

# Aplikace matematiky

---

Rostislav Zezula

Numerische Stabilität eines Algorithmus zur Berechnung des Eigenparameters eines Matrizenoperators mit Hilfe der Reduktionsmethode und der Banachschen Iteration

*Aplikace matematiky*, Vol. 13 (1968), No. 2, 211–216

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103160>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NUMERISCHE STABILITÄT EINES ALGORITHMUS  
ZUR BERECHNUNG DES EIGENPARAMETERS  
EINES MATRIZENOPERATORS MIT HILFE  
DER REDUKTIONSMETHODE UND DER BANACHSCHEN ITERATION

R. ZEŽULA

Einige Probleme der Reaktorphysik [1] führen auf folgendes gemischte elliptische Randwertproblem (mit dem kleinsten Eigenwert  $B^2$ )

$$(1) \quad \Delta\varphi + B^2\varphi = 0; \quad \varphi(R, z; B^2) = \varphi\left(r, \pm \frac{H}{2}; B^2\right) = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{r=a} = K_0\varphi\Big|_{r=a}$$

auf dem zweidimensionalen rechteckigen abgeschlossenen Gebiet

$$(1a) \quad \Omega = J_r \times J_z; \quad J_r \equiv \{r \mid a \leq r \leq R\}; \quad J_z \equiv \left\{z \mid -\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}\right\}$$

mit der Grenze  $\hat{\Omega}$  und mit der äusseren Normale  $n = n(\hat{\Omega})$ . Dabei kann der Operator  $K_0$  durch die Beziehung

$$(1b) \quad K_0\varphi\Big|_{r=a} \equiv [\vartheta(z) + \varepsilon N_2]\varphi\Big|_{r=a}$$

approximiert werden, wo  $\vartheta(z) \in L^2(-\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}H)$  gegebene begrenzte (im allgemeinen unstetige) Funktion,  $N_2$  gegebener begrenzter (im allgemeinen nicht selbstadjungierter) Operator im Hilbertschen Raume  $L^2(\Omega)$  und  $\varepsilon$  ein kleiner Parameter ist.

Die Konstruktion einer schwachen Lösung des Problems (1) kann (unter gewissen Voraussetzungen [2]) auf die äquivalente Aufgabe der Bestimmung des Eigenparameters  $B^2 = \lambda^* \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  ( $\lambda_1, \lambda_2$  gegeben) und des zu ihm gehörigen normierten Eigenvektors  $y = y(\lambda^*) = (1, x(\lambda^*)) \in l^2$  des homogenen unendlichen Systems der linearen Gleichungen

$$(2) \quad A(\lambda)y = 0; \quad A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & -c(\lambda) \\ -b(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

im reellen Hilbertschen Folgenraum  $l^2$  überführt werden, die man unter gewissen Voraussetzungen [2] über den Matrizenoperator  $A(\lambda)$  im Raume  $l^2$  (welche die Tat-

sache ausdrücken, dass aus physikalischen Gründen nur das Matrizeelement  $a_{11}(\lambda)$  vom Parameter  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  stark abhängig ist) mit Hilfe der Reduktionsmethode und der Banachschen Iteration durch den folgenden Algorithmus lösen kann:

Wir wählen einen passenden Ausgangswert  $\lambda_N^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  des Parameters  $B^2 = \lambda$ . Es sei weiter für jedes  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  und jedes  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$(2a) \quad b_k(\lambda) = P_k b(\lambda); \quad D_k(\lambda) = P_k D(\lambda) P_k; \quad c_k(\lambda) = P_k c(\lambda)$$

wo  $P_k$  den Projektor bedeutet, der den Hilbertschen Raum  $l^2$  auf seinen  $n$ -dimensionalen Unterraum  $l_n^2$  projiziert. Bei festem  $k \geq N$  berechnen wir den angenäherten Eigenparameter  $\lambda_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_k^{(m)}$  mit Hilfe der Banachschen Iteration aus den Beziehungen

$$(3) \quad \lambda_k^{(m+1)} = h[(c, x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}))]; \quad \lambda_{k+1}^{(0)} = \lambda_k; \quad \lambda_N^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

$$(4) \quad D_k(\lambda_k^{(m)}) x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}) = b_k(\lambda_k^{(m)})$$

wo  $h(a_{11})$  die inverse Funktion zur Funktion  $a_{11}(\lambda)$  ist, so dass für jedes  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  gilt:

