lze dokázat, že výsledky uvedené ve větách 2 a 3 platí i pro tyto třídy funkcí; navíc řád konvergence je lepší. Ukážeme to na případě třídy $\mathscr{P}_2^{(n)}$. Z věty 1 uvedené v [7] ihned plyne:

Lemma 5. *Nechť $u(x_1, x_2)$ je funkce definovaná a spojitá na $\bar{V}$ a nechť má ve V ohraničené parciální derivace 3. řádu. Nechť $v^{(n)}(x_1, x_2)$ je ta funkce z $\mathscr{P}_2^{(n)}$, pro kterou v uzlových bodech dělení $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ platí $u = v^{(n)}$. Potom ve všech vnitřních bodech každého trojúhelníka dělení $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ platí*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x_i}\right| \leqq 2M_3 h_n^2 \sin^{-1} \vartheta_n \quad (i = 1, 2) \tag{97}$$

a na celé množině $\bar{V}$ platí

$$|u - v^{(n)}| \leqq M_3 h_n^3 , \tag{98}$$

kde h_n je délka maximální strany v dělení $\mathfrak{M}_2^{(n)}$, ϑ_n je minimální úhel v dělení $\mathfrak{M}_2^{(n)}$ a M_3 je konstanta ohraničující třetí parciální derivace funkce u.

Příkladem opět ukážeme, že závislost odhadu (97) na tvaru trojúhelníka je podstatná: Nechť $\{T\}$ je množina trojúhelníků s vrcholy

$$P_1 = \left[-\frac{h}{2}, -\frac{y}{2}\right], \quad P_2 = \left[\frac{h}{2}, -\frac{y}{2}\right], \quad P_3 = \left[0, \frac{y}{2}\right], \quad 0 < y < \frac{\sqrt{3}}{2} h ,$$

kde h je pevné číslo a y parametr. Půlicí body stran mají souřadnice

$$Q_1 = \left[0, -\frac{y}{2}\right], \quad Q_2 = \left[\frac{h}{4}, 0\right], \quad Q_3 = \left[-\frac{h}{4}, 0\right].$$

Délka největší strany trojúhelníků z $\{T\}$ je h. Zvolme funkci

$$u(w_1, w_2) = \frac{4h^3}{y_0^2} x_2^2 - \frac{256}{3h} x_1^2 \left(x_1^2 - \frac{h^2}{4}\right) - h^3 ,$$

kde y_0 je pevné číslo. Její interpolační polynom 2. stupně s uzlovými body P_j, Q_j $(j = 1, 2, 3)$ na trojúhelníku $T \in \{T\}$ má tvar

$$v_T(x_1, x_2) = 4h^3 \left(\frac{1}{y_0^2} - \frac{1}{y^2}\right) x_2^2 .$$

Funkce u splnuje všechny předpoklady lemmatu 5 $(M_3 = 1024)$ a na $\bar{T}$ platí

$$\max_{(x_1,x_2)\in T} \left|\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v_T}{\partial x_2}\right| = \frac{8h^3}{y^2} \max_{(x_1,x_2)\in T} |x_2| = \frac{4h^3}{y} = 8h^2 \cos \vartheta \sin^{-1} \vartheta$$

kde ϑ je nejmenší úhel trojúhelníka T. Vidíme, že pro funkci u neplatí na množině $\{T\}$ odhad

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v_T}{\partial x_i}\right| \leqq 2M_3 K h^2 = 2048 K h^2 ,$$

kde K je konstanta nezávislá na trojúhelníku.

Dříve než vyslovíme lemma analogické lemmatu 4, zavedeme jeden pojem: Okrajové podmínky na B_1 nazýváme kvadratickými, jestliže funkce F_k $(k = 1, \ldots, m)$ jsou nanejvýš kvadratickými funkcemi na každé úsečce, ze kterých se skládá B_1.

Lemma 6. *Nechť $\boldsymbol{v}^{(n)}$ je ten vektor z $[\mathscr{P}_2^{(n)}]^m$, pro který v uzlových bodech A_r dělení*

$\mathfrak{M}_2^{(n)}$ *platí*

$$v_k^{(n)}(A_r) = \hat{u}_k(A_r) \quad (k = 1, \dots, m;\ r = 1, \dots, p),$$

kde $\hat{\boldsymbol{u}}$ *je vektor, který minimalizuje funkcionál* $\Pi(\boldsymbol{w})$ *na třídě* $\mathcal{T}$. *Nechť funkce* $\hat{u}_k$ $(k = 1, \dots, m)$ *jsou spojité na* $\bar{V}$ *a mají ve* V *ohraničené parciální derivace* 3. *řádu. Potom*

$$\lim_{n \to \infty} \Pi(\boldsymbol{v}^{(n)}) = \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) . \tag{99}$$

Řád konvergence v (99) *je v případě nekvadratických okrajových podmínek na* B_1 $O(h_n^3)$; *v případě kvadratických okrajových podmínek na* B_1 *či* $B_1 = \emptyset$ *je* $O(h_n^4)$.

