Jiří Taufer

Faktorisierungsmethode für ein Randwertproblem eines linearen Systems von Differentialgleichungen

Aplikace matematiky, Vol. 13 (1968), No. 2, 191–198

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103155

SVAZEK 13 (1968) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 2

FAKTORISIERUNGSMETHODE FÜR EIN RANDWERTPROBLEM EINES LINEAREN SYSTEMS VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

J. TAUFER

1. EINLEITUNG

In vielen physikalischen und technischen Gebieten kommt häufig die Aufgabe vor, die Lösung eines linearen Systems von Differentialgleichungen zu finden, welche die gegebenen Randwertbedingungen erfüllt. Eine der wirkungsvollsten Methoden ist die Methode der Faktorisierung. Die wichtigsten Vorteile dieser Methode sind folgende:

a) Die Ungenauigkeiten, welche während der numerischen Realisierung des Algorithmen entstehen, können wir uns als Ungenauigkeiten der Koeffizienten der ursprünglichen Aufgabe vorstellen.

b) Anstatt des Randwertproblems, lösen wir ein Anfangsproblem.

2. FORMULIERUNG DER AUFGABE

Definition 1. Wir sagen, dass die Funktion $x(t)$ auf dem Intervall $\langle a, b\rangle$ teilweise absolut stetig ist, wenn gilt: Es existiert eine Menge von Zahlen $\{\gamma_i\}_{i=1}^s$ $(a = \gamma_1 < < \gamma_2 < \ldots < \gamma_s = b)$ derart, dass

1. die Funktion $x(t)$ auf der Menge $\langle a, b\rangle - \{\gamma_i\}_{i=1}^s$ stetig ist;
2. die Funktion $x(t)$ in den Punkten γ_i Unstetigkeiten höchstens erster Art hat;
3. die Funktionen

$$\bar{x}_i(t) = \begin{cases} x^+(\gamma_i) & t = \gamma_i \\ x(t) & t \in (\gamma_2, \gamma_{i+1}) \\ x^-(\gamma_i) & t = \gamma_{i+1} \end{cases}$$

auf dem Intervall $\langle \gamma_i, \gamma_{i+1}\rangle$ absolut stetig sind.

Es sei gegeben:

1) ein Intervall $\langle a, b\rangle$

2) eine natürliche Zahl $N \geqq 2$ und die natürlichen Zahlen n_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ und m_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ derart, dass $1 \leqq n_i \leqq N$ und $0 \leqq m_i \leqq N$ gilt;

3) die konstanten Matrizen

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{U}_i & \text{vom Typus } (n_i, N) & \multirow{2}{*}{$i = 1, 2, \ldots, p$} \\ \boldsymbol{u}_i & \text{vom Typus } (n_i, 1) & \\ \boldsymbol{V}_i & \text{vom Typus } (N - m_i, N) & \\ \boldsymbol{v}_i & \text{vom Typus } (N - m_i, 1) & \\ \boldsymbol{W}_i & \text{vom Typus } (N - m_i, N - m_i) & i = 1, 2, \ldots, q \\ \boldsymbol{w}_i & \text{vom Typus } (N - m_i, 1) & \end{array}$$

4) eine Folge der Punkte $\{\alpha_i\}_{i=1}^p = M_1$ und eine Folge der Punkte $\{\beta_i\}_{i=1}^q = M_2$ derart, dass gilt:

$$a \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leqq b$$
$$a < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_q < b$$

5) Auf Lebesguesche Weise integrierbare Matrizen $\boldsymbol{A}(t)$ vom Typus (N, N) und $\boldsymbol{f}(t)$ vom Typus $(N, 1)$. Wir setzen überall voraus, dass der Rand der Matrizen $\boldsymbol{U}_i$, $\boldsymbol{V}_i$, $\boldsymbol{W}_i$ gleich der Zeilenanzahl ist. Wir werden uns nun mit folgender Aufgabe beschäftigen. Aufgabe ψ: Wir suchen einen solchen Vektor $\boldsymbol{x}(t)$, dass gilt:

