Josef Hojdar

Eigenwertabschätzungen für ein Polynomialproblem

*Aplikace matematiky*, Vol. 14 (1969), No. 2, 120–133

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103215`

# EIGENWERTABSCHÄTZUNGEN FÜR EIN POLYNOMIALPROBLEM

JOSEF HOJDAR

(Eingegangen am 10. Oktober 1967)

**1.** Viele technische Aufgaben führen zum Problem der Auffindung der Nullstellen des Polynoms det $A(\lambda)$. Da ist $A(\lambda)$ eine Matrix, deren Elemente Polynome in $\lambda$ sind. Dieses Problem hängt eng mit Differentialgleichungen zusammen (siehe z.B. [1, 2, 5, 7, 8, 10]).

Definieren wir nun das angedeutete Problem genau. Seien $r + 1$ quadratische Komplexmatrizen $A_0, A_1, \ldots, A_r$ der Ordnung $n$ gegeben ($r \geqq 1$, $A_0$ ist keine Nullmatrix). Die Aufgabe ist, solche komplexe Zahlen $\lambda$ zu finden, daß eine nichttriviale Lösung der Vektorengleichung

$$(\lambda^r A_0 + \lambda^{r-1} A_1 + \ldots + A_r)\, x = o \tag{1}$$

existieren wird.

Wir nennen dieses Problem weiter Polynomialproblem von Eigenwerten, die Zahlen $\lambda$ mit der angeführten Eigenschaft Eigenwerte und die zu ihnen gehörigen Lösungen $x$ der Gleichung (1) Eigenvektoren.

Man kann sehen, daß die Eigenwerte des Polynomialproblems gerade die Lösungen der Gleichung

$$\det(\lambda^r A_0 + \lambda^{r-1} A_1 + \ldots + A_r) = 0 \tag{2}$$

sind. Die Determinante

$$\det(\lambda^r A_0 + \lambda^{r-1} A_1 + \ldots + A_r) \tag{3}$$

stellt ein Polynom in $\lambda$ höchstens des Grades $r \,.\, n$ dar; den Grad $r \,.\, n$ hat das Polynom genau dann, wenn die Matrix $A_0$ nichtsingulär ist.

Wenn wir $r = 1$ und $A_0 = E$ legen, dann stellt das Polynomialproblem ein Eigenwertproblem der Matrix $-A_1$ dar. Wenn man $r = 1$ legt und $A_0$, $A_1$ beliebige Matrizen sind, dann nennt man dieses Problem oft verallgemeinertes Eigenwertproblem.

Diesem Problem widmet man eine große Aufmerksamkeit, und zwar sowohl den numerischen Methoden der Lösung (siehe z.B. [5, 7, 8, 9, 10, 12, 13]), als auch den Eigenwertabschätzungen, wie z.B. aus [3, 6, 7, 11] hervorgeht. HADELER [7] befaßt sich allgemeiner mit der Aufgabe, und zwar mit den Eigenwerten des Operatorpolynoms

(4) $$\boldsymbol{P}(\lambda) = \lambda^r A_0 + \lambda^{r-1} A_1 + \ldots + A_r .$$

Da sind $A_\nu$ beschränkte Operatoren im komplexen Banachraum $\mathsf{B}$. Bei $A_0 = \boldsymbol{E}$ findet man in [7] die Behauptung, daß das Spektrum $\sigma$ des Operators $\boldsymbol{P}(\lambda)$ gleich dem Spektrum eines linearen Operatorpolynoms $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ ist, wo der lineare beschränkte Operator $\boldsymbol{A}$ auf dem Banachraum $\mathsf{B}^r$ durch die Matrixdarstellung

(5) $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} & \ldots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \ldots & & & & & \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \\ -A_r & -A_{r-1} & -A_{r-2} & \ldots & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix}$$

definiert werden kann.

Aus der Form des Operators $A$ ergeben sich folgende Abschätzungen für

(6) $$r = \operatorname*{Max}_{\lambda \epsilon \sigma} |\lambda| .$$

Siehe [7], Satz 3:

(7) $$r \leqq \operatorname{Max} \left[1, \sum_{\nu=1}^{r} \|A_\nu\|\right] ,$$

(8) $$r \leqq \operatorname{Max} \left[\|A_r\|, 1 + \operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq r-1} \|A_\nu\|\right] .$$

Diese Schlußfolgerungen kann man auf das angeführte, durch die Gleichung (1) gegebene Polynomialproblem anwenden. Es ist demnach das Polynomialproblem von Eigenwerten mit der nichtsingulären Matrix $A_0$ im Sinne des gleichen Spektrums mit dem Eigenwertproblem der Matrix $A$ identisch, wenn man $A$ folgenderweise definiert:

(9) $$A = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \\ -A_r & -A_{r-1} & -A_{r-2} & \ldots & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix} .$$

