

Aplikace matematiky

Stanislav Dvořák; Marie Vosiková
Optimalizace v pravděpodobnostních modelech

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 5, 405–412

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103186>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

OPTIMALIZACE V PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH MODELECH

STANISLAV DVOŘÁK, MARIE VOŠIKOVÁ

(Došlo dne 11. května 1967)

1. ÚVOD

V této práci je na dvou příkladech, jejichž formulace vychází z potřeb elektronického průmyslu, ukázána konstrukce pravděpodobnostního modelu zadané situace a použití vhodné optimalizační techniky pro tento model. Jsou studovány následující úlohy:

1. Optimální leptání germaniových a křemíkových desek.
2. Optimální skládání diod do bloků.

Podáme nejprve formulaci těchto úloh:

1. Desky jsou leptány v lázni tak, že na začátku procesu se do lázně vnoří \mathcal{N} desek. Po určité době t_1 se proces leptání přeruší. Vzhledem k různým podmínkám předchozího zpracování a odlišným vlastnostem materiálu neprobíhá proces leptání u všech desek stejně rychle. Proto se desky po přerušení procesu roztřídí na nedoleptané, dobré a přepletané. Poslední dvě skupiny se ovšem oddělí a nedoleptané desky se znovu vloží do lázně.

Leptání se opět zastaví v době $t_2 > t_1$, roztřídění se opakuje atd. Předpokládejme, že je zadána doba T trvání operace a počet n přerušení leptacího procesu v intervalu $[0, T]$. (Čas počítáme od začátku operace.) Jsou-li t_i ($i = 1, 2, \dots, n + 1$),

$$(1) \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = T,$$

okamžiky, kdy se leptání přerušuje a desky třídí dle kvality, je třeba stanovit t_i tak, aby počet získaných dobrých desek byl maximální.

Předpokládáme, že jsou známy pravděpodobnosti $p_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), kde

$p_1(t)$ je pravděpodobnost, že deska je v čase t nedoleptaná,

$p_2(t)$ je pravděpodobnost, že deska je v čase t dobrá,

$p_3(t)$ je pravděpodobnost, že deska je v čase t přepletaná.

Pravděpodobnost $p_i(t)$ se aproximuje četností $\mathcal{N}_i(t)/\mathcal{N}$, kde $\mathcal{N}_1(t)$, $\mathcal{N}_2(t)$, $\mathcal{N}_3(t)$ značí pořadě počet nedoleptaných, dobrých a přeleptaných desek v čase t ze souboru \mathcal{N} desek ($\mathcal{N} \gg 1$).

2. Diody se skládají do bloků tak, aby závěrné napětí bloku, které je součtem závěrných napětí jednotlivých diod v bloku, bylo aspoň rovné zadané hodnotě. Protože závěrná napětí diod se značně liší, rozměří se diody z daného souboru \mathcal{N} kusů předem dle tohoto parametru do $n + 1$ skupin. Nechť závěrná napětí jsou rozložena v intervalu $[U_0, U_{n+1}]$ a intervaly závěrného napětí při rozměřování jsou

$$[U_0, U_1), [U_1, U_2), \dots, [U_n, U_{n+1}],$$

kde $U_0 = 0$. Je-li U závěrné napětí diody a $U \in [U_i, U_{i+1})$, ocní se toto napětí při skládání jako U_i . Tím na této diodě vzniká ztráta, rovná ve voltech $U - U_i$. Je-li dán počet intervalů rozměřování ($n + 1$), je třeba stanovit jejich hranice U_i ($1 \leq i \leq n$) tak, aby se ztráty na závěrném napětí při tomto postupu minimalizovaly.

Předpokládáme, že je známa hustota pravděpodobnosti $\varphi(U)$ toho, že závěrné napětí diody je v intervalu $(U, U + \delta U)$.

