Aplikace matematiky

Ivo Babuška

Über universal optimale Quadraturformeln

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 4, 304–338

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103177`

ÜBER UNIVERSAL OPTIMALE QUADRATURFORMELN

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 15. Juli 1967.)

EINLEITUNG

Das Problem der optimalen Quadraturformeln, allgemein das Problem optimaler Approximationen linearer Funktionale, steht heute im Mittelpunkt des Interesses. Viele Arbeiten beschäftigen sich mit den Eigenschaften dieser optimalen Approximationen. Vgl. z.B. [1]–[5] und viele andere. In diesen Arbeiten wird das Problem der Optimalität relativ zu einem fest gewählten Raum untersucht. Größtenteils handelt es sich um Sobolevsche Räume. Die optimale Formel und ihre Fehlerabschätzung hängen von dem jeweils gewählten konkreten Raum (z.B. Sobolevschen Raum) ab. Es läßt sich zeigen, daß diese Abhängigkeit sehr stark ist. Dabei ist, vom Standpunkt der numerischen Praxis die Wahl des Raumes sehr problematisch. Es kommt zur Unstabilität der Schlußfolgerungen über die Vorteile der optimalen Methode in der Praxis. Vgl. [6]. In [7] und [8] wurde der Begriff einer *universalen Optimalität* eingeführt. Der Sinn besteht darin, daß die universal optimale Formel „*annähernd*“ in einem genau definierten Sinne genauso effektiv ist wie die optimale Formel, jedoch unabhängig von der Wahl des Funktionalraumes der gegebenen Klasse von Räumen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der universalen Optimalität für die Integration periodischer Funktionen. In Kapitel I werden die Eigenschaften der periodischen Räume untersucht. In Kapitel II werden einige Begriffe eingeführt und die Formulierung des Problems angedeutet. Kapitel III behandelt das Problem der Quadraturformeln für ein gleichmäßiges Netz. Kapitel IV behandelt optimale Formeln, wenn a priori kein gleichmäßiges Netz vorausgesetzt wird. Kapitel V behandelt die Fehlerabschätzung mit Hilfe der Oberfunktionen. Die in Kapitel V angewendete Problematik hängt sehr eng mit den Arbeiten von Dahlquist zusammen. Vgl. z. B. [9]. In Kapitel VI werden einige numerische Experimente und Vergleiche angeführt.

KAPITEL I

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER RÄUME PERIODISCHER FUNKTIONEN

Wir bezeichnen mit $\mathscr{H}$ die Menge aller solcher Folgen

$$\boldsymbol{\eta} = \{\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots\},$$

dass erfüllt ist

$$\text{(1.1)} \qquad \text{a)}\ \eta_j > 0\,, \quad j = \ldots -1, 0, 1, \ldots,$$

$$\text{(1.2)} \qquad \text{b)}\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_j^{-2} = Y^2(\boldsymbol{\eta}) < \infty\,.$$

Es sei weiter S der lineare Raum aller trigonometrischer komplexer[1]) Polynome. In S sei das skalare Produkt folgenderweise definiert

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{aligned} (e^{ikx}, e^{ijx})_{\boldsymbol{\eta}} &= 0 \quad \text{für} \quad j \neq k\,, \\ (e^{ijx}, e^{ijx})_{\boldsymbol{\eta}} &= \eta_j^2\,. \end{aligned}$$

Nun bezeichnen wir mit $H_{\boldsymbol{\eta}}$ die vollständige Hülle von S in der Norm $\|\,.\,\|_{\boldsymbol{\eta}}$, $(\|f\|_{\boldsymbol{\eta}}^2 = (f, f)_{\boldsymbol{\eta}})$[2]) und der stetigen Fortsetzung des Skalarproduktes. Wir wollen nun folgenden Satz beweisen.

Satz 1.1. *Es sei $f \in H_{\boldsymbol{\eta}}$. Dann ist f eine stetige 2π-periodische komplexe Funktion und es gilt*

$$\text{(1.4)} \qquad \|f\|_C = \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |f(x)| \leqq Y(\boldsymbol{\eta})\, \|f\|_{\boldsymbol{\eta}}\,,$$

$$\text{(1.5)} \qquad |f(x + \Delta) - f(x)| \leqq \omega(\boldsymbol{\eta}, \Delta)\, \|f\|_{\boldsymbol{\eta}}\,,$$

wobei $\omega(\boldsymbol{\eta}, \Delta)$ eine stetige Funktion in Δ und $\omega(\boldsymbol{\eta}, 0) = 0$ ist.

Beweis: Offensichtlich ist

$$\|f\| \leqq \sqrt{(2\pi)}\, \|f\|_{\boldsymbol{\eta}} \max_{j=\ldots-1,0,1,\ldots} \eta_j^{-1}\,.$$

---

[1]) Wir nennen eine Funktion $f(x)$, welche in folgender Form ausgedrückt werden kann

$$f(x) = \sum_{j=-n_1}^{n_2} a_j e^{ijx}\,, \quad 0 \leqq n_1 < \infty\,, \quad 0 \leqq n_2 < \infty\,,$$

ein trigonometrisches Polynom.

[2]) Wir bezeichnen überall im weiteren mit $\|.\|$ resp. $(\ldots)$ die Norm resp. das skalare Produkt im Raume L_2 der 2π-periodischen Funktionen.

Also können wir schreiben

$$(1.6) \qquad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijx}$$

und die Reihe ist in L_2 konvergent.

Wir haben daher

$$\|f\|_C \leqq \lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{N} |a_j| = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{N} \frac{|a_j|}{\eta_j} \eta_j \leqq$$

$$\leqq \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{j=-N}^{N} |a_j|^2 \eta_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=-N}^{N} \eta_j^{-2} \Big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\eta}\, Y(\eta)\,.$$

Damit ist (1.4) bewiesen.

Ähnlich beweisen wir

$$|f(x + \Delta) - f(x)| \leqq \|f\|_{\eta} \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_j^{-2} |1 - e^{ij\Delta}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

und wenn wir setzen

$$\omega(\eta, \Delta) = \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_j^{-2} |1 - e^{ij\Delta}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

erhalten wir (1.5).

Satz 1.1 ist vollkommen bewiesen.

Wir haben bewiesen, daß falls $f \in H_{\eta}$ gilt, so ist $f \in C$[3]) und alle $f \in H_{\eta}$ haben einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul (von η abhängig).

Wir zeigen nun, daß alle Räume H_{η} einige gemeinsame Eigenschaften haben. Dazu beweisen wir folgenden Satz.

Satz 1.2. *Es sei ein Hilbertscher Raum H_{η}, $\eta \in \mathscr{K}$ gegeben. Dann hat H_{η} folgende Eigenschaften*

P_1: *Wenn $f \in H_{\eta}$ ist, dann ist $f \in C$.*

P_2: *Die Funktionen $f \in H_{\eta}$ bilden eine dichte Menge in C.*

P_3: *Ist $f \in H_{\eta}$ und c eine reelle Zahl, dann gilt $g(x) = f(x + c) \in H_{\eta}$ und $\|f\|_{\eta} = \|g\|_{\eta}$.*

P_4: *Es existiert eine Zahl $K(\eta)$ derart, daß gilt*

$$\|f\|_C \leqq K(\eta)\, \|f\|_{\eta}\,.$$

---

[3]) Mit C bezeichnen wir den Raum aller 2π-periodischer Funktionen und mit $\|\cdot\|_c$ die entsprechende Norm.

Beweis. Die Eigenschaften P_1 und P_4 wurden in Satz 1.1 bewiesen. P_2 folgt augenblicklich aus dem Umstand, daß in H_η alle trigonometrischen Polynome liegen. Die Eigenschaft P_3 ist auch offenkundig. Wenn gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx},$$

haben wir

$$\|f\|_\eta^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \eta_k^2$$

und

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikc} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx}$$

und

$$\|g\|_\eta^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 \eta_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \eta_k^2 = \|f\|_\eta^2,$$

und Satz 1.2 ist bewiesen.

Wir sagen, daß der Hilbertsche Raum aller 2π-periodischer komplexer Funktionen über dem Körper der komplexen Zahlen die Eigenschaft P hat, wenn die Bedingungen P_1, P_2, P_3 und P_4 aus Satz 1.2 erfüllt sind.

Es gilt nun folgender Satz.

Satz 1.3. *Der Hilbertsche Raum H aller 2π-periodischer komplexer Funktionen möge die Eigenschaft P haben. Dann gilt*

1. $e^{ikx} \in H$, $k = \dots -1, 0, 1, \dots$,
2. *die Funktionen* e^{ikx}, $k = \dots -1, 0, 1, \dots$ *bilden eine orthogonale Basis in* H,
3. *wenn wir* $\eta_k = \|e^{ikx}\|_H$[4]) *bezeichnen, dann ist*

$$\boldsymbol{\eta} = \{\dots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots\} \in \mathscr{K}.$$

Beweis. Wir bezeichnen F_k, $k = \dots -1, 0, 1, \dots$ das Funktional über dem Raum H, welches folgenderweise definiert ist

$$F_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} f(t)\, dt. \tag{1.7}$$

Mit Rücksicht auf die Eigenschaft P_4 ist offenbar F_k ein stetiges Funktional über H. Es existiert also eine Funktion $\varphi_k \in H$ derart, daß gilt

$$F_k(f) = (f, \varphi_k)_H. \tag{1.8}$$

[4]) Das Skalarprodukt und die Norm in H bezeichnen wir wieder $(.,.)_H$ und $\|.\|_H$.

Ebenso ist auch Q_x (x-reell) durch folgende Vorschrift definiert

$$Q_x(f) = f(x) \tag{1.9}$$

ein stetiges Funktional über H.

Es existiert daher $\psi^{[x]} \in H$ derart, daß gilt

$$Q_x(f) = (f, \psi^{[x]})_H . \tag{1.10}$$

Es sei c reell, $f \in H$. Wir bezeichnen

$$f_{[c]}(x) = f(x + c) . \tag{1.11}$$

Nach P_3 ist $f_{[c]} \in H$ und $\|f\|_H = \|f_{[c]}\|_H$.