Im Falle der singulären Matrix $A_0$ ist es auch möglich das Polynomialproblem zu „linearisieren". Es ist leicht nachzuweisen, daß das Polynomialproblem (ohne Voraussetzung, daß die Matrix $A_0$ nichtsingulär sein muß) mit folgendem verallgemeinertem Problem im Sinne des gleichen Spektrums identisch ist:

(10) $$(\lambda B_0 + B_1) x = o ,$$

wo die Matrizen $B_0$, $B_1$ folgende Form haben:

(11)
$$B_0 = \begin{bmatrix} -E & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -A_0 \end{bmatrix},$$

(12)
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \\ -A_r & -A_{r-1} & -A_{r-2} & \ldots & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix}.$$

**2.** Zum Eigenwertproblem von Matrizen gibt es sogenannte Gerschgorinabschätzungen. Man kann sie in folgender Form nach [4] ausdrücken:

Sei $A = (a_{ij})$ eine quadratische Komplexmatrix. Dann liegen alle Eigenwerte dieser Matrix im abgeschlossenen Gebiet $D$, welches die Vereinigung der Kreise

(13)
$$|z - a_{ii}| \leqq R_i ,$$

(14)
$$R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ist.

Da werden Abschätzungen für das Polynomialproblem gebracht, welche eine Verallgemeinerung der Gerschgorinabschätzung darstellen.

Sei $\lambda$ der Eigenwert und $x$ der entsprechende Eigenvektor des Polynomialproblems. Dann gilt die Beziehung (1), was bei der Bezeichnung $A_k = ({}_k a_{ij})$ das bedeutet, daß die folgenden Gleichheiten gelten:

(15)
$$\lambda^r \sum_j {}_0a_{ij}x_j + \lambda^{r-1} \sum_j {}_1a_{ij}x_j + \ldots + \sum_j {}_ra_{ij}x_j = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Sei $k$ ein solcher Index $(1 \leqq k \leqq n)$, daß für alle $j = 1, 2, \ldots, n$ die Beziehung

(16)
$$|x_j| \leqq |x_k|$$

gilt.

Dann geht aus der $k$-ten Gleichung des Systems (15) die Gültigkeit der Beziehung

(17)
$$\lambda^r \sum_j {}_0a_{kj}x_j + \lambda^{r-1} \sum_j {}_1a_{kj}x_j + \ldots + \sum_j {}_ra_{kj}x_j = 0$$

hervor.

Da $x_k \neq 0$ nach der Beziehung (16) ist, geht daraus die Gültigkeit der Beziehung

$$(18)\qquad \lambda^r\, {}_0a_{kk} + \lambda^{r-1}\, {}_1a_{kk} + \ldots + {}_ra_{kk} =$$
$$= -\lambda^r \sum_{j \neq k} {}_0a_{kj} \frac{x_j}{x_k} - \lambda^{r-1} \sum_{j \neq k} {}_1a_{kj} \frac{x_j}{x_k} - \ldots - \sum_{j \neq k} {}_ra_{kj} \frac{x_j}{x_k}$$

hervor.

(i) Setzen wir voraus, daß $|\lambda| \leqq \Lambda$ ist, wo $\Lambda$ eine beliebige positive Zahl darstellt. Dann gilt auf Grund der Beziehung (16)

$$(19)\qquad \left|\lambda^r\, {}_0a_{kk} + \lambda^{r-1}\, {}_1a_{kk} + \ldots + {}_ra_{kk}\right| \leqq \Lambda^r \sum_{j \neq k} \left|{}_0a_{kj}\right| + \Lambda^{r-1} \sum_{j \neq k} \left|{}_1a_{kj}\right| + \ldots +$$
$$+ \sum_{j \neq k} \left|{}_ra_{kj}\right| .$$

Bezeichnen wir $M^{(k)}$ die Menge aller $\lambda$, die die Ungleichung (19) erfüllen. Dann sieht man, daß $\lambda$, welches den Eigenwert des Polynomialproblems darstellt und die Bedingung $|\lambda| \leqq \Lambda$ erfüllt, in der Menge $\mathfrak{M}$ liegt, wo

$$(20)\qquad \mathfrak{M} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(M^{(k)} \cap J_\Lambda\right),$$

$$(21)\qquad J_\Lambda = \mathscr{E}(\lambda; |\lambda| \leqq \Lambda)$$

ist.

(ii) Setzen wir voraus, daß $|\lambda| > \Lambda$ ist, wo $\Lambda$ die jeweilige Zahl aus dem Fall (i) vorstellt. Wenn wir

$$(22)\qquad \mu = \lambda^{-1}$$

legen, dann gilt

$$(23)\qquad 0 < |\mu| < \Lambda^{-1} .$$

Betrachten wir nun ein Polynomialproblem mit der Existenz einer nichttrivialen Lösung der Vektorengleichung

$$(24)\qquad \left(\mu^r A_r + \mu^{r-1} A_{r-1} + \ldots + A_0\right) x = o ,$$

wo die Matrizen $A_0, A_1, \ldots, A_r$ die Matrizen des durch die Gleichung (1) gegebenen Polynomialproblems darstellen (siehe [10, 13]).