2. OPTIMALIZACE PROCESU LEPTÁNÍ

Nechť tedy $p_1(t)$ ($p_2(t)$, $p_3(t)$) značí pravděpodobnost toho, že deska (dále užívané i termínu vzorek) je nedoleptaná (dobrá, přeleptaná) v čase t . V soulase s terminologií pravděpodobnostních procesů řekneme, že vzorek je ve stavu 1 (2, 3), je-li nedoleptaný (dobrý, přeleptaný).

Zřejmě platí $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$. Očekávaný počet dobrých vzorků, získaných při prvním přerušení, je $\mathcal{N} p_2(t_1)$. Přerušení v t_{i+1} dá jako dobré ty kusy, které byly v t_i nedoleptané (jinak by byly v t_i vytříděny) a v době t_{i+1} již byly dobré. Nechť $p(t, t')$ je pravděpodobnost, že vzorek je v čase t dobrý a v t' nedoleptaný. Očekávaný výnos procesu je pak

$$\mathcal{N} \sum_{i=0}^n p(t_{i+1}, t_i),$$

kde $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$ a kde klademe $p(t_1, 0) = p_2(t_1)$. Poslední rovnosti, která vyplývá z fyzikální interpretace, si ještě všimneme.

Označme pro $k \leq n$

$$(2) \quad W(t_1, \dots, t_{k+1}) = \sum_{i=0}^k p(t_{i+1}, t_i)$$

očekávaný relativní výnos k -stupňového procesu (tj. procesu s k přerušeními v okamžicích t_1, \dots, t_k) s ukončením v t_{k+1} . K optimalizaci celého n -stupňového procesu je třeba stanovit maximum součtu $W(t_1, \dots, t_n, T)$. Nechť

$$W_k(t) = \max_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} W(t_1, \dots, t_k, t)$$

je maximální očekávaný relativní výnos k -stupňového procesu s ukončením v čase t . Pak

$$W_n(T) = \max_{0 < t_1 < \dots < t_n < T} \{W(t_1, \dots, t_n) + p(T, t_n)\} = \max_{0 < t_n < T} \left\{ \max_{0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n} W(t_1, \dots, t_n) + p(T, t_n) \right\} = \max_{0 < t_n < T} \{W_{n-1}(t_n) + p(T, t_n)\}$$

užitím tzv. BELLMANOVA principu optimalizace mnohastupňových procesů ([1], [2]). Analogické rekurentní vztahy platí pro $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$.

Tím je problém převeden na úlohu dynamického programování a k jeho řešení lze použít numerických postupů vyvinutých pro tuto metodu ([1], [2]). Ve vztahu

$$W_k(t) = \max_{0 < t' < t} \{W_{k-1}(t') + p(t, t')\}$$

(kde $k = 1, 2, \dots, n, 0 \leq t \leq T$ při každém k a $W_0(t) = 0$ v $[0, T]$) je ovšem třeba znát pravděpodobnost $p(t, t')$, kterou není možné experimentálně stanovit s potřebnou obecností a přesností.

Tuto pravděpodobnost určíme ale obecně pomocí $p_i(t)$. Definujeme nejprve pravděpodobnosti přechodů mezi stavy: Nechť pro $\delta t \rightarrow 0$, $f_{ij}(t) \delta t + o(\delta t)$ je pravděpodobnost, že vzorek je v čase $t + \delta t$ ve stavu j , když v čase t byl ve stavu i . $f_{ij}(t)$ se též nazývá intenzita přechodu. Ve studovaném případě speciálně

$f_{12}(t) \delta t$ je pravděpodobnost přechodu $1 \rightarrow 2$, tj. pravděpodobnost, že vzorek je v čase $t + \delta t$ dobrý, když v čase t byl nedoleptaný;

$f_{23}(t) \delta t$ je pravděpodobnost přechodu $2 \rightarrow 3$, tj. pravděpodobnost, že vzorek je v čase $t + \delta t$ přeleptaný, když v čase t byl dobrý;