Wir zeigen nun, daß

$$(f, g)_H = (f_{[c]}, g_{[c]})_H . \tag{1.12}$$

Die Gleichung (1.12) folgt augenblicklich aus der bekannten Gleichung

$$(f, g)_H = \tfrac{1}{4}\{\|f + g\|_H^2 - \|f - g\|_H^2 + i\|f + ig\|_H^2 - i\|f - ig\|_H^2\} , \tag{1.13}$$

und der Eigenschaft P_3 des Raumes H.[5])

Aus (1.12) folgt nun

$$\psi^{[x]} = (\psi^{[0]})_{[-x]} , \tag{1.14}$$

d.i.

$$\psi^{[x]}(t) = \psi^{[0]}(t - x) . \tag{1.15}$$

Wir erhalten nämlich aus (1.12)

$$(f_{[x]}, \psi^{[0]})_H = f(x) = (f, (\psi^{[0]})_{[-x]})_H .$$

Weiter haben wir

$$\varphi_k(x) = (\varphi_k, \psi^{[x]})_H = \overline{(\varphi_k, (\psi^{[0]})_{[-x]})_H} = \overline{((\psi^{[0]})_{[-x]}, \varphi_k)_H} = \tag{1.16}$$
$$= \overline{\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, \psi^{[0]}(t - x)\, \mathrm{d}t} = \overline{e^{ikx} \int_0^{2\pi} e^{ikz}\, \psi^{[0]}(z)\, \mathrm{d}z} = e^{-ikx} \overline{\int_0^{2\pi} e^{ikz}\, \psi^{[0]}(z)\, \mathrm{d}z} .$$

Wenn $F_k(\psi^{[0]}) \neq 0$ ist, erhalten wir, dass ist $e^{-ikx} \in H$. Weiter zeigen wir, daß ist

$$(\varphi_k, \varphi_s)_H = 0 \quad \text{für} \quad k \neq s . \tag{1.17}$$

Aus (1.16) folgt

$$(\varphi_k, \varphi_s)_H = \int_0^{2\pi} e^{ist}\, \varphi_k(t)\, \mathrm{d}t = \overline{F_k(\psi^{[0]})} \int_0^{2\pi} e^{ist} e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{für} \quad k \neq s ,$$

[5]) Vgl. z.B. Collatz: Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer 1964, S. 29.

und für $k = s$ erhalten wir

(1.18) $$\|\varphi_k\|_H^2 = 2\pi\, \overline{F_k(\psi^{[0]})}\,.$$

Wir zeigen nun durch Widerspruch, daß $\|\varphi_k\|_H \neq 0$.

Es sei also $\|\varphi_k\|_H = 0$. Dann ist $F_k(f) = 0$ für jedes $f \in H$. Nach P_2 existiert jedoch für jedes $\varepsilon > 0$ ein $f^{(\varepsilon)} \in H$ derart, daß

(1.19) $$\|e^{-ikx} - f^{(\varepsilon)}\|_C < \varepsilon$$

und daher

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{ikx} f^{(\varepsilon)}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2\pi\varepsilon\,.$$

Es ist jedoch

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} f^{(\varepsilon)}(x)\,\mathrm{d}x = F_k(f^{(\varepsilon)}) = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,.$$

Wir haben bewiesen, daß

(1.20) $$\|\varphi_k\|_H > 0 \quad \text{für alle} \quad k\,,$$

und

(1.21) $$\overline{F_k(\psi^{[0]})} = \frac{\|\varphi_k\|_H^2}{2\pi} > 0\,.$$

Wir erhalten daher aus (1.16) daß gilt

(1.22) $$e^{ikx} \in H$$

für alle ganze k.

Hieraus und aus (1.17) und aus der offensichtlichen Dichte von $\varphi_k(x)$ folgt augenblicklich der erste und zweite Teil unseres Satzes.

Wir bezeichnen nun $\|\varphi_k\|_H = \lambda_k$. Wir haben bewiesen, dass $\lambda_k^{-1}\varphi_k$, $k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ eine orthonormale Basis bilden. Wir erhalten

(1.23) $$\psi^{[0]}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k^{-1}\, \varphi_k c_k\,,$$

wobei

$$c_k = (\psi^{[0]}, \varphi_k \lambda_k^{-1})_H$$

und (vgl. (1.16) und (1.18))

$$c_k = \lambda_k^{-1}\overline{(\varphi_k, \psi^{[0]})} = \lambda_k^{-1}\,\overline{\varphi_k(0)} = \lambda_k^{-1}\,F_k(\psi^{[0]}) =$$
$$= \lambda_k^{-1}\lambda_k^2\,\frac{1}{2\pi} = \frac{\lambda_k}{2\pi}.$$

Weil $\psi^{[0]} \in H$ ist, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \tag{1.24}$$

und also auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty. \tag{1.25}$$

Es ist jedoch weiter

$$\eta_k = \|e^{ikx}\|_H = \|\varphi_{-k}\|_H\,\overline{(F_{-k}(\psi^{[0]}))^{-1}} = \|\varphi_{-k}\|_H \cdot 2\pi\|\varphi_{-k}\|_H^{-2} = 2\pi\lambda_{-k}^{-1}.$$

Aus (1.25) erhalten wir, daß

$$\boldsymbol{\eta} = \{\ldots \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots\} \in \mathscr{K}.$$

Satz 1.3 ist daher vollständig bewiesen.

Satz 1.3 sagt aus, daß jeder Raum H mit der Eigenschaft P identisch mit $H_{\boldsymbol{\eta}}$ und $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{K}$ ist.

Aus Satz 1.3 und 1.2 folgt sofort folgende Behauptung.

Satz 1.4. *Der Hilbertsche Raum H habe die Eigenschaft P. Dann hat er auch folgende Eigenschaften*

P_1': *wenn $f \in H$ ist, dann ist $f \in C$.*

P_2': *Es gilt $e^{ikx} \in H$ für $k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$*

P_3': *Wenn $f \in H$ ist und c eine reelle Zahl, dann ist*

$$g(x) = f(x + c) \in H, \quad \|f\|_H = \|g\|_H.$$

P_4': *Es existiert eine Zahl und stetige Funktion (in der Veränderlicher Δ) $\omega(H, \Delta)$ und $\omega(H, 0)$ derart, daß ist*

$$\|f\|_c \leqq K(H)\,\|f\|_H$$

und

$$|f(x + \Delta) - f(x)| \leqq \omega(H, \Delta)\,\|f\|_H$$

für jedes reelle x und Δ.

Wir sagen, daß der Hilbertsche Raum aller 2π-periodischer komplexer Funktionen die Eigenschaft P' hat, wenn die Bedingungen P'_1, P'_2, P'_3 und P'_4 aus Satz 1.4 erfüllt sind.

Offenbar gilt nun folgender Satz.

Satz 1.5. *Der Hilbertsche Raum H hat die Eigenschaft P gerade nur dann, wenn er die Eigenschaft P' hat.*

Die Menge aller Hilbertschen Räume mit der Eigenschaft P (oder P') bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$. Aus den bewiesenen Sätzen folgt eine eindeutige Korrespondenz zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathscr{K}$.

Wir beweisen nun folgenden Satz.

Satz 1.6. *Wir bezeichnen $\mathfrak{N} = \bigcup_{H \in \mathfrak{H}} H$[6]. Dann ist $\mathfrak{N}$ eine Menge 2π-periodischer stetiger Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, daß f eine absolut konvergente Fourierreihe hat, wenn $f \in H$, $H \in \mathfrak{H}$.

Dies folgt aber sofort aus dem Beweis von Satz 1.1, wo wir gezeigt haben, daß falls

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx},$$

dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \leqq Y(\boldsymbol{\eta}) \, \|f\|_{\boldsymbol{\eta}}.$$

Es sei nun f eine Funktion mit absolut konvergenter Fourierreihe

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \eta_k^{-2} &= |a_k| \quad \text{wenn gilt} \quad |a_k| \neq 0, \\ \eta_k^{-2} &= e^{-|k|} \quad \text{wenn gilt} \quad |a_k| = 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\boldsymbol{\eta} = \{\dots \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots\} \in \mathscr{K}.$$

Wir zeigen nun, daß $f \in H_{\boldsymbol{\eta}}$ ist. Wir sollen zeigen, daß gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \, \eta_k^2 < \infty.$$

---

[6]) Die Vereinigung ist in dem gewöhnlichen Sinne zu verstehen.

Es ist jedoch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \eta_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \frac{1}{|a_k|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty .$$

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Satz 1.6 sagt uns, daß wir eine Funktion mit absolut konvergenter Fourierreihe in einen Raum H einbetten können und umgekehrt.

Wir haben uns bis jetzt auf Hilbert Räume beschränkt. Mit Rücksicht auf unsere weiteren Erwägungen wollen wir nun das hier gesagte verallgemeinern indem wir von Hilbertschen Räumen zu Banach Räumen übergehen.

Überall im weiteren bezeichnen wir die Menge aller Banach Räume mit der Eigenschaft P' mit $\mathfrak{B}$.

Wir bezeichnen weiter $\mathscr{K}_1 \subset \mathscr{K}$ die Menge aller solcher Folgen

$$\boldsymbol{\eta} = \{\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots\} ,$$

für welche gilt

1. $\eta_{-k} = \eta_k , \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$
2. $\eta_{k+1} \geqq \eta_k , \quad k \geqq 0 ,$
3. $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\eta_{[\alpha n]}^2}{\eta_{[\alpha n]+tn}^2} \leqq D , \quad 0 \leqq \alpha \leqq 2, n \geqq 1, n$ ganz,

wobei D von α, $\boldsymbol{\eta}$ abhängt, aber nicht von n.

Die Klasse der Räume $H_{\boldsymbol{\eta}}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathscr{K}_1$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathfrak{H}_1$. Wir bezeichnen weiter $\mathfrak{H}_2$ die Klasse der Räume H^γ, wo $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ und gilt

1. $\gamma_k \geqq 0, \ \gamma_0 > 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots$
2. Es existiert ein $s > 0$ derart, daß $\gamma_s > 0$; s hängt allgemein von γ ab.
3. $\lim_{n \to \infty} \gamma_n^{1/n} = 0.$

Das Skalarprodukt wird durch den Ausdruck eingeführt

$$(f, g)_\gamma = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s \int_0^{2\pi} f^{(s)} \bar{g}^{(s)} \, \mathrm{d}x , \tag{1.26}$$

die Norm durch

$$\|f\|_\gamma^2 = (f, f)_\gamma . \tag{1.27}$$

Die Menge aller Folgen γ, welche die angeführten Bedingungen erfüllen bezeichnen wir Γ.

Wir bemerken, daß (1.26) auf allen trigonometrischen Polynomen definiert ist und H^γ die vollständige Hülle ist. Im Zusammenhang mit den Räumen H^γ führen wir noch die Funktion ein

$$\psi_\gamma(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s x^s . \tag{1.28}$$

Die Funktion $\psi_\gamma(x)$ welche wir zugeordnete Funktion zu H^γ nennen, ist offensichtlich eine ganze Funktion.

Es ist offensichtlich, daß falls man die ganze Funktion $\psi(x)$ in $x = 0$ in eine Taylorsche Reihe mit nichtnegativen Koeffizienten entwickeln kann und $\psi(0) > 0$ und $\psi(x)$ keine Konstante ist, so ist diese ganze Funktion einem H^γ zugeordnet. Weil diese ganze Funktion eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt ist, schreiben wir auch $\psi \in \Gamma$.

Satz 1.7. *Es ist* $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_1$.

Beweis. Es sei $\varphi_k = e^{ikx}$. Dann ist

$$\|\varphi_k\|_\gamma^2 = 2\pi \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s k^{2s} = 2\pi\, \psi_\gamma(k^2) = \eta_k^2 .$$

Wir sollen beweisen, daß

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\psi_\gamma([\alpha n]^2)}{\psi_\gamma(([\alpha n] + tn)^2)} \leqq D$$

für $0 \leqq \alpha \leqq 2$ und D unabhängig von n ist.

