Aplikace matematiky

Edita Jänichová; Adolf Karger

Základy Mayorova-Misesova zobrazení

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 6, 477–485

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103127

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ZÁKLADY MAYOROVA-MISESOVA ZOBRAZENÍ

EDITA JÄNICHOVÁ, ADOLF KARGER

(Došlo dne 30. ledna 1967.)

1. ÚVOD

B. MAYOR vybudoval v [1] základy zobrazení, které později R. W. MISES ve [2] použil k řešení jednodušších úloh ze statiky. K. FEDERHOFER ve svém obsáhlém díle [4] aplikoval zobrazení Mayorovo-Misesovo a zobrazení PRAGEROVO [3] k řešení úloh z prostorové kinematiky a kinetostatiky. V práci je podána teorie zobrazení, které je určitým zobecněním Mayorova-Misesova a Pragerova zobrazení a jsou vyzdviženy některé souvislosti s algebrou.

Autoři děkují prof. A. URBANOVI za četné rady a připomínky k této práci.

2. ÚVODNÍ POJMY

Budiž $\mathscr{P}_3$ projektivní prostor dimense 3 nad tělesem R reálných čísel a $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}'_2$ buďte dvě jeho různé roviny. Přímku $p \equiv \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}'_2$ nazveme vyloučenou přímkou. Buď dále dána nesingulární kolineace $\kappa : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}'_2$, pro kterou je $\kappa p = p$ a nesingulární polarita $\alpha : \widetilde{\mathscr{P}}_2 \to \mathscr{P}_2$, kde $\widetilde{\mathscr{P}}_2$ značí duální rovinu k $\mathscr{P}_2$, $\widetilde{\mathscr{P}}_2 \equiv \mathscr{P}_2$. Korelaci $\kappa\alpha : \widetilde{\mathscr{P}}_2 \to \mathscr{P}'_2$ označme μ.

Budeme uvažovat pouze ty případy, kdy zobrazení indukovaná μ a κ na p jednoduše souvisejí s polaritou α. To nastane, jestliže

$$(1) \qquad \text{a) } \kappa_p = \alpha_p \,, \quad \text{b) } \mu_p = \alpha_p \,,$$

kde index značí indukované zobrazení, a těmito dvěma případy se budeme zabývat. Z (1) plyne především, že p není tečnou kuželosečky, indukující polaritu α, neboť indukovaná kolineace κ_p je podle předpokladu nesingulární. Uveďme dvě jednoduché vlastnosti.

Z (1a) plyne:

$$\mu_p = 1 \quad \text{a} \quad \kappa_p^2 = 1 \,,$$

neboť

$$\mu_p = (\kappa\alpha)_p = \alpha_p^2 = 1 \,.$$

Z (1b) plyne:

(2) $$\kappa_p = 1 \quad \text{a} \quad \mu_p^2 = 1\,,$$

neboť

$$\kappa_p = (\mu\alpha)_p = \alpha_p^2 = 1\,.$$

Označme $\alpha p \equiv \mathrm{P}$, $\kappa\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}'$. Bod P' se nazývá hlavním bodem, korelace $\alpha' \equiv \kappa\alpha\kappa^{-1}$: $: \tilde{\mathscr{P}}_2 \to \mathscr{P}'_2$ ($\tilde{\mathscr{P}}'_2$ je duální k $\mathscr{P}'_2$, $\tilde{\mathscr{P}}'_2 \equiv \mathscr{P}'_2$) hlavní polaritou ($\alpha'$ je polarita, protože $(\alpha')^2 = \kappa\alpha\kappa^{-1}\kappa\alpha\kappa^{-1} = \kappa\alpha^2\kappa^{-1} = \kappa\kappa^{-1} = 1$).

Dále je $\alpha_p = \alpha'_p$, neboť $\alpha' = \mu\kappa^{-1}$ a je buď $\mu_p = \alpha_p$, $\kappa_p = 1$, nebo $\kappa_p = \alpha_p$, $\mu_p = 1$.

Věta 1. *Budiž* A (a) *libovolný bod (přímka) z* $\mathscr{P}_2$. *Potom* κA (κa) *a* μA (μa) *jsou sdruženy v hlavní polaritě.*

Důkaz. $\mu\mathrm{A} = (\kappa\alpha)\,\mathrm{A} = \alpha'(\kappa\mathrm{A})$ a $\mu\mathrm{a} = (\kappa\alpha)\,\mathrm{a} = \alpha'(\kappa\mathrm{a})$.