1. $\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ fast überall auf dem Interwall $\langle a, b\rangle$,
2. $\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{x}(\alpha_i) = \boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. (Wenn gilt $\alpha_i \in (a, b)$, dann wird die Gültigkeit der Gleichung $\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{x}^-(x_i) = \boldsymbol{U}_i\boldsymbol{x}^+(\alpha_i)$ verlangt.)
3. $\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{x}^-(\beta_i) = \boldsymbol{W}_i\boldsymbol{V}_i\boldsymbol{x}^+(\beta_i) + \boldsymbol{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$.
4. $\boldsymbol{x}(t)$ ist teilweise absolut stetig auf dem Intervall $\langle a, b\rangle$ und hat Unstetigkeiten nur in den Punkten der Menge M_2.

3. DIE ÜBERFÜHRUNG DER RANDWERTAUFGABE AUF EIN ANFANGSPROBLEM

Satz 1. (Über die Übertragung der Bedingungen.) *Es sei $\boldsymbol{c}(t)$ die absolut stetige Lösung der Gleichung $\boldsymbol{c}'(t) + \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ fast überall auf dem Intervall $\langle \xi_1, \xi_2\rangle$ und es gelte $\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{c}(\xi_0) = \boldsymbol{r}_0$ wobei $\boldsymbol{R}_0$ eine konstante Matrix vom Typus (n, N) und $\boldsymbol{v}_0$ ein konstanter Vektor mit n Komponenten ist. Die Matrix $\boldsymbol{R}(t)$ und der Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ seien die absolut stetige Lösung folgender Gleichungen*

$$\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{Z}(t)\,\boldsymbol{R}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{Z}(t)\,\boldsymbol{r}(t) \tag{2}$$

fast überall auf dem Intervall $\langle \xi_1, \xi_2\rangle$ mit den Anfangsbedingungen:

$$\boldsymbol{R}(\xi_0) = \boldsymbol{R}_0 \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{r}(\xi_0) = \boldsymbol{r}_0\,. \tag{3}$$

Wobei $\boldsymbol{Z}(t)$ eine beliebige auf Lebeguesche Art integrierbare Matrix vom Typus (n, n) ist. Dann gilt

$$\boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{r}(t) \quad \textit{für} \quad t \in \langle \xi_1, \xi_2\rangle\,.$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Bedingungen auf dem Intervall, auf dem die gesuchte Lösung stetig ist, verschieben. Wir zeigen nun, wie wir die Bedingung über den Punkt, in welchem die gesuchte Lösung unstetig ist, verschieben können.

Lemma. *$\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ seien Matrizen vom Typus (a_1, N) und (a_2, N). Die Matrizen $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{C}_2$ haben den Rang h_1 und h_2. Die Matrix $\begin{pmatrix}\mathbf{C}_1\\ \mathbf{C}_2\end{pmatrix}$ habe den Rang h_3 $(h_3 < h_1 + h_2)$. Dann existieren Matrizen $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$ derart, dass gilt*

$$\mathbf{R}_1\mathbf{C}_1 = \mathbf{R}_2\mathbf{C}_2$$

und der Rang der Matrix ist gleich der Zeilenanzahl und diese Zahl ist gleich $h_1 + h_2 - h_3$.

Es gelte im Punkte β_i:

$$\mathbf{D}^-(\beta_i)\,\mathbf{x}^-(\beta_i) = \mathbf{d}^-(\beta_i) \tag{4}$$

und

$$\mathbf{V}_i\mathbf{x}^-(\beta_i) = \mathbf{W}_i\mathbf{V}_i\mathbf{x}^+(\beta_i) + \mathbf{w}_i\,. \tag{5}$$

Nach Lemma existieren zu den Matrizen $\mathbf{D}^-(\beta_i)$ und $\mathbf{V}_i$ die Matrizen $\mathbf{R}_1^{(i)}$, $\mathbf{R}_2^{(i)}$ so, dass gilt

$$\mathbf{R}_1^{(i)}\mathbf{D}^-(\beta_i) = \mathbf{R}_2^{(i)}\mathbf{V}_i \tag{6}$$

wobei der Rang der Matrizen $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$ gleich der Zeilenanzahl ist und diese Zahl gleich der Zahl aus Lemma ist.