Wir werden auch das Polynomialproblem, welches durch die Gleichung (1) gegeben ist, als das Polynomialproblem (I) bezeichnen und in gleicher Weise werden wir über das Polynomialproblem (II) sprechen, wenn dieses durch die Gleichung (24) gegeben ist.

Es ist ersichtlich, daß $\mu \neq 0$ gerade dann der Eigenwert des Polynomialproblems (II) ist, wenn $\lambda \neq 0$, mit $\mu$ durch die Beziehung (22) verbunden, den Eigenwert des

Polynomialproblems (I) darstellt. Im Falle (ii) genügt also das Verfahren im Falle (i) mit dem Polynomialproblem (II) und mit der Voraussetzung (23) zu wiederholen.

Definieren wir also folgende Mengen:

$$\tag{25} \begin{aligned} \widetilde{M}^{(k)} = \mathscr{E}(\mu; \left|\mu^r {}_r a_{kk} + \mu^{r-1} {}_{r-1} a_{kk} + \ldots + {}_0 a_{kk}\right| \leqq \\ \leqq \Lambda^{-r} \sum_{j \neq k} \left|{}_r a_{kj}\right| + \Lambda^{-r+1} \sum_{j \neq k} \left|{}_{r-1} a_{kj}\right| + \ldots + \sum_{j \neq k} \left|{}_0 a_{kj}\right|), \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Wenn $\mu$ der Eigenwert des Polynomialproblems (II) ist und (23) gilt, dann liegt $\mu$ in der Menge $\widetilde{\mathfrak{M}}$, wo

$$\tag{26} \widetilde{\mathfrak{M}} = \bigcup_k (\widetilde{M}^{(k)} \cap J_{\Lambda^{-1}})$$

ist.

Das heißt, daß im Falle, wo $\lambda$ der Eigenwert des Polynomialproblems (I) und $|\lambda| > \Lambda$ ist, liegt dieses $\lambda$ in der Menge

$$\tag{27} \overline{\mathfrak{M}} = \bigcup_k (\overline{M}^{(k)} \cap \bar{J}_\Lambda)\,,$$

wo

$$\tag{28} \overline{M}^{(k)} = \mathscr{E}(\lambda; \lambda = \mu^{-1}, \mu \neq 0, \mu \in \widetilde{M}^{(k)})\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\tag{29} \bar{J}_\Lambda = \mathscr{E}(\lambda; |\lambda| > \Lambda)$$

sind.

Daraus ergibt sich also folgender:

**Satz 1.** *Sei das Polynomialproblem* (I) *gegeben und sei $\Lambda$ eine beliebige positive Zahl. Dann liegen alle Eigenwerte dieses Problems in der Menge $\mathfrak{M} \cup \overline{\mathfrak{M}}$, wo die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ durch die Beziehungen* (20) *und* (27) *gegeben sind.*

Es ist demnach ersichtlich, daß die Abschätzung nach Satz 1 keine Voraussetzungen für die Matrizen $A_0, A_1, \ldots, A_r$ erfordert. Die Abschätzung ist aber von der Wahl der Konstanten $\Lambda$ abhängig. Es ist möglich für $\Lambda$ einige Schranken für den Spektralradius $r$, z.B. nach der Beziehung (7) oder (8), zu setzen und diese Kombination zweier Typen von Abschätzungen führt natürlich dazu, daß man die Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ nicht erwägen muß, da in der Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ keine Eigenwerte liegen können, wie aus (27) sofort ersichtlich ist. Trotzdem verliert die Möglichkeit die Konstante $\Lambda$ beliebig zu wählen nicht ihre Begründung, weil man bei verschiedener Wahl von $\Lambda$ auch verschieden „genaue“ Abschätzungen erhält. Eine, in irgendwelchem Sinne optimale Auswahl der Konstante $\Lambda$, wird in dieser Arbeit nicht untersucht.

**Folgerung 1.** *Die Abschätzung nach Satz 1 für $r = 1$, $A_0 = E$, $A_1 = -A$ ist eine Gerschgorinabschätzung oder enthält das Gerschgoringebiet* D.

Die Mengen $M^{(k)}$ nach (19) haben die folgende Form:

$$M^{(k)} = \mathscr{E}\left(\lambda; |\lambda - a_{kk}| \leqq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Aus dieser Beziehung ist ersichtlich, daß die Mengen $M^{(k)}$ gerade die Gerschgorinkreise aus der Beziehung (13) darstellen.