Věta 2. *Kolineace* κ *se v případě* (1a) *dá složit z promítání a kolineace v rovině* $\mathscr{P}'_2$, *která má jednu slabě samodružnou přímku a jeden slabě samodružný bod, v případě* (1b) *je vytvořena promítáním.*

Důkaz pro (1a): Nechť S je libovolný bod přímky PP′, neležící v $\mathscr{P}_2$ ani v $\mathscr{P}'_2$. Kolineaci mezi $\mathscr{P}_2$ a $\mathscr{P}'_2$ vytvořenou promítáním z bodu S označme π. Pak $\kappa\pi^{-1}$: $: \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ má žádané vlastnosti. (1b) plyne z Desarguesovy věty, neboť odpovídající si přímky se protínají na přímce p a tudíž spojnice odpovídajících si bodů procházejí pevným bodem. Považujeme-li $\mathscr{P}'_2$ za průmětnu, lze kolineace κ užít ke dvoustopnímu zobrazení. V případě (1b) je to jeden z běžných případů metody dvou stop, (1a) je pak jeho určitá modifikace. Všechny úlohy v dvoustopém zobrazení se dají na tento druhý případ převést. Stačí si všimnout, že kolineace κ' je dána involucí na vyloučené přímce, párem dalších odpovídajících si bodů a slabě samodružným bodem a je tedy dobře zvládnutelná i konstruktivně.

3. INDUKOVANÁ POLARITA

Nechť $\mathscr{V}_n$ je vektorový prostor nad R dimense n. Označme $\mathscr{P}_{n-1}(\mathscr{V}_n)$ projektivní prostor všech 1-dimensionálních lineárních soustav ve $\mathscr{V}_n$ a π nechť je přirozená projekce z $\mathscr{V}_n$ (bez nulového vektoru) do $\mathscr{P}_{n-1}(\mathscr{V}_n)$. Každému lineárnímu zobrazení $\tilde{\pi}_1 : \mathscr{V}_n \to \mathscr{V}_m$ je přiřazeno jediné lineární zobrazení $\tilde{\pi}_1 : \mathscr{P}_{n-1}(\mathscr{V}_n) \to \mathscr{P}_{m-1}(\mathscr{V}_m)$, totiž právě to, pro které platí

$$\tilde{\pi}_1\pi = \pi\pi_1\,.$$

Budiž nyní $\mathscr{V}_3$ algebra dimense 3 nad R. Označme $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ součin vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathscr{V}_3$. Struktura algebry ve $\mathscr{V}_3$ indukuje binární operaci v $\mathscr{P}_2(\mathscr{V}_3)$ takto: Jsou-li $A, B \in$ $\in \mathscr{P}_2(\mathscr{V}_3)$, pak definujme:

a) $(A, B) = \pi(\pi^{-1}A, \pi^{-1}B)$, pro $(\pi^{-1}A, \pi^{-1}B) \neq 0$,
b) (A, B) není definováno pro $(\pi^{-1}A, \pi^{-1}B) = 0$.

Zabývejme se nyní otázkou, kdy právě definovaná binární operace určuje korelaci, která by přímce AB přiřazovala právě bod (A, B), pokud (A, B) má smysl. Platí

Věta 3. *Indukovaná binární operace určuje korelaci právě tehdy, jestliže*

a) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ *pro všechna* $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}_3$, *nebo*

b) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{v}$, *kde* $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}_3$ *je pevný nenulový vektor z* $\mathscr{V}_3$, $\lambda \in R$.