$$(5) \quad h[a_{11}(\lambda)] = \lambda.$$

Weiter berechnen wir mit Hilfe der Reduktionsmethode, d. h. aus der Beziehung (4) für  $\lambda_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_k^{(m)}$ ,  $k = N, N+1, \dots$  die angenäherten Eigenvektoren  $y_k = (1, x_k^{(k)}(\lambda_k))$ , die unter gewissen Voraussetzungen [2] schwach konvergieren für  $k \rightarrow \infty$  zum Eigenvektor  $y(\lambda^*)$  des Matrizenoperators  $A(\lambda^*)$ , d. h. wir haben

$$(6) \quad y(\lambda^*) = (1, x(\lambda^*)); \quad \lambda^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k;$$

$$x_k^{(k)}(\lambda_k) = [D_k(\lambda_k)]^{-1} b_k(\lambda_k) \rightarrow x(\lambda^*) \in l^2, \quad A(\lambda^*) y(\lambda^*) = 0.$$

Die Verifizierung der (verhältnismässig komplizierten) Voraussetzungen, die die Konvergenz des durch die Beziehungen (3), (4) gegebenen Algorithmus sichern, erfordert im Wesentlichen die Abschätzung von zwei Zahlen  $\alpha = \alpha(A)$ ,  $\alpha_0^* = \alpha_0^*(A)$  zu überprüfen

$$(7) \quad 0 < \alpha < 1; \quad 0 < \alpha_0^* < 1$$

die vom Operator  $A$  abhängig sind und von denen die erste die Konvergenz der Banachschen Iteration (3) für  $\lambda_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_k^{(m)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  und dadurch auch die Existenz des Eigenparameters  $\lambda^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  und die zweite die Konvergenz der Neumannschen Reihe für den inversen Operator  $D^{-1}(\lambda)$  für alle  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  und dadurch auch die Möglichkeit der Durchführung der Reduktionsmethode (4) für alle  $k \geq N$ ,  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  sichert.

Für die praktische Berechnung ist wichtig die Frage nach der numerischen Stabilität der Folge von numerischen Prozessen, die dem von uns betrachteten Algorithmus

(3), (4) zur Lösung des homogenen unendlichen Systems von linearen Gleichungen (2) entspricht. Dabei nehmen wir den Begriff der numerischen Stabilität, der  $\alpha_k$ -Folge von numerischen Prozessen u. s. w. (sowie womöglich auch die entsprechenden Bezeichnungen) im Sinne des Buches [3]. Die Hauptidee im Beweise der numerischen Stabilität des Algorithmus (3), (4) ist die Ausnützung der bekannten Tatsachen [2] vom Operator  $D_k(\lambda)$ ,  $D_k^{-1}(\lambda)$ , vom Vektor  $c_k(\lambda)$ ,  $b_k(\lambda)$  und von der Funktion  $a_{11}(\lambda)$  für  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ . Wir haben [2] (S. 78)

$$(8) \quad D(\lambda) = D_0 + (\lambda - \lambda_0) S^{(1)}(\lambda) = D(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) [S^{(1)}(\lambda) + \varepsilon S^{(2)}(\lambda)]$$

wo

$$(\lambda - \lambda_0) S^{(1)}(\lambda) = N_1^{(0)}(\lambda) - N_1^{(0)}(\lambda_0); \quad (\lambda - \lambda_0) S^{(2)}(\lambda) = N_2^{(0)}(\lambda) - N_2^{(0)}(\lambda_0)$$

$$N_1^{(0)} = (J - P_1) N_1 (J - P_1); \quad N_2^{(0)} = (J - P_1) N_2 (J - P_1)$$

$$N_1 \varphi_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{H}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \varphi_k \Big|_{r=a}; \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$\Delta \varphi_k(r, z; B^2) + B^2 \varphi_k(r, z; B^2) = 0; \quad \varphi_k(R, z; B^2) = \varphi_k(r, \pm \frac{1}{2}H; B^2) = 0.$$

