Karel Beneš

Vliv driftu a mřížkového proudu počítacích stejnosměrných zesilovačů na přesnost řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 3, 219–225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103164`

VLIV DRIFTU A MŘÍŽKOVÉHO PROUDU POČÍTACÍCH STEJNOSMĚRNÝCH ZESILOVAČŮ NA PŘESNOST ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍCH LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Karel Beneš

(Došlo dne 27. října 1966.)

V článku [1] bylo ukázáno, že při řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty v případě stabilního řešení, kdy kořeny charakteristické rovnice jsou záporné, nebo reálné části kořenů jsou menší nebo rovny nule, chyba v řešení vlivem driftu a mřížkového proudu s časem neomezeně nenarůstá. Tato práce se zabývá vlivem driftu a mřížkového proudu na řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic, jejichž pravá strana $q_{(t)}$ je spojitou funkcí nezávisle proměnné t.

1. VLIV DRIFTU A MŘÍŽKOVÉHO PROUDU NA PŘESNOST ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU

a) Řešení s vynulovanou jednotkou. Řešením diferenciální rovnice 1. řádu

(1) $$y' + ay = q_{(t)}$$

(a = konst., $q_{(t)}$ je spojitá) je funkce

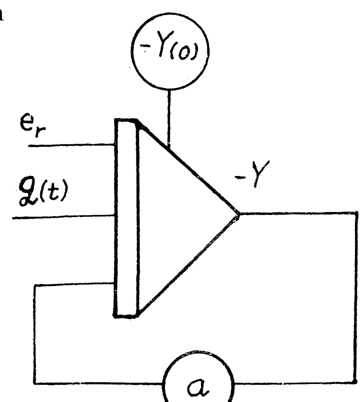
(2) $$y = e^{-at}\left(\int q_{(t)} e^{at}\, \mathrm{d}t + k\right),$$

kde k určíme z počáteční podmínky $y_{(0)}$.

b) Řešení s roznulovanou jednotkou. Schéma na obr. 1 je popsáno rovnicí

$$-Y = a\int_0^t Y\,\mathrm{d}t - e_r\int_0^t \mathrm{d}t - \int_0^t q_{(t)}\,\mathrm{d}t - Y_{(0)}$$

(3) $$Y' + aY = q_{(t)} + e_r\,,$$



Obr. 1. Programové schéma pro řešení nehomogenní rovnice 1. řádu s roznulovanou počítací jednotkou.

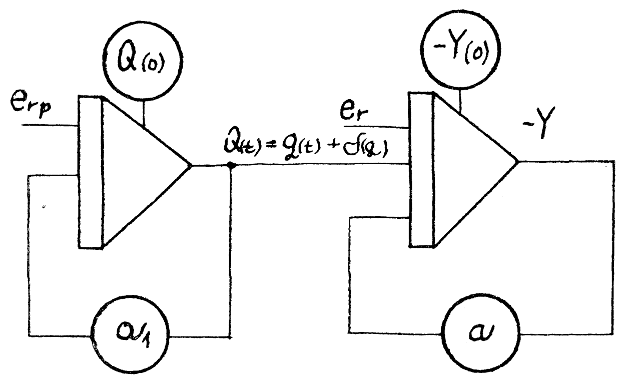
jejímž řešením je funkce (e_r je konst.)

$$Y = e^{-at}\left(\int q_{(t)}\, e^{at}\, \mathrm{d}t + K\right) + \frac{e_r}{a}, \tag{4}$$

$a \neq 0$. Chyba řešení

$$\delta_{(y)} = Y - y = \frac{e_r}{a} + e^{-at}(K - k)\,. \tag{5}$$

Chyba řešení nebude tedy s časem neomezeně narůstat v tom případě, bude-li $a > 0$. Maximální absolutní hodnota chyby $|\delta_{(y)}|_{\max} = |e_r/a|$.



Obr. 2. Programové schéma pro řešení nehomogenní rovnice 1. řádu s roznulovanou počítací jednotkou a nepřesně vymodelovanou pravou stranou.

Modelujeme-li pravou stranu $q_{(t)}$ řešením vhodné diferenciální rovnice, potom vlivem driftu a mřížkového proudu bude i pravá strana $q_{(t)}$ modelována s chybou $\delta_{(q)} = Q_{(t)} - q_{(t)}$. Schéma zapojení pro tento případ je na obr. 2. Schéma je popsáno rovnicí

$$Y' + aY = Q_{(t)} + e_r\,, \tag{6}$$

$Q_{(t)} = q_{(t)} + \delta_{(q)}$, jejímž řešením je funkce

$$Y = e^{-at}\left(\int q_{(t)}\, e^{at}\, \mathrm{d}t + \int \delta_{(q)}\, e^{at}\, \mathrm{d}t + K\right) + \frac{e_r}{a}\,. \tag{7}$$