Důkaz: Najděme souvislost mezi strukturními konstantami c^i_{jk} algebry $\mathscr{V}_3$ a koeficienty p^{ij} $(i, j, k = 1, 2, 3)$ indukované korelace (označme ji ι). Předpokládejme, že ve $\mathscr{V}_3$ je zvolena pevná base a že tato base je zároveň aritmetickou basí v $\mathscr{P}_2(\mathscr{V}_3)$; označme $\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$. Nechť $\widetilde{\mathscr{P}}_2(\mathscr{V}_3)$ je opatřen duální basí k basi ve $\mathscr{V}_3$, a nechť $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou lineárně nezávislé vektory z $\mathscr{V}_3$ o souřadnicích a^i, b^i. Jejich přirozené projekce budeme značit stejnými, ale velkými písmeny. Pak přímka spojující body A a B má rovnici $(\varepsilon_{ijk} a^i b^j)\, x^k = 0$ a bod jí odpovídající má souřadnice $c^i_{jk} a^j b^k$. Indukovaná binární operace v $\mathscr{P}_2(\mathscr{V}_3)$ určuje tedy korelaci právě tehdy, jestliže bod $\pi(c^i_{jk} a^j b^k)$ nezávisí na volbě bodů A a B na přímce AB.

Nechť tedy $\pi(c^i_{jk} a^j b^k)$ nezávisí na volbě A, B na AB a nechť existuje takový vektor $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}_3$, $\boldsymbol{a} \neq 0$, že $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \neq 0$. Zvolme dále vektory, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tak, aby $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tvořily basi ve $\mathscr{V}_3$. Pak ke každé dvojici λ, $\mu \in R$ musí existovat $\varrho \in R$, aby platilo

$$(\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) = \varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad \text{tj.} \quad \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\varrho - \mu)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,,$$

a tedy $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \nu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$, $0 \neq \nu \in R$. Analogické tvrzení se dokáže pro ostatní součiny vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ a $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})$ mohou přitom být nulové. Jelikož $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tvoří basi, platí pro každé dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}_3 : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$, $\lambda \in R$ a tím je důkaz proveden, neboť obrácené tvrzení je zřejmé.

V dalším budeme předpokládat, že $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ pro všechna $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}_3$, protože zbývající případ je triviální. Máme tedy

$$c^i_{jk} + c^i_{kj} = 0 \tag{3}$$

a je

$$\iota(\varepsilon_{ljk} a^j b^k) = c^i_{jk} a^j b^k \quad \text{pro} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3\,. \tag{4}$$

Koeficienty p^{il} korelace ι jsou definovány takto:

Je-li $s_l x^l = 0$ přímka, je $x^i = p^{il} s_l$ odpovídající bod. Dosadíme-li do (4), dostaneme $\varrho p^{il} \varepsilon_{ljk} a^j b^k = c^i_{jk} a^j b^k$, což má platit pro libovolná $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ϱ je koeficient úměrnosti, musí tedy platit

$$\varrho p^{il} \varepsilon_{ljk} = c^i_{jk}\,. \tag{5}$$

Z (5) plyne speciálně

$$c^i_{ji} = \varrho p^{il} \varepsilon_{lji} = \tfrac{1}{2}\varrho(p^{il}\varepsilon_{lji} - p^{il}\varepsilon_{ijl}) = \tfrac{1}{2}\varrho \varepsilon_{ijl}(p^{il} - p^{li})\,. \tag{6}$$

Tedy korelace ι je polaritou právě tehdy, když $c^i_{ji} = 0$.

Lemma: Je-li $c^i_{jk} + c^i_{kj} = 0$ a $c^i_{ji} = 0$, je $\mathscr{V}_3$ Lieovou algebrou.

Jestliže dimense $\mathscr{V}'_3 = 3$, platí i obráceně.

Čárka vpravo nahoře značí derivovanou algebru algebry $\mathscr{V}_3$. Důkaz se provede použitím Jacobiho identity.

Věta 4. *Indukovaná korelace je definována pro všecky přímky, je-li* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$ *pro lineárně nezávislé vektory* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *z* $\mathscr{V}_3$; *je nesingulární, jestliže* $\dim \mathscr{V}'_3 = 3$. *Je-li polaritou, je* $\mathscr{V}_3$ *Lieovou algebrou. Hodnost matice kuželosečky indukující tuto polaritu je rovna dimensi* $\mathscr{V}'_3$.

Důsledek: Jestliže $\dim \mathscr{V}'_3 = 3$, je $\mathscr{V}_3$ Lieova právě tehdy, je-li ι polaritou.