Nach (28) haben die Mengen $\overline{M}^{(k)}$ folgende Form:

$$\overline{M}^{(k)} = \mathscr{E}\left(\lambda; |\lambda + {}_1a_{kk}| \leqq \frac{|\lambda|}{\Lambda} \sum_{j \neq k} |{}_1a_{kj}|\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{31}$$

Da nach (20), (26)

$$\mathfrak{M} \cup \overline{\mathfrak{M}} = \left(\bigcup_k (M^{(k)} \cap J_\Lambda)\right) \cup \left(\bigcup_k (\overline{M}^{(k)} \cap J_\Lambda)\right) \tag{32}$$

ist, sieht man sofort, daß

$$D \subset \mathfrak{M} \cup \overline{\mathfrak{M}} \tag{33}$$

ist.

**Folgerung 2.** Beachten wir nun näher die Form der Menge $M^{(k)}$. Nach der obigen Beziehung (19) ist

$$M^{(k)} = \mathscr{E}\left(\lambda; |\lambda^r\, {}_0a_{kk} + \ldots + {}_ra_{kk}| \leqq \Lambda^r \sum_{j \neq k} |{}_0a_{kj}| + \ldots + \sum_{j \neq k} |{}_ra_{kj}|\right). \tag{34}$$

Der Ausdruck

$$P(\lambda) = \lambda^r\, {}_0a_{kk} + \lambda^{r-1}\, {}_1a_{kk} + \ldots + {}_ra_{kk} \tag{35}$$

stellt ein Polynom eines bestimmten Grades in der Veränderlichen $\lambda$ dar. Trivial ist der Fall, wenn $P(\lambda) = {}_ra_{kk}$ ist. Dann ist entweder $M^{(k)} = \emptyset$ oder $M^{(k)} = K$, wo $K$ die Komplexebene bezeichnet. Sei also $P(\lambda)$ ein Polynom des Grades $l$ in $\lambda$ $(1 \leqq l \leqq r)$. Dann ist

$$P(\lambda) = {}_la_{kk}(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_l), \tag{36}$$

wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ die Nullstellen des Polynoms $P(\lambda)$ sind. Daraus ergibt sich:

$$M^{(k)} = \mathscr{E}\left(\lambda; |\lambda - \lambda_1| \ldots |\lambda - \lambda_l| \leqq K\right), \tag{37}$$

wo

$$K = \frac{1}{|{}_la_{kk}|}\left(\Lambda^r \sum_{j \neq k} |{}_0a_{kj}| + \Lambda^{r-1} \sum_{j \neq k} |{}_1a_{kj}| + \ldots + \sum_{j \neq k} |{}_ra_{kj}|\right) \tag{38}$$

ist.

(i) Sei $\lambda \in M^{(k)}$, dann existiert so ein Index $j$, daß für alle $i$ die Ungleichheit

$$|\lambda - \lambda_j| \leqq |\lambda - \lambda_i| \tag{39}$$

gilt und demnach

$$|\lambda - \lambda_j|^l \leqq K, \tag{40}$$

d.h. $\lambda \in K_j^{(k)}$ ist, wo

$$K_j^{(k)} = \mathscr{E}(\lambda; |\lambda - \lambda_j| \leqq \sqrt[l]{K}) \tag{41}$$

darstellt.

Daraus geht hervor:

$$M^{(k)} \subset N^{(k)}, \tag{42}$$

wo

$$N^{(k)} = \bigcup_j K_j^{(k)} \tag{43}$$

ist.

(ii) Sei $\lambda \in M^{(k)} \cap J_A$, dann gilt

$$|\lambda - \lambda_j| \geqq \operatorname{Max}(0, |\lambda_j| - |\lambda|) \geqq \operatorname{Max}(0, |\lambda_j| - A) = A_j \tag{44}$$

für beliebiges $j$. Definieren wir die Mengen $M_j^{(k)}$:

$$M_j^{(k)} = \mathscr{E}(\lambda; |\lambda - \lambda_j| \prod_{i \neq j} A_i \leqq K), \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{45}$$

Dann gilt:

$$(M^{(k)} \cap J_A) \subset (M_1^{(k)} \cap \ldots \cap M_l^{(k)} \cap J_A). \tag{46}$$

Diese Folgerung ist für die leichtere Feststellung der Form der Menge $\mathfrak{M}$ wichtig. Alles, was in dieser Folgerung angeführt worden ist, kann man analogisch für die Mengen $\overline{M}^{(k)}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ benützen.

**3.** Für die Gerschgorinabschätzung gilt der Satz über die Verteilung der Eigenwerte in bezug zu den einzelnen Kreisen (siehe [4]). Für die Abschätzung nach Satz 1 gilt folgender:

**Satz 2.** *Seien $M^{(k)}$, $\overline{M}^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ Mengen aus dem Satz 1 und sei $\varkappa$ so ein Index $(1 \leqq \varkappa \leqq n)$, daß für alle $k \neq \varkappa$ die Menge*

$$(M^{(k)} \cap J_A) \cup (\overline{M}^{(k)} \cap \bar{J}_A)$$

*mit der Menge*

$$(M^{(\varkappa)} \cap J_A) \cup (\overline{M}^{(\varkappa)} \cap \bar{J}_A)$$

*punktfremd ist. Dann können in der Menge $(M^{(\varkappa)} \cap J_A) \cup (\overline{M}^{(\varkappa)} \cap \bar{J}_A)$ höchstens $r$ Eigenwerte des Polynomialproblems liegen.*