Weiter gelten für alle  $k \geq N$ ,  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  die Abschätzungen [2] (S. 73; 75)

$$(9) \quad \|D_k^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{1}{c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*}; \quad \|D^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{1}{c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*}$$

wo

$$\alpha_i = i \frac{\pi}{H}; \quad (i = 1, 2, \dots); \quad \vartheta_m^*(t) = \frac{2}{H\alpha_m} \vartheta(t) < 0; \quad 0 \leq \vartheta_{\min}^* \leq |\vartheta_m^*(t)| \leq \vartheta_{\max}^*$$

$$N_1^{(0)}(\lambda) = (z_{mm}^{(1)}(\lambda) \delta_{im}); \quad N_2^{(0)}(\lambda) = (z_{ml}^{(2)}(\lambda)); \quad 0 < c_3^* \leq z_{mm}^{(1)}(\lambda) \leq c_2^*; \\ l, m = 2, 3, \dots$$

Setzen wir weiter [2]

$$0 < \gamma = \alpha_0^* < 1 \quad \text{für} \quad \frac{\alpha_0^*}{1 - \alpha_0^*} \leq 1;$$

$$0 < \gamma = 1 - \frac{(1 - \alpha_0^*)^2}{\alpha_0^*} < 1 \quad \text{für} \quad \frac{\alpha_0^*}{1 - \alpha_0^*} > 1$$

und führen wir die folgenden Bezeichnungen [2] ein:

$$\|S\| = \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \max [\|S^{(1)}(\lambda)\|, \|S^{(2)}(\lambda)\|]$$

$$\omega_{22} = \omega_{23} \left[ 1 + \frac{1}{(1 - \gamma)} \frac{1}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} \right]; \quad \omega_{23} = \left[ \min_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \left| \frac{da_{11}(\lambda)}{d\lambda} \right| \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{21} &= \omega_{23} \left\{ 1 + \|c\| + \frac{\|c\| + (1-\gamma)\|b\|}{(1-\gamma)(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \frac{\|b\|}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} \cdot 2 \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \|N_2^{(0)}(\lambda)\| \right\} \\
\omega_{20} &= \left\{ v + \varepsilon \omega_{23} \frac{\|b\| \cdot \|c\|}{(1-\gamma)(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)^2} \cdot 2 \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \|N_2^{(0)}(\lambda)\| \right\} \\
\omega_{11} &= \omega_{23} \left\{ \frac{1}{(1-\gamma)(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} \left[ \|S\| \frac{(\|b\| + \|c\|)}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} + \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \left\| \frac{d}{d\lambda} b(\lambda) \right\| \right] \right\} \\
\omega_{12} &= \omega_{23} \left\{ \frac{\|S\|}{(1-\gamma)(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)^2} + \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \left\| \frac{d}{d\lambda} b(\lambda) \right\| \right\} \\
\pi_0 &= \left\{ \frac{\|c\| + \|b\|}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} + \frac{1}{N} \left[ \|c\| + \frac{\vartheta}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} \right] + \frac{1}{N^2} \vartheta \right\}.
\end{aligned}$$

Weiter führen wir ein die Zahlen [2]

(10)

$$\bar{f}_m^{(k)} = \left( \frac{da_{11}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k^{(m)}} \right)^{-1} \left[ (\bar{g}_m^{(k)}, c(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) + r_k^{(m)}) + \left( D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)}) b_k^{(m)}, \overline{dc}_k^{(m)} \right) \right]$$

(10a)

$$\begin{aligned}
\bar{f}_m^{(k)} &= \left( \frac{da_{11}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k^{(m)}} \right)^{-1} \left[ (\bar{g}_m^{(k)}, c(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) + r_k^{(m)}) + \right. \\
&\quad \left. + (D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)}) b_k^{(m)}, r_k^{(m)}) + \mu_k^{(m)} \right] + v_k^{(m)}
\end{aligned}$$

und die Vektoren [2]

$$\begin{aligned}
\bar{g}_m^{(k)} &= \left\{ (-1) (D_0^{(k)})^{-1} S_k^{(m)} [D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)})] \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot [b(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) + s_k^{(m)}] + (D_0^{(k)}) \frac{d\bar{b}_k^{(m)}}{d\lambda} \right\} \\
\bar{g}_m^{(k)} &= \{ \varepsilon_k^{(m)} + (D_0^{(k)})^{-1} s_k^{(m)} - \varepsilon D_0^{-1}(\lambda_k^{(m)}) \cdot \\
&\quad \cdot [N_{2k}^{(0)}(\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}) - N_{2k}^{(0)}(\lambda_k^{(m)})] (D_0^{(k)})^{-1} b_k^{(m)} \}
\end{aligned}$$

