

Aplikace matematiky

Vladimír Křístek

Půdorysně zakřivené tenkostěnné pruty uzavřeného tuhého průřezu

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 4, 278–299

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103102>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŮDORYSNĚ ZAKŘIVENÉ TENKOSTĚNNÉ PRUTY UZAVŘENÉHO TUHÉHO PRŮŘEZU

VLADIMÍR KRÍSTEK

(Došlo dne 12. prosince 1966.)

V tomto pojednání se budeme zabývat řešením napjatosti tenkostěnného prutu uzavřeného průřezu, jehož střednici tvoří kruhový oblouk o poloměru R ležící ve vodorovné rovině. Jeho průřez může být obecný, budeme pouze požadovat, aby jeho jedna z hlavních centrálních os setrvačnosti byla vodorovná, tj. aby ležela v téže rovině jako křivá osa prutu. Průřez prutu je tuhý, při deformaci prutu nedochází ke změně tvaru obrysu průřezu. Tato podmínka musí být zajištěna dostatečným příčným ztužením — při jejím nesplnění by napjatost prutu měla zcela jiný charakter a tohoto způsobu výpočtu by nemohlo být použito.

Pro půdorysně zakřivený prut je charakteristické, že nelze od sebe oddělit jednotlivé druhy namáhání. Budeme proto řešit vliv všeho zatížení působícího na prut zároveň, neboť jednotlivé složky tohoto zatížení mohou ovlivňovat více složek vnitřních sil v průřezu prutu (např. zatížení působící kolmo k rovině křivého prutu ovlivňuje ohybové i kroučící momenty).

PODMÍNKY ROVNOVÁHY

Pro sestavení rovnic rovnováhy vyjmemme dvěma radiálními řezy z prutu prvek ve tvaru segmentu, jehož délka měřená po střednici je dl (obr. 1). V profatých stěnách tenkostěnného prutu působí normální a smyková napětí jejichž integrací po celé ploše průřezu dostáváme šest složek vnitřních sil:

normální síla $N(l)$,

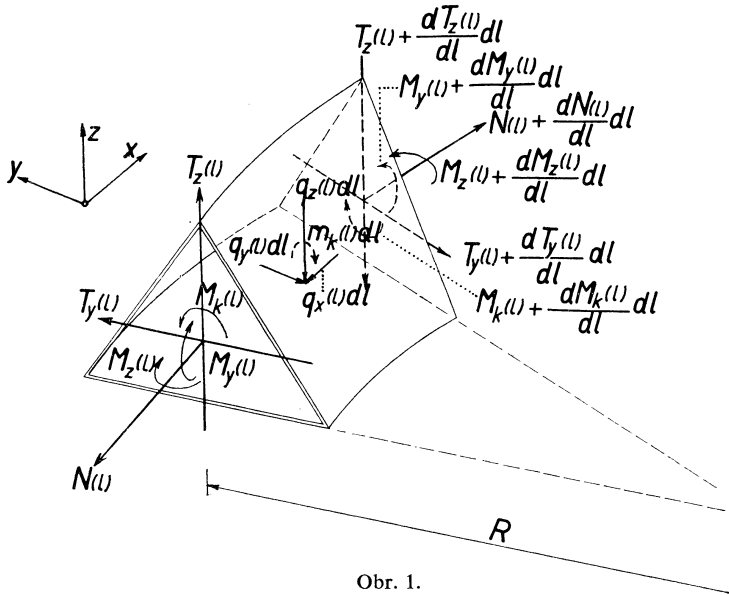
posouvající síly $T_y(l)$ resp. $T_z(l)$ jejichž směr působení souhlasí se směrem osy y resp. z ,

ohybové momenty $M_y(l)$ a $M_z(l)$; první z nich působí ve svislé rovině xz , druhý v rovině prutu xy ,

kroučící moment $M_k(l)$.

Protože se jedná o výminky rovnováhy průřezu jako celku, které nezávisí na způsobu rozložení napětí v průřezu ale pouze na jejich výslednicích, neobjevuje se v nich bimoment, tj. veličina charakterisující toto rozložení.

Prvek sám je zatížen vnějším zatížením, jehož složky do směrů souřadných os jsou $q_x(l)$, $q_y(l)$ a $q_z(l)$ a které svým umístěním vyvozuje též spojité kroutící zatížení $m_k(l)$ (obr. 1).



Obr. 1.