Je-li pravá strana $q_{(t)}$ řešením homogenní diferenciální rovnice 1. řádu $q'_{(t)} + a_1 q_{(t)} = 0$, potom chyba vlivem driftu a mřížkového proudu je dle l. [1], rovnice (9) $\delta_{(q)} = e_{rp}[\exp(-a_1 t) - 1]/a_1$, kde e_{rp} je rušivé napětí na vstupu integrátoru, který řeší rovnici $q'_{(t)} + a_1 q_{(t)} = 0$. Řešením rovnice (6) je potom funkce

$$Y = e^{-at}\left(\int q_{(t)}\, e^{at}\, \mathrm{d}t + K\right) + \frac{e_{rp}}{a_1}\left(\frac{1}{a - a_1}\, e^{-a_1 t} - \frac{1}{a}\right) + \frac{e_r}{a}, \tag{8}$$

$a \neq a_1 \neq 0$. Chyba řešení

$$(9) \qquad \delta_{(y)} = Y - y = \frac{e_r}{a} + \frac{e_{rp}}{a_1}\left(\frac{1}{a - a_1}\, e^{-a_1 t} - \frac{1}{a}\right) + (K - k)\, e^{-at},$$

t.j. při a, $a_1 > 0$ nebude chyba s časem neomezeně narůstat. Maximální absolutní hodnota chyby $|\delta_{(y)}|_{\max} = |e_r/a - e_{rp}/aa_1|$.

2. VLIV DRIFTU A MŘÍŽKOVÉHO PROUDU NA PŘESNOST ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 2. ŘÁDU

a) Řešení s vynulovanými jednotkami. Hledejme řešení diferenciální rovnice

$$(10) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = q_{(t)}\,.$$

Nechť y_1, y_2 je fundamentální systém řešení odpovídající homogenní rovnici (11)

$$(11) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\,.$$

Řešení rovnice (10) můžeme psát ve tvaru (při použití metody variace konstant)

$$(12) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2\,,$$

kde c_1, c_2 jsou funkce nezávisle proměnné t. Tyto funkce c_1 a c_2 určíme z rovnic

$$(13) \qquad c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0\,, \quad c_1' y_1' + c_2' y_2' = q_{(t)}\,.$$

V případě, kdy charakteristická rovnice příslušná rovnice (11) má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$, má fundamentální systém odpovídající rovnice (11) tvar $y_1 = e^{\lambda_1 t}$; $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ a řešení rovnice (10) má tvar

$$(14) \quad y = \frac{-\,e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\int q_{(t)}\, e^{-\lambda_1 t}\, \mathrm{d}t + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\int q_{(t)}\, e^{-\lambda_2 t}\, \mathrm{d}t + k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}\,.$$

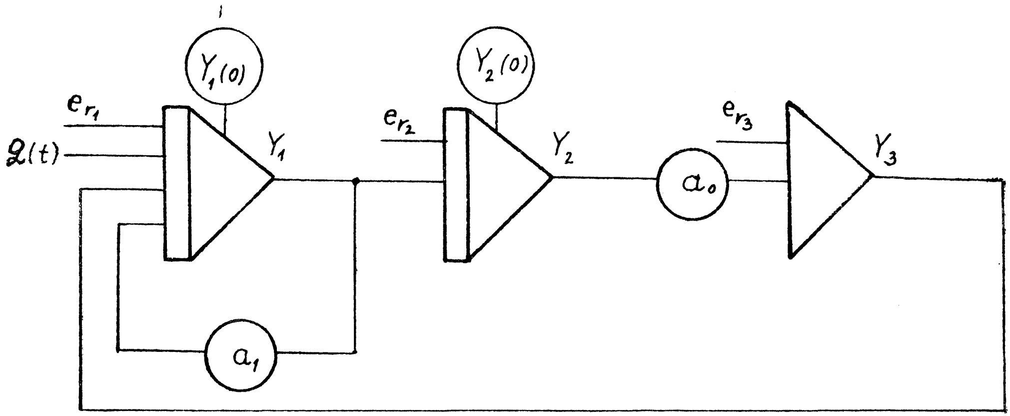
V případě, kdy charakteristická rovnice příslušná rovnici (11) má dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, má fundamentální systém rovnice (11) tvar $y_1 = e^{\lambda t}$, $y_2 = te^{\lambda t}$ a řešení rovnice (10) má tvar

$$(15) \qquad y = -e^{\lambda t}\int q_{(t)} t e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t + te^{\lambda t}\int q_{(t)} e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t + e^{\lambda t}(k_1 + tk_2)\,.$$