Es ist jedoch

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\psi_\gamma([\alpha n]^2)}{\psi_\gamma(([\alpha n] + tn)^2)} = 1 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\psi_\gamma([\alpha n]^2)}{\psi_\gamma(([\alpha n] + n + tn)^2)} \leqq$$

$$\leqq 1 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{\psi_\gamma(([\alpha n] + n)^2)}{\psi_\gamma([\alpha n]^2)} + \frac{\psi'_\gamma(([\alpha n] + n)^2)\, t^2 n^2}{\psi_\gamma([\alpha n]^2)} \right)^{-1} \leqq$$

$$\leqq 1 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\psi'_\gamma([\alpha + 1)\, n]^2)}{\psi_\gamma([(\alpha + 1)\, n]^2)}\, t^2 n^2 \right)^{-1} \leqq$$

$$\leqq 1 + \sum_{t=0}^{\infty} (1 + C(\gamma)\, t^2)^{-1} \leqq D(\gamma) .$$

Die Anwendung der Ungleichungen ist richtig, wenn wir erwägen, daß die Funktionen ψ_γ und ψ'_γ wachsende Funktionen sind und gilt

$$\frac{\psi'_\gamma([(\alpha + 1)\, n]^2)\, n^2}{\psi_\gamma([(\alpha + 1)\, n]^2)} \geqq \frac{1}{[1 + \alpha]^2} \left[1 - \frac{\psi_\gamma(0)}{\psi_\gamma([(\alpha + 1)\, n]^2)} \right] \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{[1 + \alpha]^2} \left[1 - \frac{\psi_\gamma(0)}{\psi_\gamma(1)} \right] = C(\gamma) ,$$

weil $0 \leqq \alpha \leqq 2$ ist.

Wir bezeichnen $\mathfrak{H}_3$ die Klasse der Räume $H_\eta \in \mathfrak{H}_2$ sodaß gilt $\eta_k \leqq c + |k|^\beta$ wobei $\beta > 0$ und ganz ist. Wir haben offenbar dann $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{H}_2 \supset \mathfrak{H}_3$. In $\mathfrak{H}_3$ gehören also solche Räume, welche quadratisch integrierbare Ableitungen von der Ordnung β haben.

Wir beweisen nun ein Lemma.

Lemma 1.1. *Es sei eine Zahlenfolge $a_0, a_1, \ldots$ gegeben. Dann existiert eine Funktion $\psi(x) \in \Gamma$ derart, daß $\psi(n) \geqq |a_n|$ gilt.*

Beweis. Wir konstruieren eine Folge $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots)$, b_j sind natürliche Zahlen, sodaß gilt $|a_j|^{1/b_j} \leqq 2$. Eine solche Folge existiert offensichtlich. Wir konstruieren nun eine Folge $\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, \ldots)$ natürlicher Zahlen so, daß gilt

1. $c_{j+1} > c_j$,
2. $c_j \geqq b_j$.

Eine solche Folge existiert offenbar auch.

Wir setzen nun

$$\gamma_0 = \max\left[|a_0|, |a_1|, 1\right], \quad \gamma_1 = \max\left[|a_1|, 1\right].$$

Wenn $s = c_j$, $s > 1$ ist, so setzen wir $\gamma_s^{1/s} = |a_j|^{1/s}/j$, wenn $s > 1$, $s \neq c_j$ ist, dann setzen wir $\gamma_s = 0$.

Wir beweisen nun, daß gilt

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k \in \Gamma .$$

Dazu genügt es zu zeigen daß gilt

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n^{1/n} = 0 .$$

Weil jedoch $s = c_j \geqq b_j$, so ist $|a_j|^{1/s} \leqq 2$ und daher ist $\gamma_s^{1/s} \leqq 2/j$. Weil für $s \to \infty$ gilt $j \to \infty$, so ist $\psi(x) \in \Gamma$. Wir zeigen nun, daß ist $\psi(j) \geqq |a_j|$. Offensichtlich ist $\psi(j) \geqq \gamma_{c_j} j^{c_j}$. Es ist jedoch $\gamma_{c_j} = |a_j|/j^{c_j}$. Hieraus folgt nun sofort unser Lemma.

KAPITEL II

PROBLEMSTELLUNG

In Kapitel I haben wir eine Klasse von Räumen eingeführt. Jeder dieser Räume war in den Raum $C \subset L_2$ eingebettet.

Es sei ein lineares stetiges Funktional Φ auf L_2 gegeben. Dann gilt $\Phi \in B^*$, wenn $B \in \mathfrak{B}$.

Weiter ist auch das Funktional

$$\varphi_x(f) = f(x) \tag{2.1}$$

ein lineares stetiges Funktional über B, d.i. $\varphi_x \in B^*$. Es sei nun ein natürliches n gegeben. Wir bezeichnen

$$\omega(\Phi, B, n) = \inf_{\substack{a_k, x_k \\ k=1,\dots,n \\ 0 \leqq x_k \leqq 2\pi}} \left\| \Phi - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{x_k} \right\|_{B^*}. \tag{2.2}$$

Weiter sei

$$\chi(\Phi, B, n) = \inf_{a_k} \left\| \Phi - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{(2\pi/n)k} \right\|_{B^*}. \tag{2.3}$$

Es sei weiter ein n-dimensionaler Vektor $\mathbf{x}_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$, $0 \leqq x_k^{(n)} \leqq 2\pi$, und $\mathbf{p}_n = (p_1^{(n)}, \dots, p_n^{(n)})$ gegeben. Wir bezeichnen

$$\varrho(\Phi, B, \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n) = \left\| \Phi - \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} \varphi_{x_k^{(n)}} \right\|_{B^*} \tag{2.4}$$

und

$$\varrho^*(\Phi, B, \mathbf{p}_n) = \left\| \Phi - \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} \varphi_{(2\pi/n)k} \right\|_{B^*}. \tag{2.5}$$

Der Sinn der eingeführten Symbole ist folgender. Wir wollen den Wert $\Phi(f)$ berechnen. Wir können jedoch nur die Werte der Funktionale φ_{x_k} d.h. die Funktionswerte in den Punkten x_k bestimmen. Wenn wir einen Banachraum B und eine Zahl n gegeben haben, dann gibt uns $\omega(\Phi, B, n)$ offenbar den kleinstmöglichen Fehler der Approximation des Funktionals Φ durch eine lineare Kombination der n Funktionswerte an.

Die Funktion χ hat denselben Sinn unter Voraussetzung, daß wir uns nur auf Funktionswerte in einem gleichmäßigen Netz beschränken.

Die Funktion ϱ gibt uns den Felher der jeweils konkreten Approximation des Funktionals durch eine lineare Kombination (gegeben durch die Vektoren, $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{p}_n$) der n Funktionswerte. Wenn wir im weiteren mit den Räumen $H_{\boldsymbol{\eta}}$ anstatt den Räumen B operieren werden, so schreiben wir einfach

$$\omega(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n), \quad \chi(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n), \quad \varrho(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n), \quad \varrho^*(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_n)$$

und ähnlich für $H^{\boldsymbol{\gamma}}$.

Es sei eine Folge

$$\mathbf{x}_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}), \quad 0 \leqq x_i^{(n)} \leqq 2\pi$$

und

$$\mathbf{p}_n = (p_1^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots$$

gegeben.

Dann nennen wir die Folge der Funktionale

$$\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} \varphi_{x_k(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

eine Formel und bezeichnen $\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)$.

In dem Fall, dass $\mathbf{x}_n = (2\pi/n, 2(2\pi/n), \ldots, 2\pi)$ ist, schreiben wir kurz $\varphi(\mathbf{p}_n)$. Das Funktional $\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)$, $\varphi(\mathbf{p}_n)$ resp. die Formeln $\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)$, $\varphi(\mathbf{p}_n)$ nennen wir ein optimales Funktional resp. Formel in Bezug auf Φ und B, wenn ist

$$\varrho(\Phi, B, \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n) = \omega(\Phi, B, n) \tag{2.7}$$

resp.

$$\varrho^*(\Phi, B, \mathbf{p}_n) = \chi(\Phi, B, n)\,. \tag{2.8}$$

Die Formel $\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)$ resp. $\varphi(\mathbf{x}_n)$ werden wir eine assymptotische Formel in Bezug auf Φ und B nennen, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho(\Phi, B, \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)}{\omega(\Phi, B, n)} = 1 \tag{2.9}$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho^*(\Phi, B, \mathbf{p}_n)}{\chi(\Phi, B, n)} = 1\,. \tag{2.10}$$

Die Formel $\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)$ resp. $\varphi(\mathbf{p}_n)$ nennen wir ordnungsmäßig optimal in Bezug auf Φ und B, wenn gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varrho(\Phi, B, \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)}{\omega(\Phi, B, n)} < \infty \tag{2.11}$$

resp.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varrho^*(\Phi, B, \mathbf{p}_n)}{\chi(\Phi, B, n)} < \infty\,. \tag{2.12}$$

Die Formel $\varphi(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)$ resp. $\varphi(\mathbf{p}_n)$ nennen wir fast optimal, wenn für jedes $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho(\Phi, B, \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n)}{\omega(\Phi, B, [n^{1-\varepsilon}])} = 0 \tag{2.13}$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho^*(\Phi, B, \mathbf{p}_n)}{\chi(\Phi, B, [n^{1-\varepsilon}])} = 0\,. \tag{2.14}$$

Der Sinn aller eingeführten Begriffe ist einleuchtend. Wir bemerken zu der fast optimalen Formel nur, daß wir die gegebene Formel mit der optimalen Formel, welche nur $[n^{1-\varepsilon}]$ Punkte benützt, vergleichen.

Die Begriffe, welche wir eingeführt haben, beziehen sich auf ein bestimmtes Funktional Φ und einen Banachraum B.

Im weiteren sind die Begriffe wichtig: universal assymptotische resp. ordnungsmäßige resp. fast ordnungsmäßige Optimalität. Die universale Optimalität in Bezug auf die Klasse der Räume (in unserem Fall $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$) erhalten wir indem wir fordern, daß (2.9), (2.10) resp. (2.11), (2.12) resp. (2.13), (2.14) gleichzeitig für alle B der gegebenen Klasse von Räumen gilt.

Der Sinn der universalen Optimalität besteht darin, daß wir das Risiko der konkreten Wahl eines bestimmten Banachraumes B dadurch verringern, indem wir nur eine Klasse von Räumen wählen, in welche unsere Funktion (für welche wir das Funktional berechnen) einbettbar ist, oder, mit anderen Worten, es aktuell ist sie einzubetten. Wir müssen offensichtlich aber bei konkreter Fehlerabschätzung den Raum konkret wählen. Vgl. auch Kap. V.

KAPITEL III

ÜBER EINIGE PROBLEME DER APPROXIMATION BEI BENÜTZUNG EINES GLEICHMÄSSIGEN NETZES

In Kapitel II haben wir das Problem der optimalen Formeln formuliert. In diesem Kapitel werden wir uns mit diesen Fragen näher beschäftigen, und ein gleichmäßiges Netz voraussetzen. Wir wollen also die Formel $\varphi(\mathfrak{p}_n)$ analysieren.