wo bedeutet

$$N_{2k}^{(0)} = P_k N_2^{(0)} P_k; \quad S_k^{(m)} = P_k S_k^{(1)} P_k (\lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)}); \quad b_k^{(m)} = b_k(\lambda_k^{(m)}); \quad c_k^{(m)} = c_k(\lambda_k^{(m)})$$

$$\frac{d\bar{c}_k^{(m)}}{d\lambda} = \left( \frac{dc_1}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_1^{(m)}}, \frac{dc_2}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_2^{(m)}}, \dots \right); \quad \frac{d\bar{b}_k^{(m)}}{d\lambda} = \left( \frac{db_1}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_1^{(m)}}, \frac{db_2}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_2^{(m)}}, \dots \right)$$

$$\bar{\lambda}_i^{(m)} \in \langle \lambda_k^{(m)}, \lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} \rangle; \quad \bar{\lambda}_i^{(m)} \in \langle \lambda_k^{(m)}, \lambda_k^{(m)} + \tau_k^{(m)} \rangle; \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Man kann beweisen [2] (S. 102) den folgenden

**Satz 1.** 1) Es mögen für den Algorithmus (3), (4) zur Lösung der homogenen Operatorengleichung (2) die im Satz 3b in der Arbeit [2] (S. 82) angeführten hinreichenden Konvergenzbedingungen erfüllt werden.

2) Es möge der Vektor  $b(\lambda)$  der Bedingung genügen

$$0 < \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \left\| \frac{d}{d\lambda} b(\lambda) \right\| (c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*) \leq \|S\| \cdot \|b\|.$$

3) Die Berechnung der Vektoren  $b(\lambda_k^{(m)})$  (mit dem Fehler  $s_k^{(m)}$ ),  $c(\lambda_k^{(m)})$ , (mit dem Fehler  $r_k^{(m)}$ ) aus den Beziehungen

$$(11) \quad \tilde{b}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) = b(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) + s_k^{(m)}; \quad \tilde{c}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) = c(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) + r_k^{(m)}$$

und die Berechnung des Skalarproduktes  $(c(\lambda_k^{(m)}), x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}))$  (mit dem Fehler  $\mu_k^{(m)}$ ) aus der Beziehung

$$(12) \quad \overline{(c(\tilde{\lambda}_k^{(m)}), \tilde{x}_k^{(k)}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}))} = (\tilde{c}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}), \tilde{x}_k^{(k)}(\tilde{\lambda}_k^{(m)})) + \mu_k^{(m)}$$

möge mit Hinsicht auf den Index  $k$  eine numerisch stabile  $\alpha_1$ -Folge von numerischen Prozessen bilden, so dass für die entsprechenden Fehler  $r_k^{(m)}$ ,  $s_k^{(m)}$ ,  $\mu_k^{(m)}$  für beliebiges  $k \geq N$  die Abschätzungen gelten

$$(13) \quad 0 < k \|r_k^{(m)}\| < \vartheta; \quad 0 < k \|s_k^{(m)}\| < \vartheta; \quad 0 < k |\mu_k^{(m)}| < \vartheta.$$

4) Die Berechnung des Vektors  $x_k^{(k)}(\lambda_k^{(m)}) = D_k^{-1}(\lambda_k^{(m)}) b_k(\lambda_k^{(m)}) \in l^2$  mit Hilfe der Eliminationsmethode (mit dem Fehler  $\varepsilon_k^{(m)} \in l^2$ ) aus der Beziehung

$$(14) \quad \tilde{x}_k^{(k)}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) = D_k^{-1}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) \tilde{b}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) + \varepsilon_k^{(m)} \in l^2$$

möge mit Hinsicht auf den Index  $k$  eine numerisch stabile  $\alpha_2$ -Folge von numerischen Prozessen bilden, so dass für den Eliminationsfehler  $\varepsilon_k^{(m)}$  für beliebiges  $k \geq N$  die Abschätzung gilt

$$(15) \quad k^2 \|\varepsilon_k^{(m)}\| < \vartheta.$$

5) Es mögen die Fehler  $v_k^{(m)}$  bei der Berechnung der inversen Funktion  $h(a_{11})$  zur Funktion  $a_{11}(\lambda)$  für jedes  $\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$  die Bedingung der Begrenztheit erfüllen