**Folgerung 3.** *Die Menge, die eine Vereinigung von q Mengen des Types*

$$(M^{(k)} \cap J_A) \cup (\bar{M}^{(k)} \cap \bar{J}_A)$$

*darstellt und welche mit den anderen n — q Mengen dieses Types punktfremd ist, enthält höchstens r . q Eigenwerte des Polynomialproblems.*

Beweis. Wenn es den Satz 2 zu beweisen gelingt, dann ist die Folgerung klar. Definieren wir folgende Matrizen ($u$ ist ein reeller Parameter):

$$A_i(u) = \begin{bmatrix} {}_ia_{11} & u \,.\, {}_ia_{12} & \dots & u \,.\, {}_ia_{1n} \\ u \,.\, {}_ia_{21} & {}_ia_{22} & \dots & u \,.\, {}_ia_{2n} \\ u \,.\, {}_ia_{31} & u \,.\, {}_ia_{32} & \dots & u \,.\, {}_ia_{3n} \\ \dots & & & \\ u \,.\, {}_ia_{n1} & u \,.\, {}_ia_{n2} & \dots & {}_ia_{nn} \end{bmatrix} \tag{47}$$

für $i = 0, 1, \dots, r$.

Dann gilt (i) $A_i(1) = A_i$ für alle $i$,

(ii) $A_i(0) = \operatorname{diag}[{}_ia_{11}, \dots, {}_ia_{nn}]$.

Wenn wir das Polynomialproblem mit den Matrizen $A_i(0)$ erwägen, dann sind die Eigenwerte gerade die Nullstellen des Polynoms $D(\lambda)$, wo

$$D(\lambda) = (\lambda^r\, {}_0a_{11} + \dots + {}_ra_{11}) \dots (\lambda^r\, {}_0a_{nn} + \dots + {}_ra_{nn}) \tag{48}$$

ist. Die Nullstellen dieses Polynoms sind aber gerade „Zentren" aller Mengen $M^{(k)}$, $\bar{M}^{(k)}$. Erwägen wir weiter, daß die Determinante

$$\det(\lambda^r A_0(u) + \lambda^{r-1} A_1(u) + \dots + A_r(u)) \tag{49}$$

eine stetige Funktion des Parameters $u$ und der Eigenwert $\lambda$ eine stetige Funktion des $u$ darstellt.

Sei also $\varkappa$ ein Index mit der angeführten Eigenschaft. Wie bereits angeführt wurde, liegen die Nullstellen des Polynoms

$$\lambda^r\, {}_0a_{\varkappa\varkappa} + \lambda^{r-1}\, {}_1a_{\varkappa\varkappa} + \dots + {}_ra_{\varkappa\varkappa} \tag{50}$$

in der Menge $(M^{(\varkappa)} \cap J_A) \cup (\bar{M}^{(\varkappa)} \cap J_A)$. Aus der stetigen Veränderung der Eigenwerten für $u$, welches von 0 bis 1 ansteigt, geht hervor, daß in der Menge $(M^{(\varkappa)} \cap J_A) \cup (\bar{M}^{(\varkappa)} \cap \bar{J}_A)$ nicht mehr als $r$ Eigenwerte des Polynomialproblems liegen können.

**4.** Beispiel. Sei $r = 2$, $n = 2$, $A_0 = E$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\det A(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 19\lambda^2 + 98\lambda - 126\,.$$

Die Annäherungswerte der Eigenwerten $\lambda_i$ und der nach (23) zu ihnen gehörigen Werten $\mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind folgende:

| $i$ | $\lambda_i$ | $\mu_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 1,026 148 | 0,974 517 |
| 2 | −5,053 709 | −0,197 874 |
| 3 | 0,013 778 + $i$ 4,928 943 | 0,000 567 − $i$ 0,202 872 |
| 4 | 0,013 778 − $i$ 4,928 943 | 0,000 567 + $i$ 0,202 872 |

Wenn wir die Abschätzung (7) benützen, dann ist

$$r \leqq \mathrm{Max}\,[1, \|A_1\| + \|A_2\|] \leqq 31\,.$$

Nach der Abschätzung (8) gibt es:

$$r \leqq \mathrm{Max}\,[\|A_2\|, 1 + \|A_1\|] \leqq 26\,.$$

Wir benützen nun die Abschätzung, welche durch Satz 1 gegeben wird. Es gilt:

$$M^{(1)} = \mathscr{E}(\lambda; |\lambda^2 + 25| \leqq \Lambda + 1)\,,$$
$$M^{(2)} = \mathscr{E}(\lambda; |\lambda^2 + 4\lambda - 5| \leqq \Lambda + 1)\,,$$
$$\widetilde{M}^{(1)} = \mathscr{E}(\mu; |25\mu^2 + 1| \leqq \Lambda^{-2} + \Lambda^{-1})\,,$$
$$\widetilde{M}^{(2)} = \mathscr{E}(\mu; |-5\mu^2 + 4\mu + 1| \leqq \Lambda^{-2} + \Lambda^{-1})\,.$$