$f_{13}(t) \delta t$ je řádu $o(\delta t)$

a intensity $f_{ij}(t)$ s $i > j$ jsou nulové. Přechody mezi stavy popisují tedy rovnice

$$\begin{aligned} p_1(t + \delta t) &= p_1(t) - p_1(t) f_{12}(t) \delta t + o(\delta t) \\ p_2(t + \delta t) &= p_2(t) + p_1(t) f_{12}(t) \delta t - p_2(t) f_{23}(t) \delta t + o(\delta t) \\ p_3(t + \delta t) &= p_3(t) + p_2(t) f_{23}(t) \delta t + o(\delta t). \end{aligned}$$

V limitě $\delta t \rightarrow 0$ dostáváme

$$(3) \quad \begin{aligned} p'_1(t) &= -p_1(t) f_{12}(t) \\ p'_2(t) &= p_1(t) f_{12}(t) - p_2(t) f_{23}(t) \\ p'_3(t) &= p_2(t) f_{23}(t). \end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou speciálním případem systému $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) \mathbf{F}$, popisujícího spojité MARKOVŮV proces s diskretními stavy. Proti obvykle studovanému případu – totiž určení $\mathbf{p}(t)$ – je zde určitý rozdíl, neboť právě $\mathbf{p}(t)$ známe a je třeba určit intenzity přechodů. Pro systém (3) je to ovšem triviální a máme

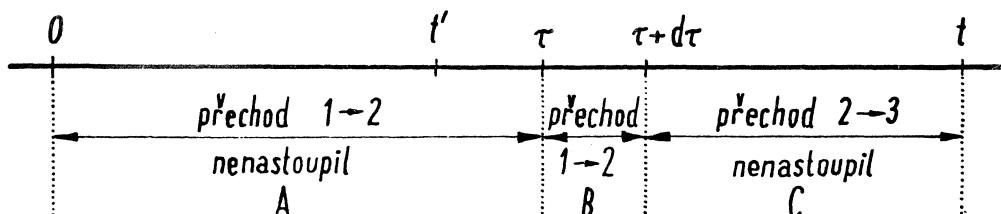
$$(4) \quad f_{12}(t) = -\frac{p'_1(t)}{p_1(t)}, \quad f_{23}(t) = \frac{p'_3(t)}{p_2(t)} = -\frac{p'_1(t) + p'_2(t)}{p_2(t)}.$$

Tím máme zatím určeny intensity přechodů. Od těchto intensit (tj. pravděpodobností přechodů v intervalu délky δt) potřebujeme přejít k pravděpodobnostem v konečných intervalech.

Tento přechod řeší následující tvrzení ([3]): Je-li $f(t) \delta t + o(\delta t)$ pravděpodobnost nastoupení jevu v intervalu $(t, t + \delta t)$ pro $\delta t \rightarrow 0$, pak pravděpodobnost, že jev nenastoupí v celém intervalu $[t', t)$, je dána výrazem

$$(5) \quad \exp\left(-\int_{t'}^t f(\sigma) d\sigma\right).$$

Pomocí (5) lze pravděpodobnost $p(t, t')$ najít snadno; $p(t, t')$ je pravděpodobnost, že vzorek je nedoleptaný v čase t' a dobrý v čase t ($t > t'$). Je-li $(\tau, \tau + d\tau)$ interval přechodu $1 \rightarrow 2$, kde $\tau \in [t', t)$, lze časový sled stavů vzorku znázornit takto



Obr. A.

a v označení dle nákresu má průnik nezávislých jevů A, B, C pravděpodobnost

$$(6) \quad \exp\left(-\int_0^{\tau} f_{12}(\sigma) d\sigma\right) f_{12}(\tau) d\tau \exp\left(-\int_{\tau}^t f_{23}(\sigma) d\sigma\right) + o(d\tau)$$

s užitím (5). Protože τ je libovolné číslo z intervalu $[t', t)$, dostaneme $p(t, t')$ integrací (6) pro $\tau \in [t', t)$; tj.