Es sei ein Raum $H \in \mathfrak{H}$ gegeben. Dann ist $H = H_{\boldsymbol{\eta}}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}$ (s. Kap. I). In unseren weiteren Erwägungen wird folgende Funktion wichtig sein

$$C(n, k, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\eta_{-k}^{2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \eta_{tn-k}^{-2}}, \tag{3.1}$$

welche für alle natürlichen n und ganze k definiert ist.

Mit Rücksicht auf (1.2) konvergiert die Reihe. Wir beweisen nun folgenden Satz.

Satz 3.1. *Es sei Φ_k ein Funktional definiert durch folgende Vorschrift*

$$\Phi_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_k(x) f(x) \, \mathrm{d}x\,, \tag{3.2}$$

wobei ist

$$T_k(x) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} b_s^{(k)} e^{isx}\,.$$

Dann ist das Funktional

(3.3)
$$\varphi(\mathfrak{p}_n) = \sum_{s=1}^{n} p_s^{(n)} \varphi_{(2\pi/n)s}$$

d.h.
$$\varphi(\mathfrak{p}_n)(f) = \sum_{s=1}^{n} p_s^{(n)} f\left(\frac{2\pi}{n} s\right),$$

wobei

(3.4)
$$p_l^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} b_s^{(k)} C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, e^{is(2\pi/n)l}$$

für $n \geqq k$ optimal in Bezug auf Φ_k und $H_{\boldsymbol{\eta}}$.

Weiter gilt $(n \geqq k)$

(3.5)
$$\chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} |b_s^{(k)}|^2 \frac{1 - C(n, s, \boldsymbol{\eta})}{\eta_{-k}^2}.$$

Beweis. Es sei $f \in H_{\boldsymbol{\eta}}$. Dann können wir schreiben

(3.6)
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

(nach Kap. I konvergiert die Reihe (3.6) absolut), wobei gilt

(3.7)
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \eta_k^2 < \infty.$$

Wir setzen nun

(3.8)
$$r_n(x) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2}.$$

Die unendliche Reihe in (3.8) ist offensichtlich absolut konvergent und wir sehen auch daß $r_n \in H_{\boldsymbol{\eta}}$ ist.

Wir bestimmen nun

(3.9)
$$\begin{aligned}(f, r_n)_{\boldsymbol{\eta}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2}\right)_{\boldsymbol{\eta}} = \\ &= \left(\sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{t=-\infty}^{\infty} c_{tn-s} e^{i(tn-s)x}, \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2}\right)_{\boldsymbol{\eta}} = \\ &= \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \sum_{t=-\infty}^{\infty} b_s^{(k)} c_{tn-s}\, C(n, s, \boldsymbol{\eta}).\end{aligned}$$

Berechnen wir weiter

$$(3.10)\qquad \varphi(\mathfrak{p}_n)(f) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} b_s^{(k)}\, C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, e^{is(2\pi/n)l} f\left(\frac{2\pi}{n}l\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]}\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_s^{(k)}\, C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, e^{is(2\pi/n)l}\, c_j e^{ij(2\pi/n)l} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]}\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_s^{(k)}\, C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, c_j \sum_{l=1}^{n} e^{i(2\pi/n)l(s+j)} =$$

$$= \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]}\sum_{t=-\infty}^{\infty} b_s^{(k)} c_{tn-s}\, C(n, s, \boldsymbol{\eta})\,.$$

Wir sehen, daß ist

$$(3.11)\qquad (f, r_n)_{\boldsymbol{\eta}} = \varphi(\mathfrak{p}_n)(f)\,.$$

Wir setzen

$$(3.12)\qquad g_k(x) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} \frac{e^{-isx}}{\eta_{-s}^2}\,,$$

und erhalten einfach

$$(3.13)\qquad (f, g_k)_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} c_{-s} b_s^{(k)}\,.$$

Weiter ist

$$(3.14)\quad \Phi_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} b_s^{(k)} e^{isx}\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilx}\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} b_s^{(k)} c_{-s}\,.$$

Wir sehen also, daß

$$(3.15)\qquad (f, g_k)_{\boldsymbol{\eta}} = \Phi_k(f)\,.$$

Wir setzen nun

$$(3.16)\qquad \sigma_n^{(k)} = g_k - r_n\,.$$

Offensichtlich ist $\sigma_n^{(k)} \in H_{\boldsymbol{\eta}}$ und es gilt

$$(3.17)\qquad (\Phi_k - \varphi(\mathfrak{p}_n))(f) = (f, \sigma_n^{(k)})_{\boldsymbol{\eta}}\,.$$

Aus der Theorie der orthogonalen Projektoren folgt, daß $\varphi(\mathfrak{p}_n)$ eine optimale Approximation ist, wenn für $l = 1, \ldots, n$ gilt $\sigma_n^{(k)}(2\pi l/n) = 0$. Es ist jedoch

$$(3.18)\qquad \sigma_n^{(k)}\left(\frac{2\pi}{n}l\right) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} \frac{e^{-is(2\pi/n)l}}{\eta_{-s}^2} -$$

$$- \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]}\sum_{t=-\infty}^{\infty} \bar{b}_s^{(k)}\, C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \frac{e^{i(tn-s)(2\pi/n)l}}{\eta_{tn-s}^2} =$$

$$= \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} \frac{e^{-is(2\pi/n)l}}{\eta_{-s}^2}\left[1 - C(n, s, \boldsymbol{\eta})\,\eta_{-s}^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_{tn-s}^2}\right].$$

Wenn wir jedoch (3.1) in Betracht nehmen, so sehen wir, daß $\sigma_n^{(k)}(2\pi l/n) = 0$ für $l = 1, \ldots, n$ gilt.

Damit haben wir bewiesen, daß das Funktional (3.3) ein optimales Funktional in Bezug auf Φ_k und $H_{\boldsymbol{\eta}}$ ist.

Offenbar ist nun

$$\chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n) = \|\sigma_n^{(k)}\|_{\boldsymbol{\eta}}^2 = \Phi_k(\sigma_n^{(k)}), \tag{3.19}$$

denn wir haben bewiesen, daß $\sigma_n^{(k)}(2\pi k/n) = 0$ ist, für $l = 1, \ldots, n$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} b_s^{(k)} e^{isx}\left(\sum_{j=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_j^{(k)} \frac{e^{-ijx}}{\eta_{-j}^2} - \right.\right.\\ &\quad \left.\left. - \sum_{j=-[(k-1)/l]}^{[k/2]} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \bar{b}_j^{(k)}\, C(n, j, \boldsymbol{\eta}) \frac{e^{i(tn-j)x}}{\eta_{tn-j}^2}\right)\right) \mathrm{d}x = \\ &= \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} |b_s^{(k)}|^2 \frac{1}{\eta_{-s}^2}(1 - C(n, s, \boldsymbol{\eta}))\,.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Damit ist Satz 3.1 jedoch vollständig bewiesen.

Satz 3.2. *Das Funktional Φ_k sei wieder durch den Ausdruck (3.2) gegeben. Es sei weiter ein Funktional $\varphi(\boldsymbol{p}_n)$ gegeben*

$$\varphi(\boldsymbol{p}_n)(f) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} T_k\left(\frac{2\pi}{n}\, l\right) f\left(\frac{2\pi}{n}\, l\right). \tag{3.21}$$

Dann gilt

$$\varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \frac{|b_s^{(k)}|^2}{\eta_{-s}^2} \frac{1 - C(n, s, \boldsymbol{\eta})}{C(n, s, \boldsymbol{\eta})}\,. \tag{3.22}$$

Beweis. Auf ganz ähnliche Weise wie in Satz 3.1 erhalten wir, daß gilt

$$(\Phi_k - \varphi(\boldsymbol{p}_n))(f) = (f, \hat{\sigma}_n^{(k)})_{\boldsymbol{\eta}}$$

wobei $\hat{\sigma}_n^{(k)} = g_k - \hat{r}_n$ und

$$g_k(x) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} \frac{e^{-isx}}{\eta_{-s}^2}\,,$$

$$\hat{r}_n(x) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2}\,.$$

Weiter erhalten wir offensichtlich

$$\varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) = \|\hat{\sigma}_n^{(k)}\|_{\boldsymbol{\eta}}^2\,,$$

Wir erhalten jedoch

$$\|\hat{\sigma}_n^{(k)}\|_{\boldsymbol{\eta}}^2 = \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} |b_s^{(k)}|^2 \frac{1}{\eta_{tn-s}^2} = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \frac{|b_s^{(k)}|^2}{\eta_{-s}^2} [-1 + C^{-1}(n, s, \boldsymbol{\eta})] .$$

Hieraus folgt jedoch sofort Satz 3.2. Wir sollen nun folgende Behauptung beweisen.

Satz 3.3. *Das Funktional* Φ_k *sei wieder durch den Ausdruck* (3.2) *gegeben. Dann ist die Formel* $\varphi(\mathfrak{p}_n)$, *wobei* $\varphi(\mathfrak{p}_n)(f)$ *durch den Ausdruck* (3.21) *gegeben ist, eine universal assymptotisch optimale Formel in Bezug auf* $\mathfrak{H}$.

Beweis. Wir können uns offensichtlich auf die Analyse der Fehlerabschätzung für $n > k$ beschränken.

Nach Satz 3.1 erhalten wir

$$\chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} |b_s^{(k)}|^2 \frac{1}{\eta_{-s}^2} (1 - C(n, s, \boldsymbol{\eta})) \tag{3.23}$$

und nach Satz 3.2

$$\varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \mathfrak{p}_n) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} |b_s^{(k)}|^2 \frac{1}{\eta_{-s}^2} \frac{1 - C(n, s, \boldsymbol{\eta})}{C(n, s, \boldsymbol{\eta})} . \tag{3.24}$$

Alle Summanden in (3.24) sind jedoch positiv.

Darum ist

$$\varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \mathfrak{p}_n) \leqq \left(\max_{-[(k-1)/2] \leqq s \leqq [k/2]} \frac{1}{C(n, s, \boldsymbol{\eta})} \right) \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} |b_s^{(k)}|^2 \frac{1}{\eta_s^2} (1 - C(n, s, \boldsymbol{\eta})) =$$
$$= \chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n) \left(\max_{-[(k-1)/2] \leqq s \leqq [k/2]} C^{-1}(n, s, \boldsymbol{\eta}) \right) .$$

Es ist jedoch

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{-[(k-1)/2] \leqq s \leqq [k/2]} C^{-1}(n, s, \boldsymbol{\eta}) \right) = 1 .$$

Daraus folgt jedoch sofort unsere Behauptung.