Mit Hilfe der Beziehung (6) können wir die Bedingung (4) nach rechts verschieben:

$$\mathbf{R}_2^{(i)}\mathbf{W}_i\mathbf{V}_i\mathbf{x}^+(\beta_i) = \mathbf{R}_1^{(i)}\mathbf{d}^-(\beta_i) - \mathbf{R}_2^{(i)}\mathbf{w}_i\,. \tag{7}$$

Es sei $\{\tau_i\}_{i=1}^r$ die Verfeinerung der Teilung $\{\alpha_i\}_{i=1}^p \cup \{\beta_i\}_{i=1}^q$ des Intervalles $\langle a, b\rangle$, $(a = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r = b)$.

Definition 2. Wir definieren: die Matrix $\mathbf{D}(t)$ und den Vektor $\mathbf{d}(t)$ auf dem Intervall $\langle \alpha_1, b\rangle$ folgenderweise: 1) $\mathbf{D}(t)$ und $\mathbf{d}(t)$ erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{D}'(t) &= \mathbf{D}(t)\,\mathbf{A}(t) + \mathbf{Z}(t)\,\mathbf{D}(t)\\ \mathbf{d}'(t) &= \mathbf{D}(t)\,\mathbf{f}(t) + \mathbf{Z}(t)\,\mathbf{d}(t)\end{aligned} \tag{8}$$

und sind teilweise absolut stetig auf dem Intervall $\langle \alpha_1, b\rangle$. In den Punkten $\{\tau_i\}_{i=1}^r$ können Unstetigkeiten vorkommen und die Anzahl der Zeilen kann geändert werden. 2) in den Punkten $\{\tau_i\}_{i=1}^r$ werden folgende Bedingungen erfüllt:

(9) a) $$\mathbf{D}(\alpha_1) = K_1\mathbf{U}\,, \quad \mathbf{d}(\alpha_1) = K_1\mathbf{u}\,;$$

b) wenn $\tau_\iota = \alpha_e$ und $\tau_i \in M_1 - M_2$ $(l \geqq 2)$, dann gilt

$$\mathbf{D}^+(\alpha_e) = K_i\begin{pmatrix}\mathbf{D}^-(\alpha_e)\\ \mathbf{U}_e\end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}^+(\alpha_e) = K_i\begin{pmatrix}\mathbf{d}^-(\alpha_e)\\ \mathbf{U}_e\end{pmatrix};$$

c) wenn $\tau_i > \alpha_1$ und $\tau_i \notin M_1 \cup M_2$ dann gilt

$$\mathbf{D}^+(\tau_i) = K_i\,\mathbf{D}^-(\tau_i)\,, \quad \mathbf{d}^+(\tau_i) = K_i\,\mathbf{d}^-(\tau_i)\,;$$

d) wenn $\tau_i = \beta_e$ und $\tau_i \in M_2 - M_1$ dann gilt

$$\mathbf{D}^+(\beta_e) = K_i \mathbf{R}_2^{(e)} \mathbf{W}_e \mathbf{V}_e\,, \quad \mathbf{d}^+(\beta_e) = K_i(\mathbf{R}_1^{(e)} \mathbf{d}^-(\beta_e) - \mathbf{R}_2^{(e)} \mathbf{w}_e)\,;$$

e) wenn $\tau_i = \beta_e = \alpha_k$ dann gilt

$$\mathbf{D}^+(\tau_i) = K_i \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2^{(e)} \mathbf{W}_e \mathbf{V}_e \\ \mathbf{U}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}^+(\tau_i) = K_i \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^{(e)}\, \mathbf{d}^-(\beta_e) - \mathbf{R}_2^{(e)} \mathbf{w}_e \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

wobei K_i beliebige Regulärmatrizen sind.