$$(7) \quad p(t, t') = \int_{t'}^t \exp\left(-\int_0^{\tau} f_{12}(\sigma) d\sigma\right) f_{12}(\tau) \exp\left(-\int_{\tau}^t f_{23}(\sigma) d\sigma\right) d\tau.$$

Do (7) zavedeme známé pravděpodobnosti $p_i(t)$ a jejich derivace místo intensit. Je předně

$$(8) \quad p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = p_3(0) = 0,$$

takže z první rovnice systému (3) dostaneme

$$p_1(t) = \exp\left(-\int_0^t f_{12}(\sigma) d\sigma\right).$$

Dosazením $p_1(t)$ do druhé rovnice systému a řešením vzniklé lineární diferenciální rovnice 1. řádu pro $p_2(t)$ s počáteční podmínkou (8) je po úpravě

$$(9) \quad p_2(t) = \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau f_{12}(\sigma) d\sigma\right) f_{12}(\tau) \exp\left(-\int_\tau^t f_{23}(\sigma) d\sigma\right) d\tau ;$$

$p_2(t)$ lze obdržet ovšem i pomocí (5) analogicky jako (7). Porovnáním (7) a (9) najdeme

$$(10) \quad p(t, t') = p_2(t) - p_2(t') \exp\left(-\int_{t'}^t f_{23}(\sigma) d\sigma\right)$$

a tedy vzhledem ke (4)

$$(11) \quad p(t, t') = p_2(t) \left[1 - \exp\left(\int_{t'}^t \frac{p_1'(\sigma)}{p_2(\sigma)} d\sigma\right) \right],$$

což je hledané vyjádření. $p(t, t')$ má tyto dvě vlastnosti:

1. $p(t, t) = 0$, což je zřejmé např. z (11).
2. $p(t, 0) = p_2(t)$, což je patrné z (10), vzhledem k počátečním podmínkám (8).

Tím je oprávněno označení použité v předchozím.

Vztahem (11) a rekurentní rovnicí pro $W_k(t)$ je úloha obecně řešena. Pro numerické řešení stačí použít standartních postupů dynamického programování, jak bylo uvedeno.

Funkci modelu ukážeme ještě na případě, kdy obráceně předpokládáme, že $p_i(t)$ jsou takové funkce, že intensity přechodů jsou konstantní.

Příklad: Řešením systému (3) s konstantními intensitami $f_{12} \neq f_{23}$ vzhledem k počátečním podmínkám (8) dostaneme

$$p_1(t) = e^{-f_{12}t},$$

takže $p_2(t)$ splňuje rovnici

$$p_2'(t) = -p_2(t)f_{23} + f_{12}e^{-f_{12}t},$$

odkud

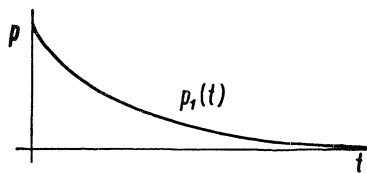
$$p_2(t) = \frac{f_{12}}{f_{23} - f_{12}} (e^{-f_{12}t} - e^{-f_{23}t}).$$

Z podmínky $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$ plyne pak

$$p_3(t) = 1 - \frac{f_{23}}{f_{23} - f_{12}} e^{-f_{12}t} + \frac{f_{12}}{f_{23} - f_{12}} e^{-f_{23}t}.$$

Pomocí (10) je konečně

$$p(t, t') = p_2(t) - p_2(t') e^{-f_{23}(t-t')} = \frac{f_{12}}{f_{23} - f_{12}} e^{-f_{12}t'} [e^{-f_{12}(t-t')} - e^{-f_{23}(t-t')}],$$



tj.