Wir haben bewiesen, daß die Formel $\varphi(\mathfrak{p}_n)$, wo $\varphi(\mathfrak{p}_n)(f)$ durch den Ausdruck (3.21) geben ist, eine universal assymptotisch optimale Formel ist. Es entsteht die Frage, ob auch irgendeine andere Formel diese Eigenschaft hat. Wir beweisen einen Satz der aussagt, daß die Formel eindeutig bestimmt wird durch die Forderung der universal größenordnungsmäßigen Optimalität in Bezug auf $\mathfrak{H}_2$.

Satz 3.4. *Es sei eine Formel* $\varphi(\mathfrak{q}_n)$ *gegeben. Diese Formel ist gerade dann universal größenordnungsmäßig optimal in Bezug auf* $\mathfrak{H}_2$ *und das Funktional* Φ_k (*gegeben durch den Ausdruck* (3.2)), *wenn ein* $N > 0$ *derart existiert, daß* $\varphi(\mathfrak{q}_n) = \varphi(\mathfrak{p}_n)$ *ist, für alle* $n \geqq N$ *und* $\varphi(\mathfrak{p}_n)(f)$ *durch den Ausdruck* (3.21) *gegeben ist.*

Beweis.[7]) Unserer Voraussetzung nach ist

$$(3.25)\qquad \varphi(\mathbf{q}_n) = \sum_{k=1}^{n} q_k^{(n)} \varphi_{(2\pi/n)k}\,.$$

Wir können jedoch (3.25) folgenderweise schreiben

$$\varphi(\mathbf{q}_n) = \frac{1}{n} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{k=1}^{n} a_s^{(n)} e^{is(2\pi/n)k} \varphi_{(2\pi/n)k}\,.$$

Nun, ähnlich wie früher, können wir schreiben

$$(\Phi_k - \varphi(\mathbf{q}_n))(f) = (f, \sigma_n^{(k)*})_{\boldsymbol{\eta}}$$

wo

$$\sigma_n^{(k)*} = g_k - r_n$$

und

$$g_k(x) = \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} \bar{b}_s^{(k)} \frac{e^{-isx}}{\eta_{-s}^2}$$

und

$$r_n(x) = \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \bar{a}_s^{(n)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2}\,.$$

Wir werden voraussetzen, daß $[(n-1)/2] \geqq [k/2]$ ist.

Dann erhalten wir

$$\|\Phi_k - \varphi(\mathbf{q}_n)\|_{\boldsymbol{\eta}} = \left\| \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2} (\bar{b}_{-tn+s}^{(k)} - \bar{a}_s^{(n)}) \right\|_{\boldsymbol{\eta}}$$

wobei wir setzen $b_{-tn+s}^{(k)} = 0$, wenn ist $-tn + s > [k/2]$ und $-tn + s < -[(k-1)/2]$.

Wir erhalten daher

$$(3.26)\qquad \varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{q}_n) = \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{t=-\infty}^{\infty} |\bar{b}_{-tn+s}^{(k)} - \bar{a}_s^{(n)}|^2 \frac{1}{\eta_{tn-s}^2}\,.$$

Von anderer Seite haben wir nach Satz 3.2

$$(3.27)\qquad \chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n) \leqq \varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{p}_n) =$$

$$= \sum_{s=-[(k-1)/2]}^{[k/2]} |b_s^{(k)}|^2 \frac{1}{\eta_{-s}^2} (-1 + C^{-1}(n, s, \boldsymbol{\eta})) \leqq C^* \sum_{s \geqq [(n+2)/2]} \frac{1}{\eta_s^2}$$

wobei C^* von Φ_k abhängt, aber von n unabhängig ist.

[7]) Wir beweisen hier etwas mehr, weil wir es noch später im Satz 3.6 brauchen werden.

Wir bezeichnen weiter

$$(3.28) \qquad \omega(n) = \max_{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [(n/2)]} \left| b_s^{(k)} - a_s^{(n)} \right|$$

und erhalten aus (3.26) und (3.28)

$$(3.29) \qquad \varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{q}_n) \geqq \omega^2(n) \min_{|k| \leqq [n/2]} \frac{1}{\eta_k^2}\,.$$

Unsere Behauptung beweisen wir nun durch Widerspruch. Wir wollen voraussetzen, daß eine unendliche Folge n_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ derart existiert, daß $\omega(n_j) \neq 0$ ist. Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $n_{i+2} > n_i + 2$, $n_0 > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ ist.

Wir bezeichnen nun

$$(3.30) \qquad \Pi_j = \prod_{s=0}^{j} \min\left(|\omega(n_s)|^2, 1\right)$$

und weiter

$$S(k) = 1 \qquad \text{für} \quad 0 \leqq |k| \leqq \left[\frac{n_0}{2}\right],$$

$$S(k) = \Pi_j \qquad \text{für} \quad \left[\frac{n_{j-1}}{2}\right] < |k| \leqq \left[\frac{n_j}{2}\right]$$

und

$$\alpha_k^2 = e^k S^{-1}(k)\,.$$

Nach Lemma 1.1 existiert $\psi(x) \in \Gamma$ derart, daß für alle k ist

$$\psi(k^2) \geqq \alpha_k^2 |k|\,.$$

Wir setzen nun

$$\eta_k^2 = e^{\psi(k^2)}, \quad \boldsymbol{\eta} = \{\eta_k\}\,.$$

Dann ist $H_{\boldsymbol{\eta}} = H^{\gamma^*}$, $\gamma^* \in \Gamma$ denn es ist offensichtlich $e^{\psi(x)} \in \Gamma$.

Wir erhalten nun

$$\xi(n) = \frac{\varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{q}_n)}{\chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n)} \geqq \frac{\omega^2(n) \min\limits_{|k| \leqq [n/2]} 1/\eta_k^2}{C^* \sum\limits_{k \geqq [(n+2)/2]} 1/\eta_k^2} \geqq \frac{\omega^2(n) \exp \psi(([n/2]+1)^2)}{\exp \psi([n/2]^2)}\, C^{**}$$

wobei C^{**} nicht von n abhängt. Also ist

$$\xi(n) \geqq \omega^2(n)\, C^{**} \exp\left(\psi'\left(\left[\frac{n}{2}\right]^2\right)\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Es ist jedoch

$$\psi'\left(\left[\frac{n}{2}\right]^2\right)\left[\frac{n}{2}\right]^2 \geqq \psi\left(\left[\frac{n}{2}\right]^2\right) - C_1 .$$

Also gilt

$$\xi(n) \geqq \omega^2(n)\, C^{***} \exp\left(\psi\left(\left[\frac{n}{2}\right]^2\right)\left[\frac{n}{2}\right]^{-1}\right) \geqq \omega^2(n)\, C^{***} e^{\alpha^2[n/2]} \geqq \omega^2(n)\, C^{***} \alpha^2_{[n/2]} .$$

Es ist jedoch

$$\xi(n_j) \geqq \omega^2(n_j)\, C^{***} \alpha^2_{[n_j/2]} \geqq \Pi_j C^{***} \Pi_j^{-1} e^{[n_j/2]}$$

sodaß gilt

$$\lim_{j\to\infty} \xi(n_j) = \infty .$$

Damit haben wir den Widerspruch bewiesen. Satz 3.4 ist hiermit bewiesen.

Wir haben bewiesen, daß die einzige Formel (bis auf eine endliche Anzahl der Indizes), welche größenordnungsmäßig universal in Bezug auf $\mathfrak{H}_2$, also auch auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ ist, die Formel ist, welche durch den Ausdruck (3.21) gegeben ist.

Wir beweisen leicht auch folgenden Satz.

Satz 3.5. *Es sei ein Funktional Φ_k durch den Ausdruck* (3.2) *gegeben, dann existiert außer der Formel $\varphi(\boldsymbol{p}_n)$, gegeben durch den Ausdruck* (3.21), *auch eine Formel $\varphi(\boldsymbol{q}_n)$, welche universal größenordnungsmäßig optimal in Bezug auf $\mathfrak{H}_3$ ist, wobei für jedes beliebige N ein $n_0 > N$ derart existiert, daß gilt $\boldsymbol{p}_{n_0} \neq \boldsymbol{q}_{n_0}$.*

B e w e i s. Wir beweisen zuerst, daß für $0 < \tau < \pi$ die 2π-periodische Funktion $\Lambda_\tau(x)$, welche folgende Bedingungen erfüllt

$$\Lambda_\tau(x) = \lambda_\tau(x) \quad \text{für} \quad |x| \leqq \pi ,$$

$$\lambda_\tau(x) = \exp \frac{x^2}{x^2 - \tau^2} \quad \text{für} \quad |x| < \tau$$

$$\lambda_\tau(x) = 0 \quad \text{für} \quad \pi \geqq |x| \geqq \tau$$

die Eigenschaft hat, daß für alle $H_{\boldsymbol{\eta}} \in \mathfrak{H}_3$ gilt $\Lambda_\tau \in H_{\boldsymbol{\eta}}$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{H}_3 \subset \mathfrak{H}_2$ also existiert ein $\gamma^* \in \Gamma$ derart, daß $H_{\boldsymbol{\eta}} = H^{\gamma^*}$. Dabei ist $\gamma^* \equiv (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ und $\gamma_S = 0$ für $S > \beta$ (vgl. Kap. 1).

Wir erhalten

$$\|\Lambda_\tau\|^2_{\gamma^*} \leqq C(\gamma^*)\, \tau^{1-2\beta} .$$

Es ist nun

$$\chi^2(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, n) \geqq C_1(\Phi_k, \gamma^*)\, n^{-2\beta} .$$

Wir wählen nun eine Formel $\varphi(\mathbf{q}_n)$ so, daß für gerade n gilt

$$\varphi(\mathbf{q}_n)(f) = \frac{1}{2n} \sum_{s=1}^{n} T_k\left(\frac{2\pi}{n} s\right) f\left(\frac{2\pi}{n} s\right)(2 + (-1)^s).$$

Unter Benutzung der Beweismethode von Satz 3.2 können wir uns leicht überzeugen, daß für diese Formel gilt

$$\varrho^{*2}(\Phi_k, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{q}_n) \leqq C_2(\Phi_k, \gamma^*)\, n^{-2\beta}$$

daraus folgt sofort unsere Behauptung.

Wir haben gezeigt, daß wir für eine eindeutige (bis auf eine endliche Anzahl der Indizes) Bestimmung mit Hilfe der Universalitätsbedingungen wir nun eine grössere Klasse von Räumen wählen müssen als Räume mit einer endlichen Anzahl von Ableitungen.

Die Möglichkeit der Konstruktion einer universalen Formel haben wir für das Funktional Φ_k gezeigt, welches durch den Ausdruck (3.2) definiert ist. Es entsteht die Frage, ob eine universale Formel auch für andere Funktionale existiert. Mit dieser Frage wollen wir uns nun beschäftigen. Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 3.6. *Es sei ein Funktional Φ gegeben*

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{3.31}$$

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx} \in L_2.$$

g sei kein trigonometrisches Polynom. Dann existiert keine größenordnungsmäßig optimale Formel in Bezug auf Φ und $\mathfrak{H}$.

Beweis. Offenbar ist das Funktional Φ ein stetiges lineares Funktional über jedem $H_{\boldsymbol{\eta}} \subset L_2$.

