Aplikace matematiky

Jozef Gruska; Pavol Poliak

Algoritmy 11. GAUSSpas. Riešenie systémov lineárnych algebraických rovníc s pásovými maticami. 12. GAUSSpassym

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 6, 493–498

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103130

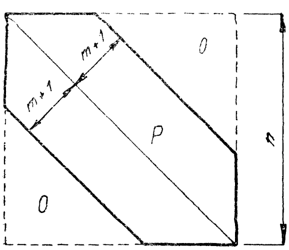
ALGORITMY

11. GAUSSpas

RIEŠENIE SYSTÉMOV LINEÁRNYCH ALGEBRAICKÝCH ROVNÍC S PÁSOVÝMI MATICAMI

JOZEF GRUSKA, Matematický ústav SAV, ul. Obrancov mieru 41, Bratislava.
PAVOL POLIAK, Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta, Bratislava.

Systém lineárnych algebraických rovníc $\hat{A}x = f$ s maticou $\hat{A} = \{a_{ij}\}$ stupňa n sa nazýva $(2m + 1)$-diagonálnym, $0 \leqq m \leqq n - 1$, ak $a_{ij} = 0$ pre $|i - j| > m$, tj. nenulové elementy matice $\hat{A}$ môžu byť len v hlavnej diagonále a m-diagonálach nad a pod hlavnou diagonálou — viď pás P na obr. 1. a.



1. a

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. b

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. c

$$A = [1, 2, -1, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 3, 1, 2, 1, 2, 1, -1]$$

1. d

$$A = [1, 2, 3, 3, -1, 0, 2, 1, 1, 1, 2, 1]$$

1. e

Obr. 1.

Procedúry *GAUSSpas* a *GAUSSpassym* (viď nasledujúci algoritmus č. 12) sú pre riešenie $(2m + 1)$-diagonálnych systémov $\hat{A}x = f$ s nesymetrickou a symetrickou maticou $\hat{A}$ Gaussovou metódou delenia s obecnou hlavnou diagonálou za predpokladu, že všetky hlavné minory matice $\hat{A}$ sú rôzne od nuly a matica $\hat{A}$ je daná v tvare lineárneho masívu-dĺžky $n(2m + 1) - m^2 - m$ pri procedúre *GAUSSpas* pre nesymetrické matice a dĺžky $n(m + 1) - (m^2 + m)/2$ pri procedúre *GAUSSpassym* pre symetrické systémy — v ktorom sú po riadkoch uložené elementy pásu P u procedúry *GAUSSpas* a elementy z horných $(m + 1)$-diagonál u procedúry *GAUSSpassym*. Tak napr. pre maticu $\hat{A}$ z obr. 1.b a pre procedúru *GAUSSpas* je masív A na obr. 1.d a pre maticu $\bar{A}$ z obr. 1.c a pre procedúru *GAUSSpassym* je masív A na obr. 1.e. Matice, vznikajúce v priebehu eliminácie z matice $\hat{A}$, sú opäť uložené v masíve A, ktorý sa tak spolu s masívom, reprezentujúcim vektor pravej strany, v priebehu výpočtu mení. Zmena masívu A je však taká, že obe procedúry sa dajú použiť k riešeniu viacerých systémov s tou istou maticou systému a pritom sa eliminácia matice systému — tj. rozklad na hornú a dolnú trojuholníkovu maticu — robí len raz bez ohľadu na počet pravých strán a počet použití procedúry. V priebehu výpočtu sa kontroluje, či hodnoty hlavných minorov matice systému sú v absolútnych hodnotách väčšie než zadané číslo *Eps* — príkaz *PO* — a ak nie, nastáva okamžite výstup z procedúry na zadané návestie *ZERO*. Jednoduchou úpravou je možné docieliť — viď poznámku **comment** 4 — že procedúry v priebehu riešenia systémov zisťujú, či matica $\hat{A}$ je kladne (záporne) definitná.

procedure *GAUSSpas* $(A, f, x, n, m, Eps, ZERO, p)$;
value n, m, p, Eps;
integer n, m, p;
real Eps;
array A, f, x;
label $ZERO$;

comment 1. Pri $p = 1$ procedúra rieši systém $\hat{A}x = f$, kde $\hat{A}$ je $(2m + 1)$-diagonálna matica stupňa n a $0 \leqq m \leqq n$. Masív $A[1 : (2m + 1) \times n - m \times m - m]$ obsahuje všetky elementy z $(2m + 1)$-diagonál matice $\hat{A}$, uložené po riadkoch. Ak $p > 1$, procedúra opäť rieši systém $\hat{A}x = f_1$, ale tentokrát A musí byť masív, ktorý sa získal v priebehu riešenia nejakého systému $\hat{A}x = f_2$. V takom prípade sa A v priebehu výpočtu nemení a čas výpočtu je značne kratší najmä pre veľké hodnoty m. Ak sa má procedúra použiť len raz pre riešenie systému s danou maticou, môžeme procedúru zjednodušiť tým, že zo zoznamu formálnych parametrov a špecifikácií vynecháme identifikátor p, vynecháme príkazy $P1$ a $P2$ a návestia L, $L1$. Ak niektorý hlavný minor matice $\hat{A}$ je v absolútnej hodnote menší ako Eps, nastáva skok z tela procedúry na $ZERO$;