$$p(t, t') = e^{-f_{12}t'} p_2(t - t').$$

Všimněme si, že pro zmenšování intervalů leptání ($\delta t \rightarrow 0$) je

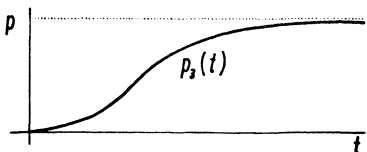
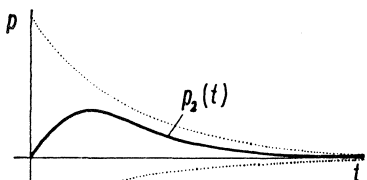
$$p(t + \delta t, t) = f_{12} e^{-f_{12}t} \delta t + o(\delta t)$$

a limitní očekávaný výnos pro celkovou dobu leptání $T \rightarrow \infty$ a $\delta t \rightarrow 0$ má hodnotu

$$\mathcal{N} f_{12} \int_0^{\infty} e^{-f_{12}t} dt = \mathcal{N},$$

což je ve shodě s fyzikální interpretací.

Průběh křivek $p_i(t)$ je znázorněn na obr. 1.



Obr. 1.

Průběhy pravděpodobností $p_i(t)$ pro konstantní intenzity přechodu (t – čas, p – pravděpodobnost)

OPTIMÁLNÍ SKLÁDÁNÍ DIOD DO BLOKŮ

Uvažujme soubor \mathcal{N} diod ($\mathcal{N} \gg 1$). Nechť interval $I = [U_0, U_{n+1}]$ je rozdělen dělicími body U_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Pak očekávaná ztráta na závěrném napětí ve voltech u diod z intervalu $[U_i, U_{i+1}]$ je

$$\delta_{i+1} = \mathcal{N} \int_{U_i}^{U_{i+1}} U \varphi(U) dU - \mathcal{N} U_i \int_{U_i}^{U_{i+1}} \varphi(U) dU, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tedy celková očekávaná ztráta je

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{i=0}^n \delta_{i+1} = \mathcal{N} \sum_{i=0}^n \left\{ \int_{U_i}^{U_{i+1}} U \varphi(U) dU - U_i \int_{U_i}^{U_{i+1}} \varphi(U) dU \right\} = \\ &= \mathcal{N} \left\{ \int_{U_0}^{U_{n+1}} U \varphi(U) dU - \sum_{i=0}^n U_i \int_{U_i}^{U_{i+1}} \varphi(U) dU \right\}. \end{aligned}$$

Je-li $\Phi(U) = \int_{U_0}^U \varphi(\mu) d\mu$ distribuční funkce k φ , je konečně

$$\delta = \mathcal{N} \left\{ \int_{U_0}^{U_{n+1}} U \varphi(U) dU - \sum_{i=0}^n U_i [\Phi(U_{i+1}) - \Phi(U_i)] \right\}.$$

Označme pro $k \leq n$

$$\sigma(U_1, \dots, U_k, U_{k+1}) = \sum_{i=0}^k U_i [\Phi(U_{i+1}) - \Phi(U_i)].$$

Má-li být očekávaná ztráta δ minimální, lze úlohu formulovat takto: Najít dělení $\{U_i\}_{i=1}^n$ intervalu $[U_0, U_{n+1}]$ tak, aby součet $\sigma(U_1, \dots, U_{n+1})$ byl maximální. Necht

$$\sigma_k(U) = \max_{U_0 < U_1 < \dots < U_k < U} \sigma(U_1, \dots, U_k, U)$$

je maximální hodnota σ na děleních intervalu $[U_0, U]$ s k dělicími body U_1, \dots, U_k . Pak