Satz 3.6 beweisen wir durch Widerspruch. Es möge eine Formel $\varphi(\mathbf{q}_n)$ existieren, welche größenordnungsmäßig optimal in Bezug auf $\mathfrak{H}$ ist. Für $n = 2m + 1$ setzen wir

$$\varphi(\mathbf{q}_n) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{s=-m}^{m} a_s^{(m)} e^{is[2\pi/(2m+1)]k} \varphi_{[2\pi/(2m+1)]k}.$$

Genauso wie im Beweis zu Satz 3.1 und 3.4 erhalten wir

$$\|\Phi - \varphi(\mathbf{q}_n)\|_{\boldsymbol{\eta}} = \left\| \sum_{s=-m}^{m} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(t(2m+1)-s)x}}{\eta^2_{t(2m+1)-s}} \left[\bar{b}_{-t(2m+1)+s} - \bar{a}_s^{(m)}\right] \right\|_{\boldsymbol{\eta}}.$$

Zuerst wollen wir beweisen, daß ein $N > 0$ so existiert, daß für $m > N$, $a_s^{(m)} = b_s$ ist, wenn $|s| \leqq m$ gilt. Wir bezeichnen nun

$$\varphi(\mathfrak{p}_n) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{s=-m}^{m} b_s e^{is[2\pi/(2m+1)k]} \varphi_{[2\pi/(2m+1)]k} \tag{3.32}$$

und erhalten

$$\|\Phi - \varphi(\mathfrak{p}_n)\|_{\boldsymbol{\eta}} = \left\| \sum_{s=-m}^{m} \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{i(t(2m+1)-s)x}}{\eta^2_{t(2m+1)-s}} \left[\bar{b}_{-t(2m+1)+s} - \bar{b}_s\right] \right\|_{\boldsymbol{\eta}}, \tag{3.33}$$

so daß ist

$$\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \leqq \varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \mathfrak{p}_n) \leqq C_1 \sum_{|k|>m} \frac{1}{\eta_k^2} \tag{3.34}$$

und

$$\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \mathfrak{q}_n) \geqq \omega^2(m) \min_{|k| \leqq m} \frac{1}{\eta_k^2}, \tag{3.35}$$

wobei

$$\omega(m) = \max_{|k| \leqq m} |b_k - a_k^{(m)}|. \tag{3.36}$$

Ähnlich wie in Beweis zu Satz 3.4 können wir zeigen, daß die Formel $\varphi(\mathfrak{q}_n)$ größenordnungsmäßig optimal in Bezug auf Φ und $\mathfrak{H}$ nur dann sein kann, wenn gilt

$$\omega(m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.37}$$

Wir wählen nun die Formel $\varphi(r_n)$ folgenderweise

$$\varphi(r_n) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{s=-m}^{m} b_s^* e^{is[2\pi/(2m+1)]k} \varphi_{[2\pi/(2m+1)]k}, \tag{3.38}$$

wobei

$$\begin{aligned} b_s^* &= b_s \qquad \text{für} \quad |s| < m, \\ b_m^* &= b_{-m-1}, \\ b_{-m}^* &= b_{m+1}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \leqq \varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, r_n) = C^* \sum_{|k|>m+1} \frac{1}{\eta_k^2} &+ \\ + \frac{|b_{-m-1} - b_m|^2}{\eta_{-m}^2} + \frac{|b_{-m} - b_{m+1}|^2}{\eta_m^2}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Wir bezeichnen

$$(3.41)\qquad \varepsilon_1(m) = b_m - b_{-m-1}\,, \quad \varepsilon_2(m) = b_{-m} - b_{m+1}\,.$$

Wir beweisen, daß eine Folge m_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ so existiert, daß $m_{j+1} > m_j > 2$ und $\varepsilon_1(m_j) \neq 0$ oder $\varepsilon_2(m_j) \neq 0$ ist. Wenn dies nicht der Fall wäre, würde für $|m| > m_0^*$ gelten

$$(3.42)\qquad \varepsilon_1(m) = \varepsilon_2(m) = 0\,.$$

In diesem Fall erhalten wir jedoch

$$b_m = b_{-m-1} = b_{m+2}\,, \quad b_{-m} = b_{m+1} = b_{-m-2}\,.$$

Da jedoch unserer Voraussetzung nach $b_m \to 0$ für $m \to 0$ gilt, so ist $b_m = 0$ für $|m| > m_0^*$, so daß $g(x)$ ein Polynom ist. Dies ist jedoch im Widerspruch mit unserer Voraussetzung.

Aus (3.33) folgt

$$(3.43)\qquad \varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) \geqq \frac{|b_m - b_{-m-1}|^2}{\eta_{m+1}^2} + \frac{|b_{-m} - b_{m+1}|^2}{\eta_{-m-1}^2} = $$
$$= \frac{|\varepsilon_1(m)|^2}{\eta_{m+1}^2} + \frac{|\varepsilon_2(m)|^2}{\eta_{-m-1}^2}\,.$$

Wir beweisen nun daß ein $H_{\boldsymbol{\eta}}$ so existiert, daß gilt

$$(3.44)\qquad \limsup_{|m|\to\infty} \frac{\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n)}{\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n)} = \infty\,.$$

Damit wird unser Satz bewiesen. Offensichtlich können wir ohne Verlust der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\varepsilon_1(m_j) \neq 0$ und $m_{j+1} > m_j + 1 > 0$ und $\varepsilon_2(m_j)/\varepsilon_1(m_j) \leqq$ $\leqq 1$ ist.

Wir setzen nun

$$\eta_k^{-2} = e^{-|k|^2}\, S(|k|) \quad \text{für} \quad k \neq m_j + 1,\, j = 1, 2, \ldots\,,$$
$$\eta_{|m_j+1|}^{-2} = e^{-m_j}\, S(m_j)\,,$$
$$S(k) = \Pi_j \quad \text{für} \quad m_{j-1} + 2 \leqq k < m_j + 2\,,$$
$$\Pi_j = \prod_{s=1}^{j-1} \min\left(|\varepsilon_1(m_j)|^2, 1\right),$$
$$S(k) = 1 \quad \text{für} \quad k < m_0 + 2\,.$$

Offenbar ist

$$\boldsymbol{\eta} = (\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots) \in \mathscr{K}\,.$$

Wir erhalten nun

$$\xi(m_j) = \frac{\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \mathfrak{p}_{2m_j+1})}{\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, 2m_j + 1)} \geqq \frac{\dfrac{|\varepsilon_1(m_j)|^2}{\eta^2_{m_j+1}} + \dfrac{|\varepsilon_2(m_j)|^2}{\eta^2_{-m_j-1}}}{C^* \sum\limits_{k \geqq m_j+2} \dfrac{1}{\eta_k^2} + \dfrac{|\varepsilon_1(m_j)|^2}{\eta^2_{-m_j}} + \dfrac{|\varepsilon_2(m_j)|^2}{\eta^2_{m_j}}} =$$

$$= \frac{e^{m_j^2-m_j}|\varepsilon_1(m_j)|^2 + e^{m_j^2-m_j}|\varepsilon_2(m_j)|^2}{C^*\eta^2_{m_j} \sum\limits_{k \geqq m_j+2} \dfrac{1}{\eta_k^2} + |\varepsilon_1(m_j)|^2 + |\varepsilon_2(m_j)|^2} \geqq \frac{e^{m_j^2-m_j}}{(1 + c^{**}) + \dfrac{|\varepsilon_2(m_j)|^2}{|\varepsilon_1(m_j)|^2}} \geqq \frac{e^{m_j^2-m_j}}{2 + c^{**}}$$

so daß ist

$$\xi(m_j) \to \infty .$$

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Wir haben bewiesen, daß für alle Funktionale der Form (3.31) einzig für das Funktional Φ in der Form

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(x) f(x)\, \mathrm{d}x ,$$

wobei $T(x)$ ein Polynom ist, eine größenordnungsmäßig optimale Formel in Bezug auf $\mathfrak{H}$ existiert. Die Formel ist dann eindeutig bestimmt (bis auf eine endliche Anzahl der Indizes). Wir wollen anmerken, daß in Satz 3.6 der Umstand von Bedeutung ist, daß $b_k \to 0$ für $|k| \to \infty$ galt. Wenn $b_k \nrightarrow 0$ wäre, muß der Satz nicht gelten. Eine offensichtliche Überlagerung eines solchen Funktionals ist

$$\Phi(f) = f(0) .$$

Im weiteren wollen wir zeigen, daß falls wir von $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}_1$ übergehen, schon Funktionale existieren, für welche eine universal größenordnungsmäßig optimale Formel existiert.

Wir stellen uns nun die Frage, ob Funktionale existieren, für welche eine universal größenordnungsmäßig optimale Formel in Bezug auf $\mathfrak{B}$ existiert.

Wir beweisen folgenden Satz.

Satz 3.7. *Es sei ein Funktional Φ gegeben*

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} f(x)\, \mathrm{d}x . \tag{3.45}$$

Dann ist die Formel $\varphi(\mathfrak{p}_n)$ gegeben durch den Ausdruck

$$\varphi(\mathfrak{p}_n)(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{ik(2\pi/n)j} f\left(\frac{2\pi}{n} j\right) \tag{3.46}$$

größenordnungsmäßig optimal in Bezug auf $\mathfrak{B}$.

Beweis. Es sei $B \in \mathfrak{B}$ ein gegebener Banachraum. Das Funktional $\varphi(\mathbf{q}_n)$, $n > 2k$ sei ein optimales Funktional in Bezug auf Φ und B. Dieses Funktional existiert offenbar.

Wir setzen

$$\varphi(\mathbf{q}_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} a_s^{(n)} e^{is(2\pi/n)j} \varphi_{(2\pi/n)j} \tag{3.47}$$

und bezeichnen Φ_l das Funktional, welches folgenderweise definiert sei

$$\Phi_l(f) = e^{ik(2\pi/n)l}\, \Phi(g) \tag{3.48}$$

wobei gilt

$$g(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{n} l\right). \tag{3.49}$$

Wir haben nun

$$\Phi_l(f) = e^{ik(2\pi/n)l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} f\left(x + \frac{2\pi}{n} l\right) \mathrm{d}x = \Phi(f). \tag{3.50}$$

Wir setzen weiter

$$\varphi_l(\mathbf{q}_n)(f) = e^{ik(2\pi/n)l}\, \varphi(\mathbf{q}_n)(g) \tag{3.51}$$

und erhalten offensichtlich

$$\varphi_l(\mathbf{q}_n)(f) = \frac{1}{n} e^{ik(2\pi/n)l} \sum_{t=1+l}^{n+l} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} a_s^{(n)} e^{is(2\pi/n)t} e^{-is(2\pi/n)l} f\left(\frac{2\pi}{n} t\right). \tag{3.52}$$

Wir beweisen nun

$$\sup_{\|f\|_B = 1} \left|(\Phi_l - \varphi_l(\mathbf{q}_n))(f)\right| = \sup_{\|f\|_B = 1} \left|(\Phi - \varphi(\mathbf{q}_n))(f)\right|. \tag{3.53}$$

Wir setzen

$$g(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{n} l\right).$$

Mit Rücksicht auf die Eigenschaft P_3 (vgl. Kap. 1) ist $\|f\|_B = \|g\|_B$. Dadurch erhalten wir jedoch (3.53).