Důkaz: $\mathscr{V}'_3$ je vektorový prostor generovaný vektory $c^i_{jk}\mathbf{e}_i$, jsou-li e_i vektory base. Dimense tohoto prostoru je rovna hodnosti matice $\|c^i_l\|$, kde $c^i_l = c^i_{jk}$ tak, že (ljk) je (123), nebo (231) nebo (321). Z (5) plyne $c^i_l = p^{il}\varrho$ a to dává tvrzení o dimensi derivace. Ostatní je snadným důsledkem lemmatu.

Lieovy algebry s $\dim \mathscr{V}'_3 = 3$ nad R jsou dvoa typů (označme je I a II). V každém z nich lze vybrat basi $\mathbf{e}_i$ tak, aby platilo

u typu I:

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3\,, \quad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1\,, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2\,, \tag{7}$$

u typu II:

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = -\mathbf{e}_3\,, \quad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1\,, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2\,. \tag{7a}$$

Je vidět, že algebry typu I indukují polaritu k imaginární kuželosečce, algebry typu II k reálné kuželosečce. Ostatní Liegovy algebry dimense 3 mají derivace nižší dimense a indukují tedy singulární korelace (příp. polarity).

4. *M*-VEKTORY A *P*-VEKTORY

Uvažujme E_3 a v něm libovolnou rovinu E_2; $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ nechť značí antisymetrický součin (v pevné basi) vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ze zaměření $\mathscr{V}_2$ roviny E_2. Nazvěme Mayorovým-Misesovým obrazem vektoru — krátce ***M***-vektorem — takovou dvojici $\alpha = (a, \mathbf{v})$, kde $a \subset E_2$ je přímka a $\mathbf{v} \in \mathscr{V}_2$, že vektory $X - Y$ a $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé pro všechna $X, Y \in a$. Množinu všech ***M***-vektorů označme $\mathfrak{M}$.

Definice: *Buď* $O \in E_2$ *libovolný bod,* $\alpha = (a, \mathbf{u})$, $\beta = (b, \mathbf{v})$, $\gamma = (c, \mathbf{w}) \in \mathfrak{M}$ *a nechť je* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq 0$. $\gamma \in \mathfrak{M}$ *nazýváme součtem* ***M***-*vektorů* α *a* β, *je-li*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\,, \quad \langle \mathbf{u}, O - X \rangle + \langle \mathbf{v}, O - Y \rangle = \langle \mathbf{w}, O - Z \rangle \tag{8}$$

pro všechna $X \in a$, $Y \in b$, $Z \in c$.

Jsou-li α a β dány, pak Z vyhovující (8) jistě existují. Buďte Z_1, Z_2 body vyhovující (8). Pak je

$$\langle \mathbf{w}, O - Z_1 \rangle = \langle \mathbf{w}, O - Z_2 \rangle, \quad \text{a tedy} \quad \langle \mathbf{w}, Z_1 - Z_2 \rangle = 0,$$

tj. vektory $\mathbf{w}$ a $Z_1 - Z_2$ jsou lineárně závislé. Definice je tedy oprávněná a je rovněž vidět, že nezávisí na volbě bodu O. Protínají-li se přímky a, b, označme R jejich průsečík. Pak

$$\langle \mathbf{u}, O - R \rangle + \langle \mathbf{v}, O - R \rangle = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, O - R \rangle = \langle \mathbf{w}, O - R \rangle .$$

Přímka c prochází tedy také bodem R. Jsou-li a, b rovnoběžné, dá se přímka c sestrojit s použitím dělicího poměru. Násobek $\mathbf{M}$-vektoru α číslem $\lambda \in R$ definujeme takto: $\lambda\alpha = (a, \lambda\mathbf{v})$. $\mathbf{M}$-vektor $\alpha = (a, \mathbf{0})$ nazvěme nulovým.