$$\begin{aligned} \sigma_n(U_{n+1}) &= \max_{U_0 < U_1 < \dots < U_n < U_{n+1}} \sigma(U_1, \dots, U_n, U_{n+1}) = \\ &= \max_{U_0 < U_n < U_{n+1}} \left\{ \max_{U_0 < U_1 < \dots < U_{n-1} < U_n} \sigma(U_1, \dots, U_{n-1}, U_n) + U_n [\Phi(U_{n+1}) - \Phi(U_n)] \right\} = \\ &= \max_{U_0 < U_n < U_{n+1}} \{ \sigma_{n-1}(U_n) + U_n [\Phi(U_{n+1}) - \Phi(U_n)] \} \end{aligned}$$

a podobně pro $n-1, n-2, \dots, 2, 1$; přitom $\sigma_0(U) = 0$ pro $U \in [U_0, U_{n+1}]$. Úloha je tedy převedena na funkcionální vztah

$$\sigma_k(U) = \max_{0 < U' < U} \{ \sigma_{k-1}(U') + U' [\Phi(U) - \Phi(U')] \},$$

kteří řešíme pro $k = 1, 2, \dots, n$ a $0 \leq U \leq U_{n+1}$ při každém k . K numerickému stanovení optimální posloupnosti $\{U_i\}_{i=1}^n$ lze opět použít metody dynamického programování.

4. ZÁVĚR

Uvedené příklady ukazují, že zadaný technologický problém často připouští poměrně obecnou formulaci a konstrukci pravděpodobnostního popisu, který vychází z obecných modelů (např. MARKOVOVY řetězce). Tento popis lze obvykle spojit s vhodnou optimalizační technikou; zde je to dynamické programování. Jiným známým příkladem tohoto spojení je HOWARDOVA metoda optimalizace v MARKOVOVÝCH řetězcích.

Literatura

- [1] R. Bellman: Dynamic Programming. Princeton Univ. Press 1957. (ruský překlad: Р. Беллман: Динамическое программирование. ИИЛ, Москва 1960.)
 [2] R. Bellman, S. Dreyfus: Applied Dynamic Programming. Princeton Univ. Press 1962. (ruský překlad: Р. Беллман, С. Дрейфус: Прикладные задачи динамического программирования. Наука, Москва 1965.)
 [3] Гнеденко Б. В.: Курс теории вероятностей. Физматгиз, Москва 1961.

Резюме

ОПТИМИЗАЦИЯ НА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЯХ

Станислав Дворжак, Марие Восикова (STANISLAV DVOŘÁK, MARIE VOSIKOVÁ)

Для двух технологических операций составлена вероятностная модель и использовано динамическое программирование для определения их оптимального хода.

Решено:

а) травление германиевых и кремниевых пластинок при производстве транзисторов. Ход операции описан непрерывной цепью Маркова с дискретными состояниями. Для цепи обнаружена вероятность $p(t, t')$ того, что пластинка годна во время t и недотравлена во время t' . Оптимизируется выход операции, равный

$$\mathcal{N} \sum_{i=0}^n p(t_{i+1}, t_i),$$

б) укладывание диодов в блоки. Потери в обратном напряжении сводятся к минимуму оптимальным выбором границ интервалов напряжения, по которым диоды рассортированы по обратному напряжению перед укладыванием.

Summary

OPTIMISATION IN PROBABILITY MODELS

STANISLAV DVOŘÁK, MARIE VOSIKOVÁ

For two technological operations the probability model has been built-up and dynamic programming used for determination of their optimal running. The solution is carried out for:

a) etching Ge and Si wafers in transistor production. The running of the operation is described by continuous Markovian chain with discrete states. For this chain has been found the probability $p(t, t')$ for wafer being acceptable at time t and not being etched sufficiently at time t' . The yield of operation, equal

$$\mathcal{N} \sum_{i=0}^n p(t_{i+1}, t_i),$$

is optimised.

b) composition of diodes to blocks. The losses in the breakdown voltage are minimised by optimal electing of the boundary points of the voltage intervals, in which diodes are sorted according their breakdown voltage before composition.

Adresa autorů: RNDr. Stanislav Dvořák, Marie Vosiková, Tesla Rožnov, Rožnov pod Radhoštěm.