Poznámka. Nutnou podmínkou pro to, aby byl splněn předpoklad lemmatu 6 o vektoru $\hat{u}$, je splnění tohoto předpokladu: Nechť funkce F_k $(k = 1, \dots, m)$ jsou na každé úsečce, ze kterých se skládá B_1, spojitě diferencovatelné jako funkce bodu této úsečky. Z jedné ze Sobolevových vět (viz např. [8], § 22, věta 2) totiž plyne, že funkce, která je spojitá na $\bar{V}$ a má ve V ohraničené parciální derivace 3. řádu (a tedy měřitelné), má parciální derivace 1. řádu spojité na $\bar{V}$.

Důkaz lemmatu 6 je velmi podobný důkazu lemmatu 4: V případě nekvadratických okrajových podmínek platí

$$\Pi(\boldsymbol{v}^{(n)}) - \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \tfrac{1}{2}E(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{v}^{(n)}) + \Phi(\boldsymbol{v}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}),$$

kde $\Phi(\boldsymbol{v}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}) \neq 0$. V případě kvadratických podmínek je $\Phi \equiv 0$. Ze vztahů (12), (13) a (23) pomocí lemmatu 5 vzhledem k (E') plyne

$$E(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{v}^{(n)}) = O(h_n^4), \quad \Phi(\boldsymbol{v}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}) = O(h_n^3).$$

Věta 4. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu* 6. *Potom pro posloupnost přibližných řešení* $\{\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}\}$ *příslušnou k posloupnosti dělení* $\{\mathfrak{M}_2^{(n)}\}$ *platí*

$$\lim_{n \to \infty} \Pi(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}) = \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}), \tag{100}$$

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}) = 0 . \tag{101}$$

Řád konvergence v (100) *a* (101) *je v případě nekvadratických okrajových podmínek na* B_1 $O(h_n^3)$; *v případě kvadratických okrajových podmínek na* B_1 *či* $B_1 = \emptyset$ *je* $O(h_n^4)$.

Důkaz věty 4 je formálně stejný jako důkaz věty 2; pouze místo lemmatu 3 resp. 4 zde užíváme lemmatu 5 resp. 6.

Důsledek. *Ze vztahů* (7), (12)–(16) *a* (101) *plynou okamžitě vztahy* (73)–(76). *Řád konvergence je v nich stejný jako ve vztahu* (101).

Věta 5. *Nechť funkce F_k $(k = 1, \ldots, m)$ jsou na každé úsečce, ze kterých se skládá B_1, spojitě diferencovatelné jako funkce bodu této úsečky. Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu 6. Potom pro posloupnost přibližných řešení $\{\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)}\}$ příslušnou k posloupnosti dělení $\{\mathfrak{M}_2^{(n)}\}$ platí*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}} \right\|_{[W_2^{(1)}(V)]^m} = 0 \,. \tag{102}$$

Řád konvergence v (102) je v případě nekvadratických okrajových podmínek na B_1 $O(h_n^{3/2})$; v případě kvadratických okrajových podmínek na B_1 či $B_1 = \emptyset$ je $O(h_n^2)$.

Důkaz je v případě 1. a 2. stejný jako důkaz věty 3; pouze místo důsledku věty 2 se užije důsledku věty 4. V případě 3., jsou-li na B_1 zadány kvadratické okrajové podmínky, splňuje vektor $\hat{\boldsymbol{w}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{u}}$ podmínku (87), takže tvrzení věty plyne z (88) a důsledku věty 4. V případě nekvadratických okrajových podmínek postupujeme v 3. jako v důkazu věty 3; stejným způsobem jako tam lze ukázat, že lze funkce $\varphi_k^{(n)}$ zvolit tak, aby platilo $\varphi_k^{(n)} = O(h_n^3)$, $\partial\varphi_k^{(n)}/\partial x_i = O(h_n^2)$. (Spojistost $\partial \hat{u}_k/\partial x_i$ $(i = 1, 2;$ $k = 1, \ldots, m)$ na $\bar{V}$ je nyní zaručena ohraničeností třetích parciálních derivací funkcí $\hat{u}_k$ ve V — viz poznámku k lemmatu 6.)

