Aplikace matematiky

František Zelinka

Poznámka ke kontrole řešení soustavy lineárních algebraických rovnic zpětnou substitucí

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 3, 241–247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103166

POZNÁMKA KE KONTROLE ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC ZPĚTNOU SUBSTITUCÍ

FRANTIŠEK ZELINKA

(Došlo dne 28. března 1967.)

Po vyřešení soustavy lineárních algebraických rovnic se provádí obvykle kontrola početních nepřesností zpětnou substitucí do původních rovnic. V praktických případech se často spokojíme tím, že soustava je splněna až na jistý reziduový vektor, který má podle našeho soudu „dostatečně malý“ modul. (Také některé metody upřesňování kořenů jsou založeny na zpětné substituci). V tomto článku se zabývám otázkou, zda lze vždy takovou kontrolu považovat za postačující kriterium pro to, aby nalezené řešení bylo možno přijmout za aproximaci přesného řešení soustavy a vyšetřuji příčiny, jejichž vlivem může toto kriterium selhávat.

Jako ilustraci uvedu nejprve příklad:

Řešením tzv. Wilsonovy soustavy

$$\begin{aligned}
5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 23 &= 0\,,\\
7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 - 32 &= 0\,,\\
6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 - 33 &= 0\,,\\
5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 - 31 &= 0
\end{aligned}$$

se špatně podmíněnou maticí $\mathbf{W}$ je $\mathbf{x} = [1; 1; 1; 1]'$. Hledejme vektor $\mathbf{x}(\varepsilon) = [x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), x_3(\varepsilon), x_4(\varepsilon)]'$ splňující např. vztah $\mathbf{W}\mathbf{x}(\varepsilon) = [23 + \varepsilon; 32 - \varepsilon; 33 - \varepsilon; 31 + \varepsilon]'$. S užitím inverzní matice $\mathbf{W}^{-1}$ dostaneme $\mathbf{x}(\varepsilon) = [1 + 136\varepsilon; 1 - 82\varepsilon; 1 - 35\varepsilon; 1 + 21\varepsilon]'$. Dosazujeme-li postupně $\varepsilon = 1$; $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$ atd. zjistíme: Vektoru $\mathbf{x}^{(1)} = [14{,}6; -7{,}2; -2{,}5; 3{,}1]'$ přísluší reziduový vektor $\mathbf{r}^{(1)} = 0{,}1[1; -1; -1; 1]'$. Vektor $\mathbf{x}^{(1)}$ nelze považovat za aproximaci přesného řešení $\mathbf{x}$, přestože modul reziduového vektoru $|\mathbf{r}^{(1)}| = 0{,}2$. Dokonce ani vektor $\mathbf{x}^{(2)} = [1{,}136; 0{,}918; 0{,}965; 1{,}021]'$ není vhodnou aproximací přesného řešení, přestože reziduový vektor $\mathbf{r}^{(2)} = 0{,}001[1; -1; -1; 1]'$ má modul stokrát menší než $\mathbf{r}^{(1)}$.

Lze však najít soustavy s koeficienty téhož řádu jako u soustavy Wilsonovy, kde při stejných nepřesnostech ve složkách řešení bude modul reziduového vektoru ještě menší.

1. Vyjděme nejprve z předpokladu, že koeficienty i pravé strany rovnic soustavy jsou dány přesně, a uvažujme, že byla rozřešena soustava n lineárních rovnic o n neznámých

$$(1.1) \qquad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

s nenulovým determinantem, (i když se jeho hodnota liší případně od nuly velmi málo). Provádějme kontrolu řešení zpětnou substitucí a zjišťujme, jaké minimální délky může nabýt reziduový vektor, je-li délka vektoru nepřesností předem stanovena.