Množina $\mathfrak{M}$ není vektorovým prostorem, protože součet pro $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0$ není definován. Na vektorový prostor ji rozšíříme takto:

V množině $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ dvojic $\mathbf{M}$-vektorů definujme ekvivalenci $\cong$: Jsou-li $[\alpha, \beta]$, $[\alpha', \beta'] \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, pak $[\alpha, \beta] \cong [\alpha', \beta']$ právě tehdy, je-li

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}', \tag{9}$$
$$\langle \mathbf{u}, (O - X) \rangle + \langle \mathbf{v}, (O - Y) \rangle = \langle \mathbf{u}', (O - X') \rangle + \langle \mathbf{v}', (O - Y') \rangle$$

pro všechny body X, Y, X', Y' na přímkách příslušných $\mathbf{M}$-vektorů. Vztah $\cong$ je zřejmě ekvivalence. Vezměme není množinu $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_{/E}$ tříd podle této ekvivalence a definujme v ní součet a násobek reálným číslem přirozeným způsobem:

Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, zvolme $[\alpha, \alpha'] \in \mathbf{A}$, $[\beta, \beta'] \in \mathbf{B}$ tak, aby součty $\alpha + \beta$ a $\alpha' + \beta'$ měly smysl. Snadno se lze přesvědčit, že to skutečně je možné. Pak $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je třída, do níž patří $[\alpha + \beta, \alpha' + \beta']$, $\lambda\mathbf{A}$ je třída, do níž patří $[\lambda\alpha, \lambda\alpha']$. Z (8) a (9) plyne, že právě definované operace nezávisí na výběru prvku ve třídě. Snadno se zjistí, že platí tato

Věta 5. *$\widetilde{\mathfrak{M}}$ je vektorový prostor dimense* 3 *při právě definovaných operacích.*

Třídu obsahující dvojici $[\alpha, \alpha']$, kde α' je nulový $\mathbf{M}$-vektor, lze ztotožnit s $\mathbf{M}$-vektorem α. Tím je dáno vnoření $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_{/E}$. Množina $\widetilde{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}$ je tvořena třídami, pro něž je $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0$ a těm neodpovídá žádný $\mathbf{M}$-vektor. Zcela analogicky se dá vybudovat tato teorie pro objekty typu $(A, \mathbf{v})$, kde $A - O$ a $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé vektory, O je pevný bod v E_2; říkejme jim $\mathbf{P}$-vektory.

5. ZOBRAZENÍ MAYOROVO-MISESOVO A PRAGEROVO

Použijme nyní úvah předcházející části k zobrazení vektorové algebry dimense 3 pomocí zobrazení zavedených v části 2. Označme $\bar{E}_3$ projektivní rozšíření E_3 a zvolme $\mathscr{P}_3 = \bar{E}_3$, $\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_2(\mathscr{V}_3)$, $\mathscr{V}_3$ je zaměření E_3. $\mathscr{P}'_2$ buď projektivní rozšíření libovolné roviny E'_2, $\mathscr{V}_3$ nechť je algebra indukující nesingulární polaritu ι a $\alpha = \iota$. Platí $\mathscr{V}_3 = \mathscr{V}'_2 \oplus \pi^{-1}P$. Tímto rozkladem je definována přirozená projekce $\pi_1 : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}'_2$. Je-li $\mathbf{v} \in \mathscr{V}_3$, nazveme dvojici $(\kappa\pi\mathbf{v}, \pi_1\mathbf{v})$ **P**-obrazem vektoru $\mathbf{v}$ a dvojici $(\mu\pi\mathbf{v}, \pi_1\mathbf{v})$ Mayorovým-Misesovým obrazem vektoru $\mathbf{v}$. Poznámka: Je-li $\mathbf{v} \in \pi^{-1}P$, je třeba nejdříve vektor vhodně rozložit na dva vektory a jejich obrazem je pak prvek z $\tilde{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}$.

Věta 6. *Mayorovým-Misesovým obrazem vektoru je v případě* (1a) ***M**-vektor*, ***P**-obrazem vektoru je v případě* (1b) ***P**-vektor.*

(Ve zbývajících dvou případech jsou to podobné objekty, jejichž teorie je analogická a nebudeme se jí proto zabývat. **P**-zobrazení vektoru v případě (1a) úzce souvisí s Pragerovým zobrazením.)