V. Na závěr uveďme několik poznámek:

1. Tvrzení o řádu konvergence uvedené na začátku odstavce III, které jsme ověřili v případě $s = 1$ a $s = 2$, platí obecně. Jak plyne z důkazů vět 1 — 5, stačí v případě $s > 2$ dokázat, že na $\bar{V}$ platí

$$\left|u - v_s^{(n)}\right| \leqq K M_{s+1} h_n^{s+1} \tag{103}$$

a že ve všech vnitřních bodech každého trojúhelníka dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$ platí

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v_s^{(n)}}{\partial x_i}\right| \leqq K M_{s+1} h_n^s \sin^{-1} \vartheta_n \quad (i = 1, 2)\,, \tag{104}$$

kde $u(x_1, x_2)$ je funkce spojitá na $\bar{V}$, mající ve V ohraničené parciální derivace $(s + 1)$-ho řádu konstantou M_{s+1}, $v_s^{(n)}(x_1, x_2)$ je funkce spojitá na $\bar{V}$, která je na každém trojúhelníku dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$ interpolačním polynomem s-tého stupně funkce $u(x_1, x_2)$, a K je konstanta nezávislá na dělení $\mathfrak{M}_s^{(n)}$ a na funkci $u(x_1, x_2)$. Vztahy (103), (104) budou dokázány v [14] pro rozsáhlou třídu interpolačních polynomů.

2. Rozšíření získaných výsledků do trojrozměrného prostoru nečiní žádné potíže; stačí dokázat, že na mnohostěnu rozděleném na čtyřstěny platí odhady analogické odhadům (103), (104). To bude opět provedeno v [14].

3. Zde uvažovaný systém (1)—(3) má nejdůležitější aplikace ve statické teorii pružnosti $(c^{(kl)} \equiv 0;\ \sigma \equiv 0;\ B_1 \neq \emptyset)$. Z tohoto rozsáhlého oboru byla u nás metoda konečných prvků aplikována hlavně ve stavebnictví — viz např. [12], [13].

Literatura

[1] *R. Courant*, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 1—23.

[2] *K. O. Friedrichs* and *H. B. Keller*, A Finite Difference Scheme for Generalized Neumann Problems; vydáno v knize J. H. Bramble, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Academic Press, New York and London, 1966.

[3] Л. А. Оганесян, Сходимост вариационно — разностных схем при улучшеной аппроксимации границы, ДАН СССР 170 (1966), 41 — 44.

[4] *M. J. Turner*, *R. W. Clough*, *H. C. Martin* and *L. J. Topp*, Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. Aero. Sci. 23 (1956), 805—823.

[5] *O. C. Zienkiewicz* and *Y. K. Cheung*, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, Mc Graw-Hill, London 1967.

[6] *Pin Tong* and *T. H. H. Pian*, The convergence of finite element method in solving linear elastic problems, Int. J. of Solids and Structures, 3 (1967), No 5, 865—879.

[7] *M. Zlámal*, On the Finite Element Method, Numer. Math. 12 (1968), 394—409.

[8] С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, Москва 1952.

[9] С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической фузике, Москва 1957.

[10] *J. L. Synge*, The Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1957.

[11] С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий, Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, Москва 1965.

[12] *J. Kratochvíl* a *F. Leitner*, Metoda konečných prvků a její aplikace v rovinných úlohách pružnosti. Stavebnícky časopis 16 (1968), 2, 65—82; 4, 201—217.

[13] *A. Ženíšek*, Konvergence posloupnosti přibližných řešení při metodě konečných prvků s trojúhelníkovým tvarem. Stavebnícky časopis 16 (1968), 577—591.

[14] *A. Ženíšek*, Interpolační polynomy na trojúhelníku a čtyřstěnu a metoda konečných prvků (zasláno do Aplikací matematiky).

Summary

THE CONVERGENCE OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE SYSTEM OF ELLIPTIC EQUATIONS

ALEXANDER ŽENÍŠEK

The finite element method is an approximate method of solving variational problems arising from the boundary value problems.

In this paper the variational problem of the functional (11) which arises from the boundary value problem (1)—(3) is studied for domains V with a polygonal boundary B. The sequence $\{\mathfrak{M}_s^{(n)}\}$ of triangulations of the set $\overline{V}$ is defined and it is proved (Theorem 1) that there exists a unique vector $\hat{w}^{(n)}$ minimizing the functional (11) on the set of vectors components of which have the following properties: 1. they

are continuous on $\bar{V}$, 2. they satisfy the condition $w_i = F_i$ at each nodal point of $\mathfrak{M}_s^{(n)}$ lying on B_1, 3. they are polynomials of the s-th degree $(s = 1, 2)$ on each triangle of $\mathfrak{M}_s^{(n)}$.

It is proved (Theorems $2-5$) that in case $h_n \to 0$, $\vartheta_n \geqq \vartheta_0 > 0$ (h_n being the length of the largest side and ϑ_n the smallest angle of all triangles of $\mathfrak{M}_s^{(n)}$) the sequence $\{\hat{w}^{(n)}\}$ converges to the exact solution in the norm (38) of the Sobolev's space $[W_2^{(1)}(V)]^m$. The rate of convergence is $O(h_n^{(s+1)/2})$ in case of inhomogeneous conditions on B_1 and $O(h_n^s)$ in other cases.

Making use of two contraexamples it is proved that the condition $\vartheta_n \geqq \vartheta_0 > 0$ is necessary.

Adresa autora: Dr. *Alexander Ženíšek*, CSc., katedra fysiky FS VUT, Sady Osvobození 4, Brno.