Vektor nepřesností, jichž jsme se dopustili v řešení soustavy označme $\boldsymbol{u}$, odpovídající reziduový vektor budiž označen $\boldsymbol{r}$. Pak je

$$(1.2) \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{r}\,.$$

Poněvadž vektor $\boldsymbol{x}$ splňuje rovnici (1.1) přesně, z rovnice (1.2) plyne

$$\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{r}\,.$$

Naším úkolem je především určit minimální délku vektoru $\boldsymbol{r}$ v závislosti na délce vektoru $\boldsymbol{u}$. Hledejme tedy minimum skalárního součinu $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|^2$ v závislosti na konstantním $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^2$. Tento úkol je ekvivalentní problému: určit maximum skalárního součinu $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^2$, pokud $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|^2 =$ konst., který snadno vyřešíme geometricky. Za předpokladu $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ je

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{Au}, \boldsymbol{Au}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A'Au})\,.$$

Na pravé straně je reálná positivně definitní kvadratická forma ve složkách vektoru $\boldsymbol{u}$ se symetrickou positivně definitní maticí $\boldsymbol{A'A}$. Při $|\boldsymbol{r}| =$ konst. dostáváme

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A'Au}) = \text{konst.}\,,$$

což je rovnice kvadriky v n – rozměrném eukleidovském prostoru $\mathscr{E}_n$. (V trojrozměrném prostoru představuje tato rovnice elipsoid.)
Poněvadž $\boldsymbol{A'A}$ je reálná symetrická matice, platí ([2], kap. 10, § 15, věta 4 o extremální vlastnosti charakteristických čísel dané symetrické matice):

$$(1.3) \qquad \mu_{\min}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \leqq (\boldsymbol{A'Au}, \boldsymbol{u}) \leqq \mu_{\max}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\,,$$

kde μ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ jsou charakteristická čísla matice $\boldsymbol{A'A}$, $\mu_{\min} = \min(\mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_n)$, $\mu_{\max} = \max(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Délka vektoru $\boldsymbol{u}$ je nejvýše rovna hlavní poloose kvadriky, nejméně té nejmenší. Podle (1.3) nejdelší poloosa má délku $|\boldsymbol{r}|\,(\mu_{\min})^{-\frac{1}{2}}$, nejkratší $|\boldsymbol{r}|\,(\mu_{\max})^{-\frac{1}{2}}$, platí tedy

$$|\boldsymbol{r}|\,(\mu_{\min})^{-\frac{1}{2}} \geqq \boldsymbol{u} \geqq |\boldsymbol{r}|\,(\mu_{\max})^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Označme $\boldsymbol{u}^*$ vektor ve směru nejdelší osy. Pro vektor $\boldsymbol{u}^*$ a k němu příslušný reziduový $\boldsymbol{r}^*$ platí v levé části znaménko rovnosti. Vektor $\boldsymbol{u}^*$ je kolineární s charakteristickým vektorem matice $\boldsymbol{A'A}$, jenž náleží k jejímu nejmenšímu charakteristickému číslu.

Takto určený vektor $\boldsymbol{r}^*$ splňuje požadavky kladené naší otázkou: jeho délka $|\boldsymbol{r}^*|$ je minimální při konstantním $|\boldsymbol{u}^*|$:

$$|\boldsymbol{r}^*| = |\boldsymbol{u}^*| \, (\mu_{\min})^{\frac{1}{2}} \; ; \tag{1.4}$$

pro souměrnou matici $\boldsymbol{A}$ platí pak obdobně

$$|\boldsymbol{r}^*| = |\boldsymbol{u}^*| \, |\lambda_i|_{\min} \, , \tag{1.4'}$$

kde λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou charakteristická čísla matice $\boldsymbol{A}$.

Zavedeme-li pro charakterizování stability soustavy P a H číslo podmíněnosti pro její matici a označíme je $\varrho(\boldsymbol{A})$ a $\eta(\boldsymbol{A})$ ([3] odst. 2, § 15, str. 152), můžeme (1.4) a (1.4)′ přepsat ve tvaru

$$|\boldsymbol{r}^*| = \frac{|\boldsymbol{u}^*|}{\eta(\boldsymbol{A})} \, (\mu_{\max})^{\frac{1}{2}} \quad \text{resp.} \quad |\boldsymbol{r}^*| = \frac{|\boldsymbol{u}^*|}{\varrho(\boldsymbol{A})} \, |\lambda_i|_{\max} \, . \tag{1.5}$$

Maximální charakteristické číslo matice $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ a rovněž i $|\lambda_i|_{\max}$, kde λ_i je charakteristické číslo matice $\boldsymbol{A}$, je možno shora omezit pomocí hodnot prvků matice $\boldsymbol{A}$, neboť

$$|\lambda_i|_{\max} \leqq (\mu_{\max})^{\frac{1}{2}} \leqq N(\boldsymbol{A}) \, , \tag{1.6}$$

kde $N(\boldsymbol{A})$ je norma matice $\boldsymbol{A}$, $N(\boldsymbol{A}) = (\sum_{i,k=1}^{n} a^2)^{\frac{1}{2}}$, a_{ik} je prvek této matice.