begin integer $i, j, k, M, j0, j1, j2$; **real** S;
integer procedure $E(i)$; **value** i; **integer** i;
$E :=$ **if** $i + m \leqq n$ **then** m **else** $n - i$;
integer procedure $E1(i)$; **value** i; **integer** i;
$E1 := E(i) +$ (**if** $i \leqq m$ **then** i **else** m);

comment 2. V priebehu i-tého kroku eliminácie obsahuje j index „elementu a_{ii}" v masíve A a $j1$ obsahuje postupne indexy „elementov a_{ji}," $j > i$. $E1(i)$ $(E(i))$ je počet elementov v i-tom riadku pásu matice (počet elementov za hlavnou diagonálou);

$j := 1$;

comment 3. Začína priamy chod;
for $i := 1$ **step** 1 **until** n **do**
  begin $M := E(i)$;
    $j2 := j1 := j + E1(i)$;
  $P1$: **if** $p > 1$ **then go to** L;
  $P0$: **if** $abs(A[j]) < Eps$ **then go to** $ZERO$;

comment 4. Pri i-tom prevádzaní cyklu je $A[j]$ rovné i-tému hlavnému minoru matice $\hat{A}$. Ak nahradíme príkaz $P0$ príkazom **if** $sign\ (Eps \times A[j]) \leqq 0$ **then go to** $ZERO$, potom pre $Eps > 0$ $(Eps < 0)$ nastane prerušenie výpočtu a skok na $ZERO$, ak matica nie je kladne (záporne) definitná. Ak nechceme, aby sa pri realizácii procedúry zisťovalo, či sú hlavné minory v absolútnej hodnote menšie ako Eps, môžeme vynechať príkazy $P0$ a $P3$, hlavičku cyklu pre i zmeniť na **for** $i := 1$ **step** 1 **until** $n - 1$ **do** a v zozname formálnych parametrov a špecifikácií vynechať Eps a $ZERO$;

L: **for** $j0 := 1$ **step** 1 **until** M **do**
    begin $S := A[j1]/A[j]$;
      $P2$: **if** $p > 1$ **then go to** $L1$;
        for $k := 1$ **step** 1 **until** M **do**
          $A[j1 + k] := A[j1 + k] - A[j + k] \times S$;
      $L1$: $f[j0 + i] := f[j0 + i] - f[i] \times S$;
        $j1 := j1 + E1(j0 + i)$;
    end $j0$;
  $j := j2 + 1$;
  end priameho chodu a cyklu pre i;
$P3$: $j := j - m - 1$;

comment 5. Začína spätný chod;
for $i := n$ **step** -1 **until** 1 **do**
  begin $M := E(i)$;
  $L2$: $x[i] := f[i]$;
      for $k := 1$ **step** 1 **until** M **do**
        $x[i] := x[i] - x[i + k] \times A[j + k]$;
  $L3$: $x[i] := x[i]/A[j]$;
        $j := j - E1(i - 1) - 1$

end i a spätného chodu. Náveštia $L2$ a $L3$ možno vynechať, majú len ilustratívny význam
end procedúry *GAUSSpas*;

Pri overovaní celého radu algoritmov pre rôzne metódy (napr. eliminácia maticami odrazu a maticami rotácie, metódy minimálnych iterácií, pri symetrických maticiach metóda odmocnín, metóda streľby atď.) na riešení 3- a 5-diagonálnych systémov s $n = 100$, 200 a 500 a s rôznym Toddovým číslom podmienenosti od 10^1 až do 10^8 boli výsledky, získané týmito algoritmami (tj. *GAUSSpas* a *GAUSSpassym*) najpresnejšie [1].

Kontrolný príklad: Pre systém $\hat{A}x = f$ s maticou $\hat{A}$ na obr. 1.b a s vektorom $f = [2, 15, 14, 13, 29, 7]$ je $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$.

Algoritmy boli naprogramované a používané v strojovom kóde na počítači ZRA-1 a v ALGOLe na počítači GIER.

Ďalšie algoritmy: Celý rad ďalších algoritmov pre pásové systémy – a zvlášť pre 3- a 5-diagonálne systémy – pre priame a iteračné metódy je v zpráve [1]. Je tam tiež uvedená iná procedúra, tzv. GAUSS 11a, pre Gaussovu metódu delenia s obecnou diagonálou, ktorá je pre $m \leqq n/3 + 1/3$ o niečo rýchlejšia ako *GAUSSpas*. Rozdiel v rýchlosti je tým väčší, čím je pomer m/n menší. Procedúra GAUSS 11a, v ktorej je zvlášť zaprogramovaná eliminácia nepravidelného začiatku pásu matice, pravidelného stredu a nepravidelného konca je však asi trikrát taká dlhá.