Wenn wir die Beziehungen (20) und (27) benützen dann gilt

$$\mathfrak{M} = (M^{(1)} \cup M^{(2)}) \cap J_\Lambda\,,$$
$$\overline{\mathfrak{M}} = (\overline{M}^{(1)} \cup \overline{M}^{(2)}) \cap J_\Lambda\,,$$

wo nach (28)

$$\overline{M}^{(1)} = \mathscr{E}(\lambda; \lambda = \mu^{-1}, \mu \neq 0, \mu \in M^{(1)})\,,$$
$$\overline{M}^{(2)} = \mathscr{E}(\lambda; \lambda = \mu^{-1}, \mu \neq 0, \mu \in \widetilde{M}^{(2)})$$

sind.

Wir werden nun die Konstante $\Lambda$ verschieden wählen. Der Anschauung wegen benützen wir nicht die Mengen $M^{(k)}$, $\overline{M}^{(k)}$ selbst, sondern die Kreise $K_j^{(k)}$ und die Mengen $N^{(k)}$ nach Folgerung 2, Teil (i), Beziehungen (41)−(43). Im Falle der Mengen $\overline{M}^{(k)}$ benützen wir die Bezeichnung $\overline{K}_j^{(k)}$, $\overline{N}^{(k)}$ in demselben Sinne.

Auf Bildern wird man die Mengen $K_j^{(k)}$ $(j = 1, 2;\ k = 1, 2)$ nach (41) und die Mengen $\widetilde{K}_j^{(k)}$ $(j = 1, 2;\ k = 1, 2)$, welche in demselben Sinne den Mengen $\widetilde{M}^{(1)}$, $\widetilde{M}^{(2)}$ entsprechen, sehen. Die Mengen, in denen die Eigenwerte $\lambda_i$ oder die Werte $\mu_i = \lambda_i^{-1}$ liegen, sind durch die schraffierten Flächen gegeben.

(i) Wenn $\Lambda = 2$ ist, dann sind die Mengen $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $\widetilde{M}^{(1)}$, $\widetilde{M}^{(2)}$ durch folgende Ungleichungen definiert:

$$M^{(1)}: \quad |\lambda - 5i|\,|\lambda + 5i| \leqq 3$$
$$M^{(2)}: \quad |\lambda + 5|\,|\lambda - 1| \leqq 3$$
$$M^{(1)}: \quad |\mu - 0{,}2i|\,|\mu + 0{,}2i| \leqq 0{,}03$$
$$\widetilde{M}^{(2)}: \quad |\mu - 1|\,|\mu + 0{,}2| \leqq 0{,}15\,.$$

Siehe Abbildungen 1 und 2.

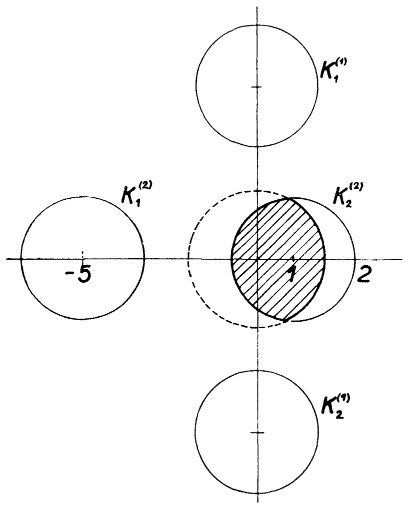


Abb. 1.

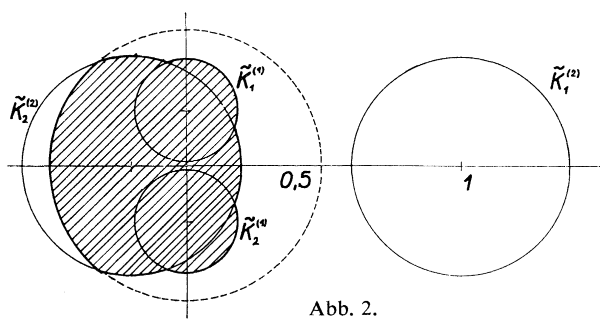


Abb. 2.