Uvažujme nyní množinu $\mathcal{M}$ všech reálných (připusťme na okamžik i možnost singulárních) matic řádu n takových, že $N(\boldsymbol{A}) \leqq K$, ($K > 0$, konstantní). Zvolíme-li libovolné malé číslo $\varepsilon > 0$, lze k němu najít takovou matici $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$ (resp. takovou souměrnou matici $\boldsymbol{S} \in \mathcal{M}$), pro níž při konstantním $|\boldsymbol{u}^*|$ platí $|\boldsymbol{r}^*| < \varepsilon$. Stačí, aby

$$\eta(\boldsymbol{M}) > \frac{|\boldsymbol{u}^*|}{\varepsilon} \, N(\boldsymbol{A}) \, , \quad \text{resp. aby} \quad \varrho(\boldsymbol{S}) > \frac{|\boldsymbol{u}^*|}{\varepsilon} \, N(\boldsymbol{A}) \, , \tag{1.7}$$

kde $|\boldsymbol{u}^*|$ je konstantní – dané, $N(\boldsymbol{A})$ je podle předpokladu shora ohraničené, $\varepsilon > 0$ předem zvolené číslo. Nerovnost (1.7) splní vždy kterákoliv matice singulární $\boldsymbol{T} \in \mathcal{M}$. Vyloučíme-li případ singulárních matic, utvořme např. takovou regulární matici $\boldsymbol{M}(\delta) \in \mathcal{M}$, jejíž jediný prvek se liší od stejnolehlého prvku singulární matice o $\delta > 0$, kde δ je libovolné malé číslo. Zmenšujeme-li postupně číslo δ, roste $\eta(\boldsymbol{M}(\delta))$, takže dojdeme nutně k matici $\boldsymbol{M}(\delta_1)$, jež uvedenou nerovnost splňuje.

Znásobíme-li soustavu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ libovolným reálným číslem $c \neq 0$, platí pro $\lambda_i^{(1)}$ nově vzniklé matice $\boldsymbol{A}_1 = c\boldsymbol{A}$ vztah

$$|\lambda_i^{(1)}|_{\max} = |c| \, |\lambda_i|_{\max}$$

a z rovnice (1.6) vyplývá, že rovněž

$$|\boldsymbol{r}^{(1)*}| = |c| \, |\boldsymbol{r}^*| \, ,$$

neboť pokud $|c|$ nedosahuje neomezeně velikých hodnot, je $\varrho(\boldsymbol{A}_1) = \varrho(\boldsymbol{A})$. Volíme-li $c \in (0; 1)$, pak současně s délkou reziduového vektoru se zmenší i norma matice soustavy, neboť $N(\boldsymbol{A}_1) = |c|\, N(\boldsymbol{A}) < N(\boldsymbol{A})$.

Čím je tedy matice soustavy hůře podmíněna a čím je norma matice menší, tím menší délky reziduového vektoru můžeme dosáhnout při požadované konstantní délce vektoru nepřesností, (a tedy tím je zpětná substituce méně průkazným kriteriem pro přesnost řešení).

2. Ve většině technických problémů, jež vedou na soustavy lineárních algebraických rovnic, jsou však prvky matice soustavy i pravé strany výsledky měření či výpočtů, a jsou tedy známy jen s určitým stupněm přesnosti.

Nechť $\boldsymbol{x}$ je řešením soustavy

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \tag{2.1}$$

kde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou dány přesně. $\boldsymbol{A}$ je reálná regulární matice, $\boldsymbol{b}$ reálný vektor. Protože prvky matice $\boldsymbol{A}$ i pravé strany byly získány měřením, musíme místo matice $\boldsymbol{A}$ uvažovat matici $\boldsymbol{A} + {}^0\boldsymbol{A}$, kde ${}^0\boldsymbol{A}$ je matice nepřesností, a rovněž vektor $\boldsymbol{b}$ je znám jen přibližně s nepřesností ${}^0\boldsymbol{b}$. Analyticky lze popsanou soustavu zapsat ve tvaru:

$$(\boldsymbol{A} + {}^0\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} + {}^0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + {}^0\boldsymbol{b}\,, \tag{2.2}$$

kde ${}^0\boldsymbol{A} = [{}^0a_{ik}]$, ${}^0\boldsymbol{b} = [{}^0b_1, \ldots, {}^0b_n]'$, a konečně vektor ${}^0\boldsymbol{x} = [{}^0x_1, \ldots, {}^0x_n]'$ značí změnu v řešení, způsobenou změnou matice $\boldsymbol{A}$ o ${}^0\boldsymbol{A}$ a změnou $\boldsymbol{b}$ o ${}^0\boldsymbol{b}$. Přitom nechť

$${}^0a_{ik} \in \langle -\alpha_{ik}, \alpha_{ik} \rangle\,, \quad {}^0b_i \in \langle -\beta_i, \beta_i \rangle\,, \tag{2.3}$$

kde α_{ik}, β_i jsou horní hranice absolutních nepřesností příslušných prvků a_{ik} matice $\boldsymbol{A}$ a složek b_i vektoru $\boldsymbol{b}$.

Matici $\boldsymbol{A}$ budeme považovat za symetrickou, positivně definitní. (Není-li tato podmínka splněna, lze soustavu (2.1) upravit na

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{b}\,,$$

kde $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ této podmínce vyhovuje.) Poněvadž $\boldsymbol{A}$ je symetrická, je i ${}^0\boldsymbol{A}$ symetrická, i když obecně nemusí být positivně definitní.

Uvažujme posloupnost symetrických, positivně definitních matic řádu n

$${}^1\boldsymbol{A},\ {}^2\boldsymbol{A},\ {}^3\boldsymbol{A},\ \ldots\,, \tag{2.4}$$

takovou, že

$$\langle \lambda_{\min}^{({}^1\boldsymbol{A})}, \lambda_{\max}^{({}^1\boldsymbol{A})} \rangle \subset \langle \lambda_{\min}^{({}^2\boldsymbol{A})}, \lambda_{\max}^{({}^2\boldsymbol{A})} \rangle \subset \ldots\,, \tag{2.5}$$

kde $\lambda_i^{({}^r\boldsymbol{A})}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ označuji charakteristické číslo matice ${}^r\boldsymbol{A}$, přičemž prvky všech těchto matic jsou stejného řádu. Takovou posloupnost je vždy možno sestrojit (např. [4], odst. 5).

Dosazujme postupně matice (2.4) za $\mathbf{A}$ do soustavy (2.2).

Zvolme $K > 0$ libovolně velké kladné číslo, pak v posloupnosti (2.4) lze najít natolik špatně podmíněnou matici ${}^k\mathbf{A}$, u níž je možno provést takové změny prvků v mezích daných podmínkami (2.3), aby jim odpovídal v soustavě (2.2) pro změny $|{}^0\mathbf{x}|$ interval $\langle 0; K \rangle$.

Že taková matice $\mathbf{A} = {}^k\mathbf{A}$ skutečně existuje, ověříme její konstrukcí a konstrukcí vhodné matice změn ${}^0\mathbf{A}$. Označme $\lambda_i^{(\mathbf{A})}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, charakteristická čísla matice $\mathbf{A}$, a obdobně $\lambda_i^{(\mathbf{A}+{}^0\mathbf{A})}$ charakteristická čísla matice $\mathbf{A} + {}^0\mathbf{A}$ a na soustavu (2.2) aplikujme výsledky předchozího odstavce (vztah (1.4)'). Dostáváme

$$|\mathbf{x} + {}^0\mathbf{x}|_{\max} = \frac{|\mathbf{b} + {}^0\mathbf{b}|}{|\lambda_i^{(\mathbf{A}+{}^0\mathbf{A})}|_{\min}}.$$

Poněvadž platí $|\mathbf{x} + {}^0\mathbf{x}| \leqq |\mathbf{x}| + |{}^0\mathbf{x}|$, dostaneme zde

$$|\mathbf{x}| + |{}^0\mathbf{x}| \geqq \frac{|\mathbf{b} + {}^0\mathbf{b}|}{|\lambda_i^{(\mathbf{A}+{}^0\mathbf{A})}|_{\min}},$$

odkud

$$|{}^0\mathbf{x}| \geqq \frac{|\mathbf{b} + {}^0\mathbf{b}|}{|\lambda_i^{(\mathbf{A}+{}^0\mathbf{A})}|_{\min}} - |\mathbf{x}|.$$