Definition 3. Wir definieren die Matrix $\hat{\mathbf{D}}(t)$ und den Vektor $\hat{\mathbf{d}}(t)$ auf dem Intervall $\langle a, \alpha_p \rangle$ folgenderweise:

1. $\hat{\mathbf{D}}(t)$ und $\hat{\mathbf{d}}(t)$ erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}(t)' &= \hat{\mathbf{D}}(t)\, \mathbf{A}(t) + \hat{\mathbf{Z}}(t)\, \hat{\mathbf{D}}(t) \\ \hat{\mathbf{d}}(t) &= \hat{\mathbf{D}}(t)\, \mathbf{f}(t) + \hat{\mathbf{Z}}(t)\, \hat{\mathbf{d}}(t) \end{aligned} \tag{10}$$

und sind teilweise absolut stetig auf dem Intervall $\langle a, \alpha_p \rangle$. In den Punkten $\{\tau_i\}_{i=1}^r$ können Unstetigkeiten vorkommen und die Anzahl der Zeilen kann geändert werden.

2. in den Punkten $\{\tau_i\}_{i=1}^r$ werden folgende Bedingungen erfült:

(11) a)
$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha_p) = \hat{K}_r \mathbf{U}_p\,, \quad \hat{\mathbf{d}}(\alpha_p) = \hat{K}_r \mathbf{u}_p\,;$$

b) wenn $\tau_i = \alpha_e$ und $\tau_i \in M_1 - M_2$ $(e \leqq p - 1)$ dann gilt

$$\hat{\mathbf{D}}^-(\alpha_e) = \hat{K}_i \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}^+(\alpha_e) \\ \mathbf{U}_e \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{d}}^-(\alpha_e) = \hat{K}_i \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}}^+(\alpha_e) \\ \mathbf{u}_e \end{pmatrix}.$$

c) wenn $\tau_i < \alpha_p$ und $\tau_i \notin M_1 \cup M_2$ dann gilt

$$\hat{\mathbf{D}}^-(\tau_e) = \hat{K}_e\, \hat{\mathbf{D}}^+(\tau_e)\,, \quad \hat{\mathbf{d}}^-(\tau_e) = \hat{K}_e\, \hat{\mathbf{d}}^+(\tau_e)\,;$$

d) wenn $\tau_i = \beta_e$ und $\tau_i \in M_2 - M_1$ dann gilt

$$\hat{\mathbf{D}}^-(\beta_e) = \hat{K}_i \hat{\mathbf{R}}_2^{(e)} \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{V}_e\,, \quad \hat{\mathbf{d}}^-(\beta_e) = \hat{K}_i(\mathbf{R}_1^{(e)}\, \hat{\mathbf{d}}^+(\beta_e) + \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{w}_e)\,;$$

e) wenn $\tau_i = \beta_e = \alpha_k$ dann gilt

$$\hat{\mathbf{D}}^-(\tau_i) = \hat{K}_i \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_2^{(e)} \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{U}_k \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{d}}^-(\tau_i) = \hat{K}_i \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1^{(e)}\, \hat{\mathbf{d}}^+(\beta_e) + \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{w}_e \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

wobei $\hat{K}_i$ beliebige Regulärmatrizen sind.

Definition 4. Wir definieren weiter die Matrix $\Phi(t)$ und den Vektor $\varphi(t)$ folgenderweise:

$$\Phi(t) = \begin{cases} \hat{\mathbf{D}}(t) & t \in (a, \alpha_1) \\ \begin{pmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \hat{\mathbf{D}}(t) \end{pmatrix} & t \in (\alpha_1, \alpha_p)\,, \\ \mathbf{D}(t) & t \in (\alpha_p, b) \end{cases} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \hat{\mathbf{d}}(t) & t \in (a, \alpha_1) \\ \begin{pmatrix} \mathbf{d}(t) \\ \hat{\mathbf{d}}(t) \end{pmatrix} & t \in (\alpha_1, \alpha_p)\,. \\ \mathbf{d}(t) & t \in (\alpha_p, b) \end{cases}$$

Wir formulieren nun einige Behauptungen über die definierte Matrix $\Phi(t)$ und den Vektor $\varphi(t)$.