V případě, kdy charakteristická rovnice příslušná rovnice (11) má kořeny komplexně sdružené $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, můžeme fundamentální systém rovnice (11) psát ve tvaru $y_1 = e^{at}\cos bt$, $y_2 = e^{at}\sin bt$ a řešení rovnice (10) má tvar

$$(16) \qquad y = -\frac{e^{at}\cos bt}{b}\int q_{(t)} e^{-at}\sin bt\, \mathrm{d}t + k_1 e^{at}\cos bt +$$
$$+ \frac{e^{at}\sin bt}{b}\int q_{(t)} e^{-at}\cos bt\, \mathrm{d}t + k_2 e^{at}\sin bt\,.$$

b) Řešení s roznulovanými jednotkami. Schéma na obr. 3 je popsáno systémem rovnic



Obr. 3. Programové schéma pro řešení nehomogenní rovnice 2. řádu s roznulovanými počítacími jednotkami.

$$Y_3 = -a_0 Y_2 - e_{r_3}$$

$$Y_2 = -\int_0^t Y_1 \, dt - e_{r_2} \int_0^t dt + Y_{2(0)}$$

$$Y_1 = -a_1 \int_0^t Y_1 \, dt - \int_0^t Y_3 \, dt - e_{r_1} \int_0^t dt + Y_{1(0)} + \int_0^t q_{(t)} \, dt .$$

Převedením tohoto systému rovnic na diferenciální rovnici 2. řádu pro Y_2 dostaneme

$$Y_2'' + a_1 Y_2' + a_0 Y_2 = q_{(t)} + e_r , \tag{17}$$

kde $e_r = e_{r_1} - e_{r_3} - a_1 e_{r_2}$.

Řešení rovnice (17) obdržíme stejným způsobem jako řešení rovnice (10). V případě dvou různých reálných kořenů charakteristické rovnice má řešení rovnice (17) tvar

$$Y_2 = -\frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int q_{(t)} \, e^{-\lambda_1 t} \, dt + \frac{e_r}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int q_{(t)} e^{-\lambda_2 t} \, dt - \tag{18}$$

$$- \frac{e_r}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} + K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} ,$$

v případě dvojnásobného kořene

$$Y_2 = -e^{\lambda t} \int q_{(t)} t e^{-\lambda t} \, dt + \frac{e_r t}{\lambda} + \frac{e_r}{\lambda^2} + t e^{\lambda t} \int q_{(t)} e^{-\lambda t} \, dt - \tag{19}$$

$$- \frac{t e_r}{\lambda} + e^{\lambda t}(K_1 + t K_2) , \quad \lambda \neq 0$$

a v případě komplexně sdružených kořenů

$$(20) \qquad Y_2 = -\frac{e^{at}\cos bt}{b}\int q_{(t)}e^{-at}\sin bt\,dt + K_1e^{at}\cos bt +$$

$$+ \frac{e_r}{b}\frac{b\cos bt + a\sin bt}{a^2+b^2}\cos bt + \frac{e^{at}\sin bt}{b}\int q_{(t)}e^{-at}\cos bt\,dt +$$

$$+ \frac{e_r}{b}\frac{b\sin bt - a\cos bt}{a^2+b^2}\sin bt + K_2e^{at}\sin bt\,.$$

Chyby řešení $\delta_{(y)} = Y_2 - y$ jsou v jednotlivých případech

$$(21) \qquad \delta_{(y)} = \frac{e_r}{\lambda_1\lambda_2} + (K_1 - k_1)\,e^{\lambda_1 t} + (K_2 - k_2)\,e^{\lambda_2 t}\,, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0\,,$$

$$(22) \qquad \delta_{(y)} = \frac{e_r}{\lambda^2} + e^{\lambda t}[K_1 - k_1 + t(K_2 - k_2)]\,, \quad \lambda \neq 0\,,$$

$$(23) \qquad \delta_{(y)} = \frac{e_r}{a^2+b^2} + e^{at}[(K_1 - k_1)\cos bt + (K_2 - k_2)\sin bt]\,.$$

V případě, kdy vlivem driftu a mřížkového proudu je i pravá strana $q_{(t)}$ rovnice (10) modelována s chybou $\delta_{(q)} = Q_{(t)} - q_{(t)}$ je průběh Y_2 dán vztahem

$$(24) \qquad Y_2'' + a_1Y_2' + a_0Y_2 = e_r + Q_{(t)}\,,$$

kde $e_r = e_{r_1} - e_{r_3} - a_1e_{r_2}$, $Q_{(t)} = q_{(t)} + \delta_{(q)}$.
Je-li pravá strana $q_{(t)}$ např. řešením homogenní diferenciální rovnice 2. řádu