S užitím toho, že $|\mathbf{x}| = |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}|$, dostaneme na základě (2.1) a ([4], odst. 3):

$$|{}^0\mathbf{x}| \geqq \frac{|\mathbf{b} + {}^0\mathbf{b}|}{|\lambda_i^{(\mathbf{A}+{}^0\mathbf{A})}|_{\max}} \varrho(\mathbf{A} + {}^0\mathbf{A}) - \frac{|\mathbf{b}|}{\lambda_{\max}^{(\mathbf{A})}} \varrho(\mathbf{A}),$$

odkud

$$|{}^0\mathbf{x}| \geqq \frac{|\mathbf{b}|}{\lambda_{\max}^{(\mathbf{A})}} \varrho(\mathbf{A}) \left\{ \frac{\lambda_{\max}^{(\mathbf{A})}}{|\lambda_i^{(\mathbf{A}+{}^0\mathbf{A})}|_{\max}} \frac{|\mathbf{b} + {}^0\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} \frac{\varrho(\mathbf{A} + {}^0\mathbf{A})}{\varrho(\mathbf{A})} - 1 \right\}. \tag{2.6}$$

Zvolíme-li ${}^0\mathbf{A}$ skalární matici ${}^0\mathbf{A} = -[\delta]$, kde $0 < \delta < \min \alpha_{ik}$, $\delta \leqq \lambda_{\min}^{(\mathbf{A})}$, a vektor ${}^0\mathbf{b}$ tak, aby pro všechna $\mathbf{b}_i$ bylo $\operatorname{sgn} \mathbf{b}_i = \operatorname{sgn} {}^0\mathbf{b}_i$, pak

$$\lambda_{\max}^{(\mathbf{A})} > |\lambda_i^{(\mathbf{A}+{}^0\mathbf{A})}|_{\max} = \lambda_{\max}^{(\mathbf{A})} - \delta,$$

$$|\mathbf{b} + {}^0\mathbf{b}| \geqq |\mathbf{b}|,$$

a konečně

$$\varrho(\mathbf{A} + {}^0\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\max}^{(\mathbf{A})} - \delta}{\lambda_{\min}^{(\mathbf{A})} - \delta} > \frac{\lambda_{\max}^{(\mathbf{A})}}{\lambda_{\min}^{(\mathbf{A})}} = \varrho(\mathbf{A}).$$

Pravá strana nerovnosti (2.6) je nyní kladná pro každou z matic $\mathbf{A} = {}^r\mathbf{A}$, kde ${}^r\mathbf{A}$ je libovolná matice z posloupnosti (2.4). Poněvadž prvky matic ${}^1\mathbf{A}$, ${}^2\mathbf{A}$, ${}^3\mathbf{A}$, ... jsou téhož řádu, je $|\mathbf{b}|/\lambda_{\max}^{(\mathbf{A})}$ zdola ohraničené; $\varrho(\mathbf{A})$ roste, neboť $\varrho({}^r\mathbf{A}) < \varrho({}^{r+1}\mathbf{A})$ a současně $\lambda_{\min}^{(\mathbf{A})}$ klesá, neboť $\lambda_{\min}^{({}^r\mathbf{A})} > \lambda_{\min}^{({}^{r+1}\mathbf{A})}$. Označme ${}^s\mathbf{A}$ matici, pro níž je $\lambda_{\min}^{({}^s\mathbf{A})} <$

$< \min \alpha_{ii}$. Prvky matice ${}^s\boldsymbol{A}$ se liší od stejnolehlých prvků jisté singulární matice velmi málo a zvolíme-li $\delta = \lambda_{\min}^{(\boldsymbol{A})}$, je $\boldsymbol{A} + {}^0\boldsymbol{A}$ singulární matice, pro níž $\varrho(\boldsymbol{A} + {}^0\boldsymbol{A})$ je neohraničené, zatímco $\varrho(\boldsymbol{A})$ je konečné, a tedy $|{}^0\boldsymbol{x}|$ nabývá neomezeně velikých hodnot.