Součtové výminky rovnováhy vyňatého prvku jsou

$$(1) \quad \frac{dN(l)}{dl} - \frac{T_y(l)}{R} - q_x(l) = 0,$$

$$(2) \quad \frac{dT_y(l)}{dl} + \frac{N(l)}{R} + q_y(l) = 0,$$

$$(3) \quad \frac{dT_z(l)}{dl} + q_z(l) = 0,$$

podobně momentové výminky rovnováhy můžeme psát ve tvaru

$$(4) \quad \frac{dM_y(l)}{dl} - T_z(l) + \frac{M_k(l)}{R} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{dM_z(l)}{dl} - T_y(l) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{dM_k(l)}{dl} - \frac{M_y(l)}{R} + m_k(l) = 0.$$

Z těchto rovnic můžeme vyloučit síly $T_y(l)$, $T_z(l)$ a $N(l)$. Dostáváme soustavu tří diferenciálních rovnic, jejíž tvar je

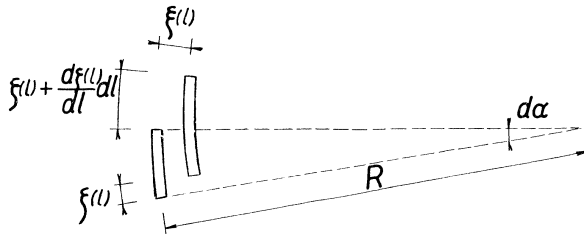
$$(7) \quad \frac{d^2 M_y(l)}{dl^2} + \frac{1}{R} \frac{dM_k(l)}{dl} + q_z(l) = 0,$$

$$(8) \quad \frac{d^3 M_z(l)}{dl^3} + \frac{1}{R^2} \frac{dM_z(l)}{dl} + \frac{dq_y(l)}{dl} + \frac{1}{R} q_x(l) = 0,$$

$$(9) \quad \frac{dM_k(l)}{dl} - \frac{M_y(l)}{R} + m_k(l) = 0.$$

SOUVISLOST VNITŘNÍCH SIL A PŘETVOŘENÍ

Nejdříve si všimneme geometrické stránky deformace. Průřezy prutu se při jeho deformaci příčně posouvají (průhyb *proti* směru osy y označíme $\xi(l)$, průhyb *proti* směru osy z $\eta(l)$, nakrucují se proti sobě (úhel zkroucení v rovině kolmé na osu prutu, kladný ve směru otáčení ručiček hodinových, dále značíme $\varphi(l)$ obr. 3) a též se vlivem podélné deformace prutu podélně posouvají (přemístění ve směru osy x $\zeta(l)$).



Obr. 2.

a) Uvažujme nejprve, že při deformaci se prvek prutu posunul v podélném směru o hodnotu $\zeta(l)$ a příčně (směrem ke středu křivosti prutu, tj. proti směru osy y) se přemístil o $\xi(l)$. Z obr. 2 je zřejmé, že původní délka prvku $dl = R d\alpha$ se změnila na hodnotu

$$[R - \xi(l)] d\alpha + \frac{d\zeta(l)}{dl} dl$$

a proto pro podélné poměrné prodloužení platí vztah

$$\varepsilon(l) = \frac{[R - \xi(l)] d\alpha + \frac{d\zeta(l)}{dl} dl - R d\alpha}{R d\alpha} = \frac{d\zeta(l)}{dl} - \frac{\xi(l)}{R}.$$

Použijeme-li Hookeova zákona, dostáváme rovnici

$$(10) \quad N(l) = EF \left[\frac{d\xi(l)}{dl} - \frac{\xi(l)}{R} \right],$$

kde F značí plochu příčného řezu prutu.

b) Sledujme nyní ohyb prutu v jeho rovině. Vliv posouvající síly na průhyb jako obvykle zanedbáme. Ohybový moment $M_z(l)$ bude úměrný změně křivosti prutu. Tato změna křivosti se skládá ze dvou částí – první část je křivost vlastní ohybové čáry $d^2\xi(l)/dl^2$, druhá část je vyvozena změnou velikosti poloměru R vlivem posunu $\xi(l)$. Platí tedy výraz

$$(11) \quad M_z(l) = -EJ_z \left[\frac{d^2\xi(l)}{dl^2} + \frac{1}{R_1(l)} - \frac{1}{R} \right],$$

kde J_z je moment setrvačnosti průřezu k ose z ,

$R_1(l)$ je zmenšený poloměr křivosti prutu vyvozený posunem prvku o hodnotu průhybu $\xi(l)$; velikost tohoto zmenšeného poloměru je dána vztahem

$$(12) \quad R_1(l) = R - \xi(l) = R \left[1 - \frac{\xi(l)}{R} \right] \doteq R \left[1 - \frac{\frac{\xi(l)}{R}}{1 + \frac{\xi(l)}{R}} \right] = \frac{R}{1 + \frac{\xi(l)}{R}}.$$