$$(25) \qquad q''_{(t)} + b_1q'_{(t)} + b_0q_{(t)} = 0\,,$$

potom v případě různých reálných kořenů λ_{1p}, λ_{2p} charakteristické rovnice příslušné k rovnici (25) je chyba $\delta_{(q)}$ dle [1], r. (19) nebo (29) obecně dána vztahem $\delta_{(q)} = u_1e^{\lambda_{1p}t} - v_1e^{\lambda_{2p}t} + s_1$, takže řešení rovnice (24) má při $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tvar

$$(26) \qquad Y_2 = -\frac{e^{\lambda_{1p}t}}{\lambda_2-\lambda_1}\int q_{(t)}e^{-\lambda_1 t}\,dt - \frac{u_1e^{\lambda_{1p}t}}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_{1p}-\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_{1p}-\lambda_2}\right) +$$

$$+ \frac{v_1e^{\lambda_{2p}t}}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_{2p}-\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_{2p}-\lambda_2}\right) + \frac{s_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) +$$

$$+ \frac{e_r}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}\int q_{(t)}e^{-\lambda_2 t}\,dt + K_1e^{\lambda_1 t} + K_2e^{\lambda_2 t}\,,$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_{1p} \neq \lambda_{2p} \neq 0$.

Chyba řešení $\delta_{(y)} = Y - y$

$$\delta_{(y)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} u_1 e^{\lambda_{1p} t} \left(-\frac{1}{\lambda_{1p} - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda_{1p} - \lambda_2} \right) + \tag{27}$$
$$+ v_1 e^{\lambda_{2p} t} \left(\frac{1}{\lambda_{2p} - \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_{2p} - \lambda_2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) (s_1 + e_r) +$$
$$+ (K_1 - k_1) e^{\lambda_1 t} + (K_2 - k_2) e^{\lambda_2 t} .$$

Ze vztahů (21), (22) a (23) vidíme, že pokud $\lambda_1, \lambda_2, \lambda < 0$, nebude chyba řešení vlivem driftu a mřížkového proudu počítacích zesilovačů s časem neomezeně narůstat. Při komplexně sdružených kořenech charakteristické rovnice musí být reálná část kořenů $\text{Re}_{(\lambda)} \leqq 0$, aby chyba s časem neomezeně nenarůstala. Je-li i pravá strana rovnice modelována s chybou $\delta_{(q)}$, nebude dle r. (27) chyba s časem neomezeně narůstat pokud bude $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{1p}, \lambda_{2p} < 0$. Při komplexně sdružených kořenech charakteristických rovnic musí být reálné části kořenů $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_p) \leqq 0$, jak se můžeme přesvědčit dosazením do vztahu (27) za $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $\lambda_{1p} = a_p + ib_p$, $\lambda_{2p} = a_p - ib_p$, kde a_p je reálná, b_p imaginární část kořenů charakteristické rovnice příslušné k rovnici (25).

Literatura

[1] *Beneš, K.:* Vliv driftu a mřížkového proudu u počítacích stejnosměrných zesilovačů na přesnost řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Aplikace matematiky *11* (1966), č. 5, str. 399–409.

[2] *Nenadál, Z., Mirtes B.:* Analogové počítače. SNTL, Praha 1962.

[3] *Mirtes, B.:* Číslicové měření. SNTL, Praha 1961.

[4] *Adler, H.:* Elektronische Analogrechner. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

[5] *Stěpanov, V. V.:* Kurs diferenciálních rovnic. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ДРЕЙФА И СЕТОЧНОГО ТОКА УСИЛИТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА НА ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

КАРЕЛ БЕНЕШ (KAREL BENEŠ)

В настоящей статье описано влияние дрейфа и сеточного тока усилителей постоянного тока на точность решения неоднородных дифференциальных уравнений. В статье выводятся соотношения влияния дрейфа и сеточного тока на

способ решения неоднородных дифференциальных уравнений. Оказывается, что ошибка решения связана только с характером корней характеристического уравнения, когда правая часть дифференциального уравнения моделирована точно. В других случаях ошибка решения не возрастает неограниченным образом со временем в тех случаях, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательную, в некоторых случаях нулевую действительную часть, и правая часть уравнения беспредельно невозрастающая функция.

Summary

THE INFLUENCE OF THE DRIFT AND GRID CURRENT OF D–C AMPLIFIERS ON THE ACCURACY OF SOLUTION OF LINEAR NONHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

KAREL BENEŠ

This article deals with the influence of the drift and grid current of D – C amplifiers on the accuracy of solution of nonhomogeneous differential equations. There are derived relations for the influence of the drift and grid current on the accuracy of solution of nonhomogeneous equations. It is shown, that the error is connected with the roots of characteristic equation only, if the right hand side of differential equation is formed exactly. In another way the error has not unbounded growth if the roots of the characteristic equation have negative (or, in some cases, zero) real parts and if the right hand side of equation is a restricted function.

Adresa autora: Ing. Karel Beneš, Přírodovědecká fakulta UP, Leninova 26, Olomouc.