Poněvadž ke kterékoliv z matic (2.4) lze najít také takovou matici ${}^0\boldsymbol{A}$ a takový vektor ${}^0\boldsymbol{b}$, jejichž prvky vyhovují podmínkám (2.3) tak, aby $|{}^0\boldsymbol{x}| = 0$, (stačí např. zvolit ${}^0a_{ik} = k\alpha_{ik}$, ${}^0b_i = k\beta_i$, kde k je libovolné číslo takové, aby ${}^0a_{ik}$, ${}^0b_i$ splnily podmínky (2.3)), odpovídá změnám prvků matice $\boldsymbol{A}$ v mezích přesnosti, pro změny $|{}^0\boldsymbol{x}|$ interval $\langle 0, \infty)$.

Kontrola dosazením je tedy v případě špatně podmíněné matice soustavy neprůkazná. Zvolíme-li $|{}^0\boldsymbol{x}|$ a $|{}^0\boldsymbol{x}^*|$ třeba značně odlišné, může při špatně podmíněné matici soustavy $\boldsymbol{A}$ nastat případ, že při jistých změnách prvků a_{ik}, b_i v mezích přesnosti, vyhoví dané soustavě jak vektor $\boldsymbol{x} + {}^0\boldsymbol{x}$, tak i vektor $\boldsymbol{x} + {}^0\boldsymbol{x}^*$.

Je-li matice špatně podmíněná, pak roste i vliv zaokrouhlování, které je nutné při počítání na stroji, na přesnost výsledku. Je-li počet rovnic velký, obsahuje početní algoritmus množství aritmetických operací a vliv zaokrouhlování může dosáhnout takové výše, že výsledky nejsou k praktické potřebě. Přitom však tyto nepřesné výsledky, jak bylo právě ukázáno, mohou dané soustavě vyhovovat.

Literatura

[1] *Tupper:* Ill conditioned linear equations. Math. Gaz., vol. XLII, 1958, str. 299—300.
[2] *Демидович-Марон:* Основы вычислительной математики Москва 1963, Физматгиз.
[3] *Фаддеев-Фаддеева:* Вычислительные методы линейной алгебры. Москва 1963, Физматгиз.
[4] *Neumann-Goldstine:* Numerical inverting of matrices of high order. BAMS., 1947/2, November.

Резюме

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ОБРАТНОЙ ПОДСТАНОВКИ

ФРАНТИШЕК ЗЕЛИНКА (FRANTIŠEK ZELINKA)

В оценке точности решения системы линейных алгебраических уравнений путем обратной подстановки часто довольствуются тем, что, подставляя это решение в данную систему, получают резидуальный вектор с „достаточно малым" модулем.

В настоящей статье дается ответ на вопрос С. Й. Туппера [1]: „Какова минимальная длина резидуального вектора, если длина вектора погрешностей в ре-

шении остается постоянной“. Исследуется влияние плохой обусловленности матрицы системы на длину резидуального вектора.

В заключение показано, что, если элементы матрицы системы и свободные члены являются приближенными числами, может в пределах точности удовлетворять данной системе вектор, который нельзя принять в качестве приближения точному решению.

Zusammenfassung

ÜBER DIE KONTROLLE DER LÖSUNG DES LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMS MIT HILFE DER RÜCKWÄRTIGEN SUBSTITUTION

FRANTIŠEK ZELINKA

Bei der Kontrolle der Lösung eines linearen Gleichungssystems befriedigt man sich oft dadurch, dass sich durch Einsetzen dieser Lösung in gegebenes System ein Residualvektor mit „genügend kleinem“ Modull ergibt.

In diesem Artikel wird die Antwort auf die Frage von S. J. Tupper [1] gegeben: Man sucht die minimale Länge des Residualvektors, wenn die Länge des Vektors der Ungenauigkeiten in der Lösung konstant bleibt.

Es wird der Einfluss der schlechten Bedingung der Matrix des Systems auf die Länge des Residualvektors untersucht.

Zum Schluss zeigt man, dass, wenn die Elemente der Matrix des Systems un die rechten Seiten der Gleichungen Näherungswerte sind, eine solche Lösung, die weit von der Aproximation der genauen Lösung ist, dem System in gegebenen Fehlerschranken genügen kann.

Adresa autora: František Zelinka, Severní 772, Hradec Králové.