1. Jede Lösung $\mathbf{x}(t)$ der Aufgabe ψ erfüllt die Gleichung

$$\Phi(t)\,\mathbf{x}(t) = \varphi(t)\,, \quad t \in \langle a, b\rangle \tag{12}$$

(in den Randpunkten des Intervalles $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$ bedeuten $\Phi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\varphi(t)$ den einseitigen Limes).

2. Hat das System (12) mindestens in einem Punkte des Intervalles $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$ eine Lösung, dann hat es eine Lösung auf dem ganzen Intervall $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$.

3. Hat das System (12) mindesten in einem Punkte des Intervalles $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$ eine einzige Lösung, dann hat es auch eine einzige Lösung auf dem ganzen Intervall $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$.

4. Die Aufgabe ψ hat keine Lösung dann und nur dann, wenn ein Index i derart existiert, dass das System (12) keine Lösung auf den Intervall $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$ hat.

5. Hat die Aufgabe ψ eine Lösung, dann gilt folgendes: Wenn die Aufgabe ψ unendlich viele Lösungen hat, dann existiert ein Index i derart, dass das System (12) unendlich viele Lösungen auf den Intervall $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$ hat und umgekehrt.

6. Die Aufgabe ψ hat eine einzige Lösung dann und nur dann, wenn für alle Indizes $i = 1, 2, \ldots, r - 1$ das System (12) gerade nur eine einzige Lösung auf den Intervall $\langle \tau_i, \tau_{i+1}\rangle$ hat.

7. Wenn die Aufgabe ψ gerade nur eine einzige Lösung hat dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{i=1}^{q} m_i \geqq N\,.$$

8. Wenn die Aufgabe ψ gerade nur eine einzige Lösung hat und wenn

$$\sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{i=1}^{q} m_i = N$$

ist, dann ist die Matrix $\Phi(t)$ quadratisch und regular und es gilt:

$$\left.\begin{aligned} N &\geqq \sum_{\alpha_i < t} n_i - \sum_{\beta_i \leqq t} m_i \geqq 0 \\ N &\geqq \sum_{\alpha_i > t} n_i - \sum_{\beta_i \geqq t} m_i \geqq 0 \end{aligned}\right\}\ t \in \langle a, b\rangle\,.$$

Der eben angeführte Vorgang, durch welchen wir die Matrix $\Phi(t)$ erhalten haben, transformiert die Randwertaufgabe ψ auf ein Anfangsproblem. Wenn wir diesen Vorgang als Algorithmus zur Lösung der Aufgabe ψ benützen wollen, so müssen wir die Gleichungen (8) mit den Bedingungen (9) von links nach rechts lösen, und dann die Gleichungen (10) mit den Bedingungen (11) von rechts nach links und zuletzt das System (12).

Die Matrix $\mathbf{Z}(t)$ in den Gleichungen (8) können wir auf vielerlei Art wählen. Nicht jede Weise ist jedoch für die numerische Realisierung des Rechenprozesses angebracht. Es existiert eine solche Wahl, welche gewisse Vorteile für die numerische Realisierung des Algorithmen hat. Wir sehen nun weiter voraus, dass die ursprüngliche Aufgabe ein einzige Lösung hat und dass

$$\sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{i=1}^{q} m_i = N$$

Unter dieser Voraussetzung haben wir gesichert, dass die Matrix Φ quadratisch und regulär ist und die Matrizen $\mathbf{D}(t)$ und $\hat{\mathbf{D}}(t)$ den Rand gleich der Zeilenanzahl haben. In diesem Fall können wir die Matrix $\mathbf{Z}(t)$ von spezieller Form wählen, welche vom numerischen Standpunkt aus vorteilhaft ist.