(ii) Wenn man $\Lambda = 6$ legt, dann bekommt man folgendes:

$$M^{(1)}: \quad |\lambda - 5i|\,|\lambda + 5i| \leqq 7$$
$$M^{(2)}: \quad |\lambda + 5|\,|\lambda - 1| \leqq 7$$

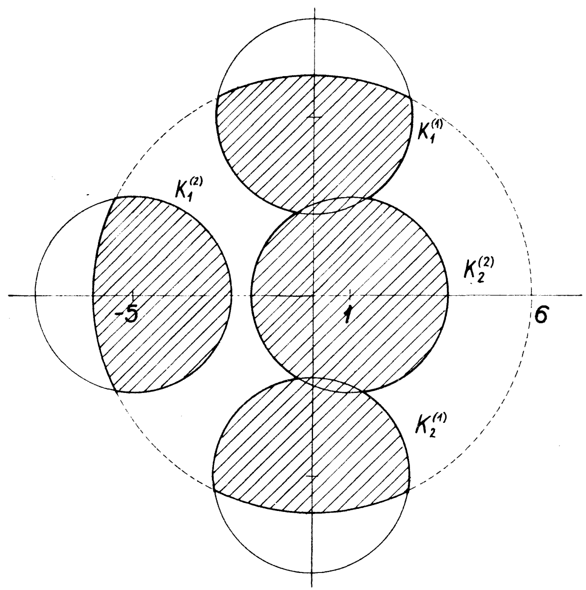


Abb. 3.

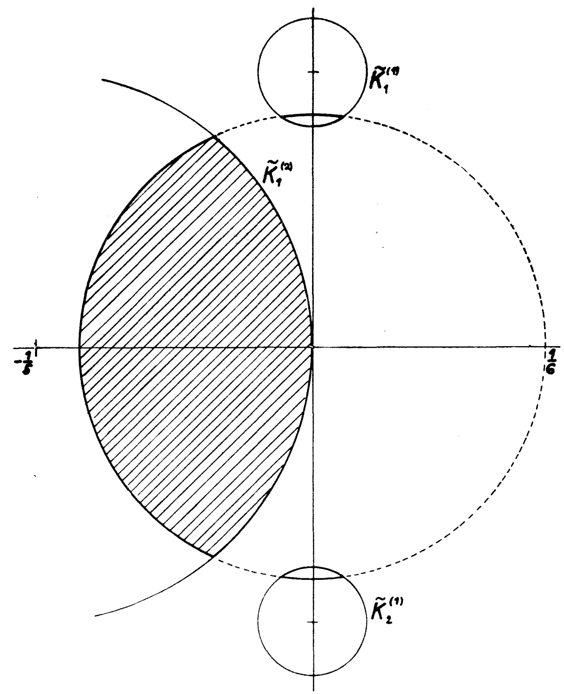


Abb. 4.

$$\widetilde{M}^{(1)}\colon\quad |\mu - 0{,}2i|\,|\mu + 0{,}2i| \leqq 0{,}00777\ldots$$
$$\widetilde{M}^{(2)}\colon\quad |\mu - 1|\,|\mu + 0{,}2| \leqq 0{,}03888\ldots$$

Siehe Abbildungen 3 und 4.

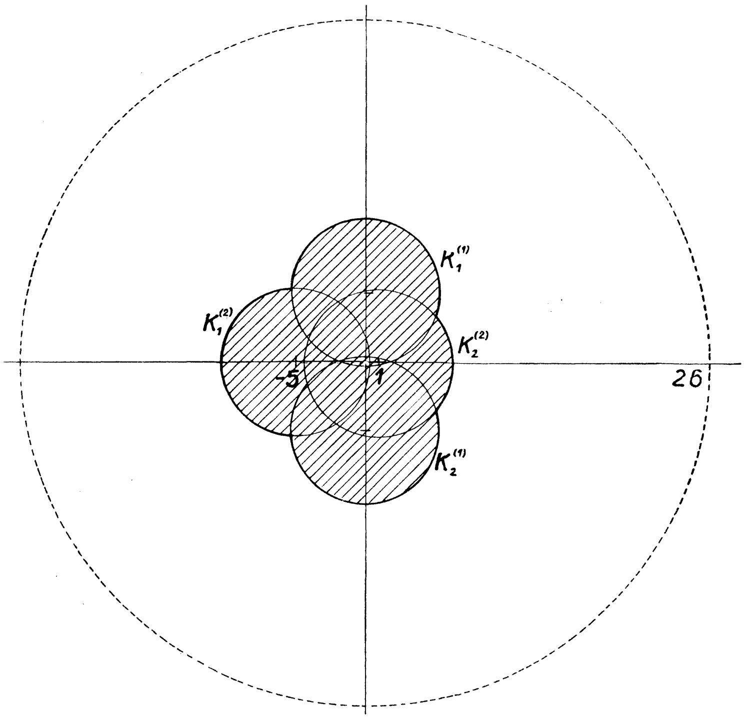


Abb. 5.

(iii) Sei endlich $\Lambda = 26$. Dann haben die Mengen folgende Form:

$$M^{(1)}\colon\quad |\lambda - 5i|\,|\lambda + 5i| \leqq 27$$
$$M^{(2)}\colon\quad |\lambda + 5|\,|\lambda - 1| \leqq 27$$
$$\widetilde{M}^{(1)}\colon\quad |\mu - 0{,}2i|\,|\mu + 0{,}2i| \leqq 0{,}00016$$
$$\widetilde{M}^{(2)}\colon\quad |\mu - 1|\,|\mu + 0{,}2| \leqq 0{,}008$$

Siehe Abbildung 5 (In diesem Fall werden die Mengen $\widetilde{K}_j^{(k)}$ auf dem Bild nicht angeführt, da das in Betracht ihrer „Kleinheit“ unmöglich ist).