Důkaz: Je-li $\mathbf{v} \in \mathscr{V}_3$ a $(\mu\pi\mathbf{v}, \pi_1\mathbf{v})$ jeho Mayorův-Misesův obraz v případě (1a), je třeba ukázat, že pro každé dva body X, $Y \in \mu\pi\mathbf{v}$ je $\pi(X - Y) = \pi\pi_1\mathbf{v}$. Označme $\tilde{\pi}_1$ indukovanou projekci, definovanou v odstavci 3. Pak $\pi\pi_1\mathbf{v} = \tilde{\pi}_1\pi\mathbf{v}$. Máme tedy ukázat, že $\pi(X - Y) = \tilde{\pi}_1\pi\mathbf{v}$. Bod $\pi_1\pi\mathbf{v}$ označme A. Body $\pi\mathbf{v}$, P, A leží na přímce podle definice zobrazení $\tilde{\pi}_1$. Najděme její Mayorův-Misesův obraz. Z podmínky (2a) $\mu_p = 1$ plyne: obrazem bodu A je přímka s tímto bodem incidentní; obrazem bodu P je přímka p, tedy rovněž s tímto bodem incidentní. μ obrazem bodu $\pi\mathbf{v}$ je tedy přímka indicentní s A, a tedy $\pi(X - Y) = A$; tím je důkaz proveden. Druhá část důkazu je analogická.

Lemma: *Buďte $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathscr{V}_3$ lineárně závislé, π_1 budiž přirozená projekce, definovaná nějakým direktním rozkladem $\mathscr{V}_3 = \mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2$, a to projekce na $\mathscr{V}_2$. Je-li* $\pi_1(\mathbf{u}), \pi_1(\mathbf{v}), \pi_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq 0$, je $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ *právě tehdy, když* $\pi_1(\mathbf{u}) + \pi_1(\mathbf{v}) = \pi_1(\mathbf{w})$.

Důkaz: Předně je $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \neq 0$. Nechť $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. Pak je $\pi_1(\mathbf{w}) = \pi_1(\mathbf{u}) + \pi_1(\mathbf{v})$ a $\pi_1(\mathbf{w}) = \alpha\,\pi_1(\mathbf{u}) + \beta\,\pi_1(\mathbf{v})$. Z toho plyne $\alpha = 1$, $\beta = 1$ pro $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nezávislá a podobně pro závislá. Tím je důkaz proveden, neboť obrácené tvrzení je zřejmé.

Věta 7. *Mayorovo-Misesovo zobrazení je v případě* (1a) *isomorfismem $\mathscr{V}_3$ na $\tilde{\mathfrak{M}}$.*

Důkaz: Označme Mayorovo-Misesovo zobrazení písmenem $\mathbf{m}$. Že je zobrazením na je zřejmé. Pak stačí ukázat, že pro $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathscr{V}_3$, $\lambda \in R$ platí

$$\text{a)}\ \mathbf{m}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\,\mathbf{m}\mathbf{u}\,,\quad \text{b)}\ \mathbf{m}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{m}\mathbf{u} + \mathbf{m}\mathbf{v}\,.$$

Z definice zobrazení $\mathbf{m}$ plyne

$$\mathbf{m}\mathbf{u} = (\mu\pi\mathbf{u}, \pi_1\mathbf{u})\,,\quad \mathbf{m}\mathbf{v} = (\mu\pi\mathbf{v}, \pi_1\mathbf{v})\,.$$

Tvrzení a) plyne z toho, že $\mu\pi(\lambda\mathbf{u}) = \mu\pi(\mathbf{u})$, $\pi_1(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\pi_1\mathbf{u}$, a tedy $\mathbf{m}(\lambda\mathbf{u}) = (\mu\pi\mathbf{u}, \lambda\pi_1\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{m}\mathbf{u}$.

Tvrzení b) plyne z $\pi_1(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \pi_1(\boldsymbol{u}) + \pi_1(\boldsymbol{v})$.

Lze předpokládat, že $\pi_1(\boldsymbol{u}), \pi_1(\boldsymbol{v}), \pi_1(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \neq 0$. Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ jsou lineárně závislé. Tvrzení pak plyne z lemmatu a z vlastností korelace μ.

Stejnou větu, jako je věta 7, lze dokázat pro $\boldsymbol{P}$-zobrazení v případě (1b).