Satz 2. *Zu jedem $\mu > 1$ gibt es eine Teilung $\{\tau_i\}_{i=1}^{r}$ des Intervalles $\langle a, b\rangle$ und die Matrizen $\mathbf{K}_i$ und $\mathbf{Z}(t)$ so, dass die Matrizen aus Definition 2 von folgender Form sind*:

$$\mathbf{D}(t) = (\mathbf{E}, \mathbf{G}(t))\, \mathbf{P}_i \quad \text{für} \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$$

wobei $\mathbf{P}_i$ Permutationsmatrizen sind und die Elemente der Matrix $\mathbf{G}(t)$ sind in ihrem absoluten Wert höchstens vom Wert μ.

Wir bezeichnen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^i & \mathbf{A}_2^i \\ \mathbf{A}_3^i & \mathbf{A}_4^i \end{pmatrix} = \mathbf{P}_i \mathbf{A} \mathbf{P}_i^T \quad \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^i \\ \mathbf{F}_2^i \end{pmatrix} = \mathbf{P}_i \mathbf{f} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y}^i \\ \mathbf{z}^i \end{pmatrix} = \mathbf{P}_i \mathbf{x}$$

wobei $\mathbf{A}_2^i$ eine Matrix vom gleichen Typus wie die Matrix $\mathbf{G}$ ist und $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{y}^i$ die gleiche anzahl von Komponenten haben wie die Matrix $\mathbf{G}$ Zeilen.

Die Differentialgleichungen (8) können wir dann in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &= \mathbf{G}\mathbf{A}_4^i - \mathbf{A}_1^i \mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{A}_3^i \mathbf{G} + \mathbf{A}_2^i \\ \mathbf{d}' &= -(\mathbf{A}_1^i + \mathbf{G}\mathbf{A}_3^i)\, \mathbf{d} + \mathbf{F}_1^i + \mathbf{G}\mathbf{F}_2^i \end{aligned} \quad \text{für} \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}) \,. \tag{13}$$

Auserdem gilt:

$$(\mathbf{z}^i)' = -(\mathbf{A}_4^i - \mathbf{A}_3^i \mathbf{G})\, \mathbf{z}^i + \mathbf{F}_2^i - \mathbf{A}_3^i \mathbf{d} \quad \text{für} \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}) \,, \tag{14}$$

$$\mathbf{y}^i + \mathbf{G}\mathbf{z}^i = \mathbf{d} \,. \tag{15}$$

Diese Gleichungen werden Faktorisierungsgleichungen genannt und die Matrizen $\mathbf{G}$, $\mathbf{d}$ Faktorisierungsmatrizen.

Die Ungenauigkeiten, welche während der numerischen Realisierung des Algorithmen der Methode entstehen, können wir uns als Störungen der ursprüngliche Aufgabe vorstellen (das sind Störungen in der Matrix $\mathbf{A}(t)$, dem Vektor $\mathbf{f}(t)$ der Randwertbedingungen und zuletzt in den Übergangsbedingungen). Dabei sind diese Störungen von solcher Art, dass wir sie a priori abschätzen können. Die Abschätzungen sind von den Methoden, welche wir zur Lösung der Faktorisierungsgleichungen und zur Berechnung der Anfangsbedingungen verwendet haben, abhängig.

Mit der Frage, wie gross der Einfluss dieser Störungen in der ursprünglichen Aufgabe auf die Lösung ist, wollen wir uns hier nicht beschäftigen.

Wenn die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}$ und die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{f}$ mit gewisser Ungenauigkeit gegeben sind und wenn wir die Aufgabe nach dem eben hier beschriebenen Algorithmus lösen, dann ist es sinnlos die Faktorisierungsgleichungen und die Anfangsbedingungen um vieles genauer berechnen zu wollen als die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}$ und die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{f}$ gegeben sind.