$$(16) \quad 0 \leq |v_k^{(m)}| \leq v$$

und es mögen der maximale Interpolationsfehler  $v$  der inversen Funktion  $h(a_{11})$  und der Parameter  $\varepsilon$  des Operators  $N(\lambda) = N_1(\lambda) + \varepsilon N_2(\lambda)$  so klein sein, dass eine Zahl  $\eta > 0$  existiert, die den folgenden zwei Ungleichungen genügt:

$$(17) \quad \omega_{20} < \eta \cdot \vartheta; \quad \omega_{21} + \eta < 1.$$

Es möge weiter der kleine Parameter  $\varepsilon$  die Ungleichung

$$(18) \quad \varepsilon \frac{2 \sup_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} \|N_2^{(0)}(\lambda)\|}{(c_3^* + \vartheta_{\min}^* - \varepsilon c_2^*)} \leq \gamma < 1$$

erfüllen.

6) Es möge die Zahl  $\vartheta > 0$  so klein und die natürliche Zahl  $N \leq k$  so gross sein, dass die Ungleichungen

$$(19) \quad \lambda_1 \leq \lambda_k^{(m+1)} \pm \frac{\vartheta}{\varkappa} \leq \lambda_2;$$

$$\min_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} a_{11}(\lambda) \leq (c(\tilde{\lambda}_k^{(m)}), D_k^{-1}(\tilde{\lambda}_k^{(m)}) b(\tilde{\lambda}_k^{(m)})) \pm \frac{\vartheta}{N} \pi_0 \leq \max_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle} a_{11}(\lambda)$$

gelten und es möge der Anfangsfehler  $\tau_k^{(0)} = \tilde{\lambda}_k^{(0)} - \lambda_k^{(0)}$  für alle  $k \geq N$  die folgende Beziehung erfüllen

$$(20) \quad \tilde{\tau}_k^{(0)} = \tau_k^{(0)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}_{k+1}^{(0)} = \lambda_{k+1}^{(0)} = \tilde{\lambda}_k; \quad \lambda_N^{(0)} \in \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle.$$

Dann gilt: 1) Die Folge von numerischen Prozessen

$$(21) \quad \tilde{\lambda}_k^{(m+1)} - \lambda_k^{(m+1)} \equiv \tau_k^{(m+1)} = \tau_k^{(m)} \cdot \tilde{f}_m^{(k)} + \bar{f}_m^{(k)}$$

auf welche der Algorithmus (3), (4) zur Lösung des homogenen unendlichen Systems von linearen Gleichungen (2) im Raume  $l^2$  mit Hilfe der Reduktionsmethode und der Banachschen Iteration überführt werden kann, ist für jedes  $k \geq N$  gleichmässig (hinsichtlich des Indexes  $k$ ) stark (hinsichtlich des Indexes  $m$ ) numerisch stabil.

2) Für den Quotienten  $(1 - \varkappa)$  der starken Stabilität und für den Fehler  $\vartheta_k^{(m)}$  gelten die asymptotischen Abschätzungen (für  $\vartheta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ )

$$(22) \quad (1 - \varkappa) = \alpha + \omega_{11}\vartheta + \omega_{12}\vartheta^2 \approx \alpha$$

$$(22a) \quad 0 \leq |\vartheta_k^{(m)}| < \omega_{20} + \omega_{21}\vartheta + \omega_{22}\vartheta^2 + \omega_{23}\vartheta^3 \approx \nu.$$

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Voraussetzung 4) des Satzes 1 (hinsichtlich der numerischen Stabilität der Eliminationsmethode) in der Monographie [3] angegeben sind. Im Problem (1) sollen diese Bedingungen aus physikalischen Gründen erfüllt werden.

#### Literatur

- [1] J. Čermák, L. Trlifaj: Влияние частично погруженного поглощающего стержня на распределение плотности нейтронного потока. Атомная энергия т. 9, вып. 5, (1960), 470—476.
- [2] R. Zezula: O jedné přibližné metodě řešení některých okrajových úloh v teorii jaderných reaktorů. Disertace Praha 1967. Zpráva ÚJV 1785/67.
- [3] I. Babuška, M. Práger, E. Vitásek: Numerical Processes in differential equations. SNTL Praha, J. Wiley New York 1966.

R. Zezula, ÚJV ČSAV, Řež u Prahy, ČSSR.