Aus (3.50) erhalten wir

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \Phi_l = \Phi. \tag{3.54}$$

Wir bezeichnen noch

$$(3.55)\qquad \varphi^*(\boldsymbol{q}_n) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi_l(\boldsymbol{q}_n) .$$

und erhalten daher

$$(3.56)\quad \varphi^*(\boldsymbol{q}_n)(f) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{t=1+l}^{l+n} a_s^{(n)} e^{is(2\pi/n)(t-l)} e^{ik(2\pi/n)l} f\left(\frac{2\pi}{n} t\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{t=1}^{n} a_s^{(n)} e^{is(2\pi/n)(t-l)} e^{ik(2\pi/n)l} f\left(\frac{2\pi}{n} t\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} a_k^{(n)} e^{ik(2\pi/n)t} f\left(\frac{2\pi}{n} t\right) = a_k^{(n)} \varphi(\boldsymbol{p}_n) .$$

Es ist jedoch (s. (3.53))

$$(3.57)\qquad \|\Phi - \varphi^*(\boldsymbol{q}_n)\|_{B^*} \leqq \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \|\Phi_l - \varphi_l(\boldsymbol{q}_n)\|_{B^*} =$$

$$= \|\Phi - \varphi(\boldsymbol{q}_n)\|_{B^*} = \chi(\Phi, B, n) .$$

Wir haben gezeigt, daß das Funktional $a_k^{(n)} \varphi(p_n)$ ein optimales Funktional in Bezug auf Φ und B ist. (Die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ hängen jedoch von B ab.) Nach unserer Voraussetzung P_2' ist $h = e^{-ikx} \in B$.

Wir haben

$$\Phi(h) = 1 , \quad \varphi(\boldsymbol{p}_n)(h) = 1$$

also gilt

$$(3.58)\qquad \chi(\Phi, B, n) \geqq \frac{|1 - a_k^{(n)}|}{\|h\|_B} .$$

Aus der Eigenschaft P_4' folgt jedoch, daß für $n \to \infty$ gilt $\varrho^*(\Phi, B, \boldsymbol{p}_n) \to 0$. Hieraus folgt sofort $a_k^{(n)} \to 1$ für $n \to \infty$. Wir beweisen nun, daß die Formel $\varphi(\boldsymbol{p}_n)$ universal größenordnungsmäßig optimal ist.

Wir haben

$$\Phi - \varphi(\boldsymbol{p}_n) = \frac{1}{a_k^{(n)}} [a_k^{(n)}\Phi - a_k^{(n)} \varphi(\boldsymbol{p}_n)] = \frac{1}{a_k^{(n)}} [[\Phi - a_k^{(n)} \varphi(\boldsymbol{p}_n)] + (a_k^{(n)} - 1) \Phi] .$$

Also ist

$$\|\Phi - \varphi(\boldsymbol{p}_n)\|_{B^*} \leqq \frac{1}{|a_k^{(n)}|} \|\Phi - a_k^{(n)} \varphi(\boldsymbol{p}_n\|_{B^*} + \frac{|1 - a_k^{(n)}|}{|a_k^{(n)}|} \|\Phi\|_{B^*} .$$

Wir haben bewiesen, daß gilt

$$\|\Phi - a_k^{(n)} \varphi(\mathfrak{p}_n)\|_{B^*} = \chi(\Phi, B, n)$$

und haben daher

$$\|\Phi - \varphi(p_n)\|_{B^*} \leqq \frac{1}{|a_n^{(n)}|} \chi(\Phi, B, n) + \frac{\chi(\Phi, B, n) \|h\|_B}{|a_k^{(n)}|} \|\Phi\|_{B^*}$$

woraus unsere Behauptung folgt.

In Satz 3.6 haben wir gezeigt, daß für ein Funktional, gegeben durch den Ausdruck (3.31), wobei $g(x)$ kein trigonometrisches Polynom ist, keine universal größenordnungsmäßig optimale Formel in Bezug auf $\mathfrak{H}$ existiert.

Wir wollen nun die Existenz einer universal größenordnungsmäßig optimalen Formel in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ beweisen. Hierzu müssen wir folgenden Satz beweisen.

Satz 3.8. *Es sei ein Funktional Φ gegeben*

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) f(x) \, \mathrm{d}x \tag{3.59}$$

wobei

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx} \tag{3.60}$$

und

$$\sum_{k=\infty}^{\infty} |b_n|^2 = A < \infty\,. \tag{3.61}$$

Dann ist die Formel $\varphi(\mathfrak{p}_n)$

$$\varphi(\mathfrak{p}_n)(f) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \tag{3.62}$$

wobei ist

$$p_k^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} b_s^{(n)} e^{is(2\pi/n)k} \tag{3.63}$$

und

$$b_s^{(n)} = b_s \quad \textit{für} \quad |s| < n/2\,, \tag{3.64}$$

$$b_s^{(n)} = \frac{b_{n/2} + b_{-n/2}}{2} \quad \textit{für} \quad s = n/2$$

eine universal größenordnungsmäßig optimale Formel in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ und Φ.

Beweis. I. Genauso wie in Satz 3.1 beweisen wir, daß das Funktional $\varphi(\boldsymbol{p}_n^*)$ wobei

$$\varphi(\boldsymbol{p}_n^*)(f) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)*} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \tag{3.65}$$

und

$$p_k^{(n)*} = \frac{1}{n} \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s\, C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, e^{is(2\pi/n)k} = \tag{3.66}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} b_{s+tn}\, C(n, s + tn, \boldsymbol{\eta})\, e^{is(2\pi/n)k}$$

ein optimales Funktional in Bezug auf Φ und $H_{\boldsymbol{\eta}}$ ist, denn auf gleiche Weise wie in Satz 3.1 beweisen wir, daß gilt

$$(\Phi - \varphi(\boldsymbol{p}_n^*))(f) = (f, \sigma_n^*)_{\boldsymbol{\eta}} \tag{3.67}$$

wobei

$$\sigma_n^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{b}_k \frac{e^{-ikx}}{\eta_{-k}^2} - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{s-ln}\, C(n, s - ln, \boldsymbol{\eta})\, \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2} =$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} e^{i(tn-s)x} \alpha_{tn-s}$$

und

$$\alpha_{tn-s} = \frac{\bar{b}_{-tn+s}}{\eta_{tn-s}^2} - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{s-ln} \frac{C(n, s - ln, \boldsymbol{\eta})}{\eta_{tn-s}^2} \tag{3.68}$$

und finden leicht, daß ist

$$\sigma_n^*\left(\frac{2\pi}{n} k\right) = 0\,.$$

Also ist $\varphi(\boldsymbol{p}_n^*)$ eine optimale Approximation.

Wir wollen noch einen Ausdruck einführen, welchen wir im weiteren brauchen werden. Es gilt

$$C(n, s - ln, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\eta_{-s}^2}{\eta_{ln-s}^2} C(n, s, \boldsymbol{\eta})\,, \tag{3.69}$$

$$C(n, s, \boldsymbol{\eta}) = C(n, -s, \boldsymbol{\eta})\,. \tag{3.70}$$

Diese Formeln folgen direkt aus (3.1), wenn wir in Betracht nehmen, daß gilt $\eta_{-n} = \eta_n$. Wir wollen die Ausdrücke für α_k, α_{-k}, $k = n - s$, $0 \leqq s \leqq [n/2]$ genauer bestimmen. Wir fangen mit dem Ausdruck für α_k an. Wir haben nun

$$\alpha_k = \bar{b}_{-k} \frac{1}{\eta_k^2} [1 - C(n, k, \boldsymbol{\eta})] - \bar{b}_{n-k} \frac{C(n, s, \boldsymbol{\eta})}{\eta_k^2} - \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0,1}}^{\infty} \bar{b}_{s-ln} \frac{C(n, s - ln, \boldsymbol{\eta})}{\eta_k^2} =$$

$$= \bar{b}_{-k} \frac{1}{\eta_k^2} [1 - C(n, k, \boldsymbol{\eta}] - \bar{b}_{n-k} \frac{C(n, s, \boldsymbol{\eta})}{\eta_k^2} - C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0,1}}^{\infty} \bar{b}_{s-ln} \frac{\eta_s^2}{\eta_k^2 \eta_{ln-s}^2} =$$

$$= C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, \bar{b}_{-k} \frac{\eta_s^2}{\eta_k^2} \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \eta_{tn-k}^{-2} - \bar{b}_{n-k} \frac{1}{\eta_k^2} C(n, s, \boldsymbol{\eta}) - C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, K_1 \frac{1}{\eta_{n+s}^2} B_k$$

und

$$|K_1| \leqq 2D\,, \quad B_k = \max_{\substack{i=s+ln \\ l=\ldots-1,0,1}} |b_i|\,.$$

Es ist nämlich

$$\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0,1}}^{\infty} \eta_{ln-s}^{-2} = \sum_{t=0}^{\infty} \eta_{[n(2-s/n)]+tn}^{-2} + \sum_{t=0}^{\infty} \eta_{[n(1+s/n)]+tn}^{-2} \leqq \eta_{2n-s}^{-2} D + \eta_{s+n}^{-2} D \leqq 2D\eta_{n+s}^{-2}\,.$$

Wir erhalten

$$\alpha_k = C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \frac{1}{\eta_k^2} [\bar{b}_{-k} - \bar{b}_{n-k}] + C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, K_2 \frac{B_k}{\eta_{s+n}^2} \tag{3.71}$$

und

$$|K_2| < 4D\,.$$

Auf ganz ähnliche Weise erhalten wir für

$$\alpha_{-k} = C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \frac{1}{\eta_k^2} [\bar{b}_k - \bar{b}_{-n+k}] + C(n, s, \boldsymbol{\eta})\, K_3 \frac{B_{-k}}{\eta_{s+n}^2} \tag{3.72}$$

wobei

$$B_{-k} = \max_{\substack{i=-s+ln \\ l=\ldots-1,0,1,\ldots}} |b_i|\,, \quad |K_3| \leqq 4D\,.$$