Použitie procedúry *GAUSSpas* a podobne aj procedúry *GAUSSpassym* k riešeniu viacerých systémov s tou istou maticou systému ilustrujeme na príkaze, ktorý realizuje výpočet inverznej matice $X[1 : n, 1 : n]$.

```
for i := 1 step 1 until n do
   begin for j := 1 step 1 until n do
      f[j] := if j ≠ i then 0 else 1;
      GAUSSpas (A, f, f, n, m, Eps, ZERO, i);
      for j := 1 step 1 until n do
          x[j, i] := f[j]
end
```

Procedúru *GAUSSpas*, a rovnako aj procedúru *GAUSSpassym*, môžme ľahko upraviť na procedúru, ktorá rieši v priebehu jednej eliminácie systém rovníc s p pravými stranami. (Tu už má p iný význam!) V takom prípade f a x budú masívy s hranicami $[1 : n, 1 : p]$. Telo procedúry zmeníme nasledovne:

(i) Vynecháme príkazy $P1$ a $P2$

(ii) Príkaz $L1$ nahradíme príkazom

```
for k := 1 step 1 until p do
   f[j0 + i, k] := f[j0 + i, k] - f[i, k] × S;
```

(iii) Príkazy $L2$ až $L3$ nahradíme príkazom:

```
for j1 := 1 step 1 until p do
begin x[i, j1] := f[i, j1];
    fork := 1 step 1 until M do
        x[i, j1] := x[i, j1] - x[i + k, j1] × A[j + k];
        x[i, j1] := x[i, j1]/A[j]
end;
```

[1] *J. Gruska, V. Chmurná, M. Kasmanová, P. Poliak, M. Postulková, R. Vyhnanská:* Riešenie systémov lineárnych algebraických rovníc s pásovými maticami na samočinných počítačoch. Výskumná zpráva Z 24/65—66, ÚTK SAV, 1966.

12. GAUSSpassym

RIEŠENIE SYSTÉMOV LINEÁRNYCH ALGEBRAICKÝCH ROVNÍC SO SYMETRICKÝMI PÁSOVÝMI MATICAMI

JOZEF GRUSKA, Matematický ústav SAV, ul. Obrancov mieru 41, Bratislava
PAVOL POLIAK, Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta, Bratislava

Vysvetlivky k tomuto algoritmu viď hore v algoritme GAUSSpas.

```
procedure GAUSSpassym (A, f, x, n, m, Eps, ZERO, p);
value n, m, Eps, p;
integer n, m, p; real Eps; array A, f, x; label ZERO;

comment 1. Viď poznámku comment 1 u procedúry GAUSSpas. Rozdiel je len v tom,
že u procedúry GAUSSpassym masív A[1: n × (m + 1) - (m × m + m)/2] obsa-
huje len elementy horných (m + 1)-diagonál, zapamätané po riadkoch;

begin integer i, j, k, M, M1, j0, j1, j2; real S;
integer procedure E(i); value i; integer i;
E := if i + m ≦ n then m else n - i;

comment 2. Význam j, j1 a E(i) je ako u procedúry GAUSSpas;
j := 1;

comment 3. Priamy chod;

for i := 1 step 1 until n do
   begin M := E(i);
         j2 := j1 := j + M + 1;
     P1: if p > 1 then go to L;
     P0: if abs (A[j]) < Eps then go to ZERO;
```

```
comment 4. Platí tu tá istá poznámka ako comment 4 u procedúry GAUSSpas;

L: for j0 := 1 step 1 until M do
      begin S := A[j + j0]/A[j];
            M1 = M − j0;
            P2: if p > 1 then go to L1;
                for k := 0 step 1 until M1 do
                A[j1 + k] := A[j1 + k] − A[j + k + j0] × S;
            L1: f[j0 + i] := f[j0 + i] − f[i] × S;
                j1 := j1 + E(j0 + i) + 1
      end j0;
   j := j2;
end i a priameho chodu;

P3: j := j − 1;

comment 5. Spätný chod;

for i := n step −1 until 1 do
   begin M := E(i);
     L2: x[i] := f[i];
          for k := 1 step 1 until M do
             x[i] := x[i] − x[i + k] × A[j + k];
     L3: x[i] := x[i]/A[j];
             j := j − E(i − 1) − 1
   end i a spätného chodu. Náveštia L2 a L3 možno vynechať
end procedúry GAUSSpassym;
```

Kontrolný príklad:

Pre symetrický systém s maticou $\bar{A}$ na obr. 1.c. a s vektorom

$f = [14, 5, 16, 17, 16]$ je $x = [1, 2, 3, 4, 5]$.

Algoritmus bol naprogramovaný a používaný v strojovom kóde na počítači ZRA-1 a v ALGOLe na počítači GIER.