Ein Zahlenbeispiel. Es ist zu lösen:

$$y^{(4)} = 24 \quad \text{für} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle\,, \quad y'(0) = y'(1) = 0\,,$$
$$y(i\,0{,}05) = 0 \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, 20\,.$$

Die genauen Lösungen in den Punkten $0{,}05i$ $(i = 0, 1, \ldots, 20)$ sind: $y(i\,0{,}05) = y'(i\,0{,}05) = 0$, $y''(i\,0{,}05) = 0{,}005$, $(y'''(i\,0{,}05))^+ - (y'''(i\,0{,}05))^- = -1{,}2$.

i	$y''(i\,0{,}05)$	$(y'''(i\,0{,}05))^+ - (y'''(i\,0{,}05))^-$	$y''(i\,0{,}05)$	$(y'''(i\,0{,}05))^+ - (y'''(i\,0{,}05))^-$
0	4.99999994 −3		0.5000000 −2	
1	5.00000001 −3	−1.199999998	0.5000000 −2	−0.12000000 1
2	5.00000000 −3	−1.200000001	0.5000000 −2	−0.12000000 1
3	5.00000000 −3	−1.200000002	0.5000001 −2	−0.12000001 1
4	5.00000000 −3	−1.200000002	0.4999998 −2	−0.11999998 1
5	5.00000001 −3	−1.199999999	0.5000006 −2	−0.12000008 1
6	4.99999999 −3	−1.199999998	0.4999976 −2	−0.11999972 1
7	4.99999999 −3	−1.199999998	0.5000087 −2	−0.12000103 1
8	4.99999998 −3	−1.199999999	0.4999683 −2	−0.11999702 1
9	4.99999998 −3	−1.199999996	0.5000767 −2	−0.12000885 1
10	4.99999996 −3	−1.200000003	0.4997425 −2	−0.11997070 1
11	5.00000001 −3	−1.200000006	0.5008732 −2	−0.12014160 1
12	5.00000006 −3	−1.200000008	0.4949238 −2	−0.11953125 1
13	5.00000004 −3	−1.200000006	0.5124120 −2	−0.12226562 1
14	5.00000006 −3	−1.200000007	0.4166188 −2	−0.11250000 1
15	5.00000005 −3	−1.200000006	0.6958257 −2	−0.15000000 1
16	5.00000006 −3	−1.200000007	−0.5249674 −2	−0.37500000 0
17	5.00000004 −3	−1.200000006	0.2379239 −1	−0.30000000 1
18	5.00000006 −3	−1.200000008	−0.3716554 −1	0.40000000 1
19	5.00000004 −3	−1.200000006	0.1618765 0	−0.24000000 2
20	4.99999999 −3		−0.7790814 0	
	Faktorisierungsmethode		Reduktionsverfahren	

Literatur

[1] *E. Ciceli Ridley* (1956): A Numerical Method of Solving Second-Order Linear Differential Equations With Two-Point Boundary Conditions. Proc. of the Cam. Philosoph. Soc., *53*. 442—447.

[2] *Г. И. Марчук* (1958): Численные методы расчета ядерных реакторов. АТОМИЗДАТ.

[3] *И. С. Березин, Н. Г. Жидков* (1959): Методы вычислений II. Москва Гос. издат.

[4] *А. А. Абрамов* (1961): Вариант метода прогонки. Ж. вычисл. матем. а матем. физ. *1*, 349—351.

[5] *А. А. Абрамов* (1961): О переносе граничных числовий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. а матем. физ. *1*, 542—545.

[6] *I. Babuška, M. Práger* (1961): Numerisch stabile Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben. Zeitschrift für Ang. Math. und Mech., Band *41*, T 4—6.

[7] *И. Бабушка, М. Прагер; Э. Витасек* (1964): Замыкание вычислительных процессов и метод прогонки, Ж. Вычисл. мат. и мат. физ. *4*, 351—353.

[8] *Годунов-Рябелький* (1962): Введение в теорию разностных схем. Москва. ФИЗМАТИЗ.

[9] *I. Babuška, M. Práger, E. Vitásek* (1966): Numerical Processes in Differential Equations. John Wiley & Sons, London—New York—Sydney, SNTL .

[10] *Г. Л. Майстровский* (1966): О методе прогонки для одномерной краевой задачи 2n-го порядка. Математическая физика, Киев „Наука думка“ S. 54—63.

[11] *J. Taufer* (1966): On Factorization Method. Aplikace matematiky *11* (1966), 6.

J. Taufer, MÚČSAV, Opletalova 45, Praha 1, ČSSR.