Ukažme ještě, jak se isomorfismus z věty 7 dá rozšířit na isomorfismus algeber. Pro jednoduchost to uděláme pouze pro Mayorovo-Misesovo zobrazení v případě (1a) a budeme předpokládat, že κ' je otáčení kolem hlavního bodu o $\pm 90°$. Zvolme ortonormální soustavu souřadnic s počátkem v hlavním bodě P', s vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ležícími v E'_2. Střed promítání nechť je bod $C = (0, 0, c)$, $c > 0$. Struktura algebry nechť je dána vztahy (7). Hlavní polarita je polaritou ke kružnici $x_1^2 + x_2^2 \pm c^2 = 0$, kde horní znaménko je pro typ I, dolní pro typ II. Za těchto předpokladů platí:

Lemma: *Je-li vektor* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_2 \neq 0$, $\boldsymbol{r}^u = (X - P')$, *kde* $X \in \mu\pi\boldsymbol{u}$, *je* $\langle \boldsymbol{r}^u, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \mp c\boldsymbol{u}_1$ *když* κ' *je otáčení o* $\pm 90°$.

Důkaz plyne ze vztahů

$$|\boldsymbol{u}_1| : |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{r}^u| : c \,, \quad (\kappa\pi\boldsymbol{u} - P')\, \boldsymbol{r}^u = \mp c^2 \,,$$

při čemž horní znaménko platí pro typ I, spodní pro typ II. Zkoumejme nyní dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, z nichž například $\boldsymbol{u}$ leží ve $\mathscr{V}'_2$ a ukažme, jak se zobrazí vektorový součin $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. $\boldsymbol{M}$-vektor, příslušný k vektoru $\boldsymbol{w}$, je určen jednak přímkou $\mu\pi\boldsymbol{w}$, jednak vektorem $\pi_1\boldsymbol{w}$. Přímka $\mu\pi\boldsymbol{w}$ je polárou průsečíku přímek $\mu\pi\boldsymbol{u}$ a $\mu\pi\boldsymbol{v}$ vzhledem ke kružnici $x_1^2 + x_2^2 \pm c^2 = 0$. Nechť dané vektory mají složky $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_1 = 0$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ a nechť je $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ vzhledem k rozkladu $\mathscr{V}_3 = \mathscr{V}_2 \oplus \oplus\, \pi^{-1}P$. Po dosazení bude

$$\boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle \,,$$

z čehož je

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = \boldsymbol{w}_2 \,, \quad \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \boldsymbol{w}_1 \,.$$

Ze vztahu

$$\langle \boldsymbol{r}^w, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \mp c\boldsymbol{w}_1$$

získáme

$$\langle \boldsymbol{r}^w, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \mp c \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle$$

neboli

$$|\boldsymbol{r}^w|\, |\boldsymbol{w}_2| \sin \psi = \mp c |\boldsymbol{u}_2|\, |\boldsymbol{v}_2| \sin \varphi \,.$$

Pro zjednodušení volíme vektor $\boldsymbol{r}^w$ tak, aby

$$\sin \varphi = -\sin \psi \text{ pro otáčení } \kappa' \text{ o } +90°$$

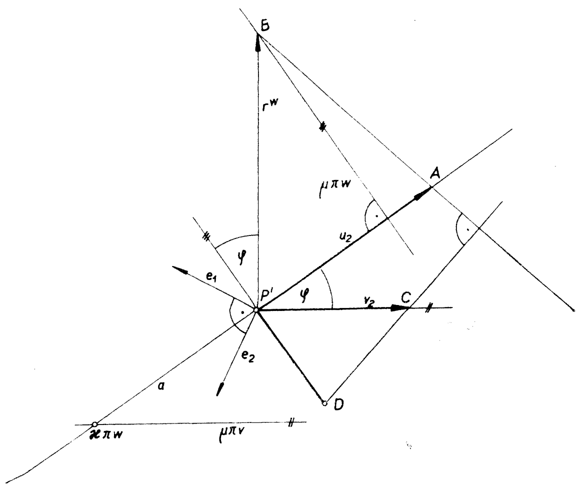
a

$$\sin \varphi = \sin \psi \text{ pro otáčení } \kappa' \text{ o } -90° \,;$$

po úpravě a dělení konstantou c dostaneme pro délku vektoru $\mathbf{w}_2$ vztah

$$\left|\pi_1 \mathbf{w}\right| = \left|\mathbf{w}_2\right| = \left(\left|\mathbf{u}_2\right| \left|\mathbf{v}_2\right|\right) : \left|\mathbf{r}^w\right| .$$

Vlastní konstrukce je patrna z obrázku.



Obr. 1.