*Literatur:*


[1] *Bischopp, R. E. D., Gladwell, G. M. L., Michaelson, S.,* The matrix analysis of vibration, Cambridge 1965, Cambridge Univ. Press.

[2] *Collatz, L.,* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, 2. Aufl., Leipzig 1963, Akad. Verl.-Ges.

[3] *Doležal, V.,* Location of eigenfrequencies of electric networks, Journal Soc. Industr. Appl. Math. *12*, 526—538 (1964).

[4] *Фадеев, П. К., Фадеева, В. Н.,* Вычислительные методы линейной алгебры, Москва 1960, Физматгиз.

[5] *Fiřt, Vl.,* O vlastním kmitání oblouků a patrových rámů v rovině, Aplikace matematiky *8*, 1—29 (1963).

[6] *Hadeler, K. P.,* Über Operatorgleichungen mit nicht linear auftretendem Parameter, Zeitschr. Angew. Mech. Math. *47*, 91—96 (1967).

[7] *Hadeler, K. P.,* Eigenwerte von Operatorpolynomen, Arch. Rat. Mech. Anal. *20*, 72—80 (1965).

[8] *Lancaster, P.,* Inversion of lambda-matrices and application to the theory of linear vibrations, Arch. Rat. Mech. Anal. *6*, 105—114 (1960).

[9] *Müller, P. H.,* Eine neue Methode zur Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben, Math. Zeitschr. *70*, 381—406 (1959).

[10] *Müller, P. H.,* Über eine Klasse von Eigenwertaufgaben mit nichtlinearer Parameterabhängigkeit, Math. Nachr. *12*, 173—181 (1954).

[11] *Müller, P. H.,* Eigenwertabschätzungen für Gleichungen vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)\, x = 0$, Arch. Math. *12*, 307—310 (1961).

[12] *Osborne, M. R., Michaelson, S.,* The numerical solution of eigenvalue problems in which the eigenvalue parameter appears nonlinearly, with an application to differential equations, Computer J. *7*, 66—71 (1964).

[13] *Tarnove, I.,* Determination of eigenvalues of matrices having polynomial elements, Journal Soc. Ind. Appl. Math. *6*, 163—171 (1958).


## Souhrn


# ODHADY VLASTNÍCH ČÍSEL POLYNOMIÁLNÍHO PROBLÉMU

JOSEF HOJDAR

Buď dány čtvercové matice $A_0, A_1, \ldots, A_r$ řádu $n$. Polynomiální problém vlastních čísel je charakterisován rovnicí

$$\left(\lambda^r A_0 + \lambda^{r-1} A_1 + \ldots + A_r\right) x = o \, .$$

Je ukázán tvar matic $B_0$, $B_1$ řádu $r \times n$ takových, že vlastní čísla polynomiálního problému jsou totožná s vlastními čísly problému

$$\left(\lambda B_0 + B_1\right) x = o \, .$$

Vlastní čísla polynomiálního problému leží v množině $\mathfrak{M} \cup \overline{\mathfrak{M}}$ (Věta 1), kde

$$\mathfrak{M} = \bigcup_k \left(M^{(k)} \cap J_A\right), \quad \overline{\mathfrak{M}} = \bigcup_k \left(\overline{M}^{(k)} \cap \bar{J}_A\right),$$

$J_A$ je kruh o poloměru $A$, $\bar{J}_A$ jeho vnějšek. Množiny $M^{(k)}$ jsou tvaru:

$$M^{(k)} = \mathscr{E}\left(\lambda;\ \left|\lambda^r\ {}_0a_{kk} + \lambda^{r-1}\ {}_1a_{kk} + \ldots + {}_ra_{kk}\right| \leqq A^r \sum_{j \neq k} \left|{}_0a_{kj}\right| + \ldots + \sum_{j \neq k} \left|{}_ra_{kj}\right|\right),$$

(podobně $\overline{M}^{(k)}$). Tento odhad je pro případ $r = 1$, $A_0 = E$ Geršgorinovým odhadem pro vlastní čísla matice.

Rozložení vlastních čísel v množině $\mathfrak{M} \cup \overline{\mathfrak{M}}$ je závislé na její struktuře. Je-li jedna z množin $\left(M^{(k)} \cap J_A\right) \cup \left(\overline{M}^{(k)} \cap \bar{J}_A\right)$ disjunktní s ostatními, leží v ní nejvýše $r$ vlastních čísel polynomiálního problému (Věta 2).

*Anschrift des Verfassers: Josef Hojdar,* MÚ ČSAV, Žitná 25, Praha 1.