II. Für das Funktional $\varphi(\boldsymbol{p}_n)$ (vgl. (3.62)) können wir schreiben

$$(\Phi - \varphi(\boldsymbol{p}_n))(f) = (f, \sigma_n)_{\boldsymbol{\eta}}$$

wobei

$$\sigma_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{b}_k \frac{e^{-ikx}}{\eta_{-k}^2} - \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \bar{b}_s^{(n)} \frac{e^{i(tn-s)x}}{\eta_{tn-s}^2} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} e^{i(tn-s)} \beta_{tn-s}\,.$$

wir erhalten

$$\beta_k = 0 \quad \text{für} \quad |k| < \tfrac{1}{2}n\,. \tag{3.73}$$

Weiter ist für $\frac{1}{2}n < k = ln - s$, $-[\frac{1}{2}(n-1)] \leqq s < [\frac{1}{2}n]$

$$\beta_k = \frac{1}{\eta_k^2}\,[\bar{b}_{-k} - \bar{b}_s] \tag{3.74}$$

und für $k = ln - s < -\frac{1}{2}n$, $-[\frac{1}{2}(n-1)] \leqq s < [\frac{1}{2}n]$

$$\beta_k = \frac{1}{\eta_k^2}\,[\bar{b}_{-k} - \bar{b}_s]\,, \tag{3.75}$$

für gerade n

$$\beta_{n/2} = \frac{1}{\eta_{n/2}^2}\,[\bar{b}_{-n/2} - \bar{b}_{n/2}^{(n)}] = \frac{1}{2\eta_{n/2}^2}\,[\bar{b}_{-n/2} - \bar{b}_{n/2}]\,, \tag{3.76}$$

$$\beta_{-n/2} = \frac{1}{2\eta_{n/2}^2}\,[\bar{b}_{n/2} - \bar{b}_{-n/2}]\,, \tag{3.77}$$

und weiter für gerade n,

$$\frac{n}{2} < k = l - \frac{n}{2}, \quad \beta_k = \frac{1}{\eta_k^2}\left[\bar{b}_{-k} - \frac{\bar{b}_{-n/2}}{2} - \frac{\bar{b}_{n/2}}{2}\right], \tag{3.78}$$

$$-\frac{n}{2} > k = ln - \frac{n}{2}, \quad \beta_k = \frac{1}{\eta_k^2}\left[\bar{b}_{-k} - \frac{\bar{b}_{-n/2}}{2} - \frac{\bar{b}_{n/2}}{2}\right]. \tag{3.79}$$

III. Wir beweisen nun, daß ist

$$\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \geqq K^2\,\frac{1}{\eta_n^2}\,. \tag{3.80}$$

Es sei $b_{s_0} \neq 0$ und $b_s = 0$ für $|s| < s_0 \operatorname{sgn} s_0$. Wir setzen $h_n(x) = 1 - e^{inx \operatorname{sgn} s_0}$. Dann ist

$$h_n\left(\frac{2\pi}{n}\,j\right) = 0\,.$$

Es sei weiter

$$h_n^*(x) = h(x)\,e^{-is_0 x}\,.$$

Dann ist

$$h_n^*\left(\frac{2\pi}{n}\,j\right) = 0\,.$$

Wir erhalten

$$\Phi(h_n^*) = b_{s_0} - b_{s_0 - n \operatorname{sgn} s_0} .$$

Unter unserer Voraussetzung $b_k \to 0$ ist für genügend große n

$$|\Phi(h_n^*)| \geqq |\tfrac{1}{2} b_{s_0}| \geqq |2^{1/2} K| .$$

Weiter ist

$$\varphi(\boldsymbol{p}_n^*)(h_n^*) = 0 .$$

Also ist

$$(\Phi - \varphi(\boldsymbol{p}_n^*))(h_n^*) = \Phi(h_n^*)$$

und weil gilt

$$\|h_n^*\|_\gamma^2 = \eta_{s_0}^2 + \eta_{n - s_0 \operatorname{sgn} s_0}^2 \leqq 2\eta_n^2$$

erhalten wir

$$\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \geqq \frac{K^2}{\eta_n^2} .$$

IV. Wir beweisen nun, daß gilt

(3.81) $$1 \geqq C(n, s, \boldsymbol{\eta}) \geqq (1 + 2D)^{-1}$$

für

$$0 \leqq s \leqq \frac{n}{2} .$$

Es ist

$$C^{-1}(n, s, \boldsymbol{\eta}) = 1 + \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \neq 0}}^{\infty} \frac{\eta_{-s}^2}{\eta_{tn-s}^2} = 1 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\eta_{-s}^2}{\eta_{[n(1-s/n)]+tn}^2} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\eta_{-s}^2}{\eta_{[n(1+s/n)]+tn}^2} \leqq$$

$$\leqq 1 + \frac{\eta_s^2}{\eta_{[n(1-s/n)]}^2} D + \frac{\eta_s^2}{\eta_{[n(1+s/n)]}^2} D .$$

Unserer Voraussetzung nach ist $0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}n$, also ist

$$\left[n\left(1 - \frac{s}{n}\right)\right] \geqq s$$

und wir erhalten

$$C^{-1}(n, s, \boldsymbol{\eta}) \leqq 1 + 2D .$$

V. Wir bezeichnen

(3.82) $$\xi(n) = \frac{\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n)}{\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n)} .$$

Es ist

$$\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\beta_k|^2 \eta_k^2 , \tag{3.83}$$

$$\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \eta_k^2 .$$

Also ist

$$\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) = \sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s < [n/2] \\ l=-1,1}} \frac{1}{\eta_{ln-s}^2} |\bar{b}_{-ln+s} - \bar{b}_s|^2 + \frac{1}{2\eta_{n/2}^2} |b_{-n/2} - b_{n/2}|^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s < [n/2] \\ |l| \geqq 2}} \frac{1}{\eta_{ln-s}^2} |\bar{b}_{-ln+s} - \bar{b}_s|^2 + \sum_{\substack{l \geqq 2 \\ l \leqq -1}} \frac{1}{\eta_{ln-n/2}^2} \left| \bar{b}_{-ln+n/2} - \frac{\bar{b}_{n/2} + \bar{b}_{-n/2}}{2} \right|^2 .$$

Für ungerade n fallen alle Glieder mit $\frac{1}{2}n$ aus.

Wir erhalten unter Anwendung von (3.72) und (3.71)

$$\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) \leqq 2(1 + 2D)^2 \left[\sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ l=-1,+2}} |\alpha_{ln-s}|^2 \eta_{ln-s}^2 + \frac{4}{\eta_n^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 + \right.$$

$$+ 4^2 D^2 \sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ l=-1,1}} \frac{\eta_{ln-s}^2}{\eta_{n+|s|}^4} B_{ln-s}^2 + \sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ |l| \geqq 2}} \frac{1}{\eta_{ln-s}^2} |b_{-ln+s}|^2 +$$

$$\left. + \sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ |l| \geqq 2}} |b_s|^2 \frac{1}{\eta_{ln-s}^2} + \sum_{\substack{l \geqq 2 \\ l \leqq 1}} \frac{1}{\eta_{ln-[n/2]}^2} \left[|b_{ln-[n/2]}|^2 + |b_{[n/2]}|^2 + |b_{-[n/2]}]^2 \right] \right] .$$

Es ist jedoch

$$\sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ l=-1,1}} \frac{\eta_{ln-s}^2}{\eta_{n+|s|}^4} B_{ln-s}^2 \leqq \frac{1}{\eta_n^2} \sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ l=-1,1}} B_{ln-s}^2 \text{ und}$$

$$\sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ l=-1,1}} B_{ln-s}^2 \leqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 \leqq A .$$

Weiter ist

$$\sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s[n/2] \\ |l| \geqq 2}} \frac{|b_{-ln+s}|^2}{\eta_{ln-s}^2} \leqq A \,.\, D\eta_n^{-2} , \quad \sum_{|l| \geqq 2} \frac{1}{\eta_{ln-s}^2} \leqq D \frac{1}{\eta_n^2} .$$

Wir erhalten

$$\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p}_n) \leqq K_1^* \sum_{\substack{-[(n-1)/2] \leqq s \leqq [n/2] \\ l=-1,1}} |\alpha_{ln-s}|^2 \eta_{ln-s}^2 + K_2^* \frac{1}{\eta_n^2}$$

wobei K_1^* und K_2^* nicht von n abhängen.

Es ist jedoch

$$\sum_{\substack{-[(n-1)/2]\leq s\leq[n/2]\\ l=-1,1}} |\alpha_{ln-s}|^2\,\eta_{ln-s}^2 \leqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2\,\eta_k^2 = \chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n)\,.$$

Also ist

$$\xi(n) \leqq \frac{K_1^*\,\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n)}{\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n)} + \frac{K_2^*}{\eta_n^2\,\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n)} \leqq K_1^* + K_2^*\frac{1}{K^2} \leqq K_0\,.$$

Unsere Behauptung ist daher bewiesen.

Wir beweisen nun den Satz über die Eindeutigkeit der universal optimalen Formel.

Satz 3.9. *Es sei ein Funktional Φ gegeben definiert durch den Ausdruck* (3.59). *Es sei eine Formel $\varphi(\mathbf{p}_n)$ gegeben*

$$\varphi(\mathbf{p}_n)(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} a_j^{(n)}\,e^{is(2\pi/n)k}\,f\left(\frac{2\pi}{n}\,k\right). \tag{3.84}$$

Die notwendige Bedingung dafür, daß die Formel (3.84) *eine universal größenordnungsmäßig optimale Formel in Bezug auf $\mathfrak{H}_1$ und Φ ist, ist die Existenz eines N so, daß gilt*

$$a_s^{(n)} = b_s \quad \textit{für} \quad |s| < \frac{n}{2}\,, \quad n > N\,. \tag{3.85}$$

Beweis. I. Es sei zunächst n ungerade, d.i. $n = 2m + 1$. Sowie im Beweis zu Satz 3.6 (vgl. (3.34)) ist

$$\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \leqq \frac{K^*}{\eta_{m+1}^2}\,.$$

Wir setzen nun voraus, daß (3.85) nicht gilt. Dann existiert eine Folge n_j, $n_{j+1} > n_j$ und s_j, $|s_j| < n_j/2$ so, daß ist

$$|a_{s_j}^{(n_j)} - b_{s_j}| \geqq \varepsilon_j > 0\,.$$

Daher ist

$$\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \geqq \frac{K^{**}\varepsilon_j^2}{\eta_m^2}$$

wobei K^{**} nicht von n abhängt. Zum Widerspruch kommen wir nun auf gleiche weise wie in Satz 3.4.

II. Es sei jetzt n gerade, d.i. $n = 2m$. Genau wie im Beweis zu Satz 3.6 erhalten wir

$$\chi^2(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \leqq \frac{K^*}{\eta_m^2}\,.$$

Die Bedingung (3.85) gelte nicht. Dann ist

$$\varrho^{*2}(\Phi, \boldsymbol{\eta}, n) \geqq \frac{K^{**}\varepsilon_j^2}{\eta_{m-1}^2}$$

wobei ε_j einen analogen Sinn wie in I hat.

Wir gelangen auf gleiche Weise wie bisher zum Widerspruch. Satz 3.9 ist bewiesen.

Wir bemerken, dass aus Satz 3.9 folgt: die universal größenordnungsmäßig optimale Formel, für ungerade n ist eindeutig bestimmt (bis auf eine endliche Anzahl der Indizes n). Für gerade n ist dies nicht der Fall. Es besteht eine gewisse Freiheit in der Wahl der Koeffizienten $a_{n/2}$. Wenn die Funktion $g(x)$ jedoch eine gerade Funktion ist d.i. $b_k = b_{-k}$, dann läßt sich genau wie bisher zeigen, daß die Formel eindeutig ist.

(Fortsetzung)