Vektory $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{r}^w$ nechť mají počáteční bod v bodě P'; přímka $\mu\pi\mathbf{w}$ je kolmá na $\mu\pi\mathbf{u} = a$ (neboť $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$), směr $\mathbf{r}^w$ volíme kolmo na směr $\mathbf{v}_2$, přímku CD sestrojíme kolmo ke spojnici AB. Pak $\triangle P'AB$ a $\triangle P'DC$ jsou podobné a strana $P'D$ má délku $\left|\pi_1 \mathbf{w}\right|$. Orientace vektoru $\pi_1 \mathbf{w}$ je dána úhlem ψ. V našem případě je $\pi_1 \mathbf{w} = (D - P')$, je-li κ' otáčení o $-90°$, $\pi_1 \mathbf{w} = (P' - D)$, je-li κ' otáčení o $+90°$.

Literatura

[1] *B. Mayor:* Statique des systémes de l'espace. Lausanne 1910.

[2] *R. V. Mises:* Graphische Statik räumlicher Kraftesysteme. Zeitschrift für Mathematik und Physik 64 (1917), 209—232.

[3] *W. Prager:* Beitrag zu Kinematik des Raumfachwerks. Zeitsch. angew. Math. Mech. 6 (1926), 341—355, též 7 (1927), 421—424.

[4] *K. Federhofer:* Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. Wien 1928.

[5] *N. Jacobson:* Lie algebras (ruský překlad). Moskva 1964.

Резюме

ОСНОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ МАЫОРА-МИСЕСА

ЭДИТА ЯНИХОВА, АДОЛФ КАРГЕР (EDITA JÄNICHOVÁ, ADOLF KARGER)

В работе показано, что так называемое изображение Маыора-Мисеса является изоморфным отображением между двумя векторными пространствами, а именно, между пространством обыкновенных векторов в $\mathscr{V}_3$ и пространством $\widetilde{\mathfrak{M}}$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — расширение множества пар $(a, \mathbf{v})$, где a — прямая, лежащая в данной плоскости, и $\mathbf{v}$ — вектор, параллельный этой прямой. Кроме этого показано, что так называемая главная полярность индуцирована алгеброй. В работе была найдена взаимная связь между индуцированной полярностью и строением этой алгебры. Оказывается, что индуцированная корреляция является несингулярной полярностью только тогда, если упомянутая алгебра является алгеброй Ли и ее производная алгебра является той же самой алгеброй. Также была произведена классификация этого изображения, и построена подробная теория только одного типа, первоначально названного Маыор-Мисес, так как теория остальных типов является аналогичной.

Zusammenfassung

GRUNDLAGEN DER MAYOR-MISES'SCHEN ABBILDUNG

EDITA JÄNICHOVÁ, ADOLF KARGER

In der Arbeit ist gezeigt, dass die sog. Mayor-Mises'sche Abbildung im Grunde ein Isomorphismus zwischen zwei Vektorräumen ist, und zwar zwischen einem Raum der gewöhnlichen Vektoren in $\mathscr{V}_3$ und einem Raum $\widetilde{\mathfrak{M}}$, wo $\widetilde{\mathfrak{M}}$ die Erweiterung der Menge $\mathfrak{M}$ der Paare $(a, \mathbf{v})$ ist, wobei a eine Gerade in der Ebene und $\mathbf{v}$ ein Vektor mit ihr parallel ist. Weiter wird gezeigt, dass die sog. Hauptpolarität durch eine Algebra induziert ist, und es ist ein Zusammenhang zwischen der induzierten Polarität und der Struktur dieser Algebra gefunden. Weiter zeigt man, dass die induzierte Korelation eine nichtsinguläre Polarität dann und nur dann ist, wenn die Algebra eine Lie'sche Algebra ist, deren abgeleitete Algebra dieselbe Algebra ist. Ebenfalls wurde auch die Klassifikation dieser Abbildung durchgeführt und es wird eine eingehende Theorie nur einer Art angeführt, die ursprünglich als Mayor-Mises'sche Abbildung genannt wurde, denn die Theorie der übrigen ist analog.

Adresa autorů: Edita Jänichová, Adolf Karger, Katedra deskr. geom., strojní fakulty ČVUT, Horská 4, Praha 2.