Spojením výrazů (11) a (12) dostaneme rovnici **ŘEZ 1-1'**

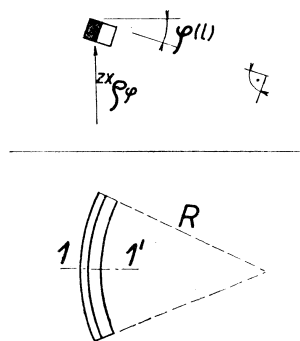
$$(13) \quad M_z(l) = -EJ_z \left[\frac{d^2\xi(l)}{dl^2} + \frac{\xi(l)}{R^2} \right].$$

c) Ohyb prutu ve svislé rovině zx bude ovlivňovat kromě momentu $M_y(l)$ i zkrcování prutu, jímž též vzniká změna křivosti v této svislé rovině. Přemístí-li se totiž při kroucení prvek prutu ve tvaru segmentu o úhel $\varphi(l)$ (jak je schematicky naznačeno na obr. 3), získá prut ve svislé rovině jistou křivost, jejíž velikost je

$${}^{zx}k_\varphi(l) = \frac{\sin \varphi(l)}{R}.$$

Úhel zkrcování $\varphi(l)$ dosahuje malých hodnot a proto můžeme přibližně položit $\sin \varphi(l) \doteq \varphi(l)$; platí tedy vztah

$${}^{zx}k_\varphi(l) = \frac{\varphi(l)}{R}.$$



Obr. 3.

Křivost prutu ve svislé rovině $d^2\eta(l)/dl^2$ je tedy zčásti vyvozena vlivem ohybového momentu $M_y(l)$ a zčásti právě uvedeným následkem krouživého pootočení zakřiveného elementu o úhel $\varphi(l)$ podle rovnice

$$\frac{d^2\eta(l)}{dl^2} = -\frac{M_y(l)}{EJ_y} + {}^{zx}k_{\varphi}(l) = -\frac{M_y(l)}{EJ_y} + \frac{\varphi(l)}{R},$$

jejíž úpravou dostáváme vztah¹⁾

$$(14) \quad M_y(l) = -EJ_y \left[\frac{d^2\eta(l)}{dl^2} - \frac{\varphi(l)}{R} \right].$$

d) Při řešení stavu kroucení budeme nejprve řešit případ, při kterém se průřezy deplanačně neovlivňují, tedy deplanují všechny stejně. Velikost smykových napětí vytvářejících v průřezu kroučící moment M_k závisí jednak na poměrném úhlu zkroucení prutu $d\varphi(l)/dl$ a jednak na torsi (druhé křivosti) ${}^2k_{\eta}(l)$ prostorové křivky, v níž vlivem svislého průhybu $\eta(l)$ přejde původně rovinná střednice prutu. Tuto torsi, podobně jako poměrný úhel zkroucení, si můžeme představit jako „rychlost“ otáčení binormály ve shodném smyslu. Proto platí vztah

$$(15) \quad M_k = A \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + {}^2k_{\eta}(l) \right],$$

kde A je jistá konstanta.

Abychom mohli vyjádřit tento vliv průhybu η na kroučící moment M_k , vyjádříme si čáru svislých průhybů ve tvaru

$$(16) \quad \mathbf{r}_{\eta}(l) = \mathbf{i} \cdot R \cos \frac{l}{R} + \mathbf{j} \cdot R \sin \frac{l}{R} + \mathbf{k} \cdot \eta(l),$$

kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory ve směrech os $+y, +x, -z$ v bodě $l = 0$ (po řadě)²⁾.

¹⁾ O znaménkové správnosti tohoto výrazu se můžeme přesvědčit touto úvahou: prvek prutu nechť se nejprve při kroucení natočí o kladný úhel $\varphi(l)$, průmětem tohoto prvku do svislé roviny je pak „oblouček“ tvaru \frown ; působil-li dále na takto přemístěný prvek kladným ohybovým momentem $M_y(l)$, můžeme tím dosáhnout toho, že tento moment „vyrovná“ ve svislé rovině prvek tak, že průhyb nevznikne.

²⁾ Tím je pravotočivý souřadný systém zachován, neboť jednotkový vektor \mathbf{l} náleží k ose $+y$, vektor \mathbf{j} k ose $+x$ (tedy dvě osy jsou zaměněny) a vektor \mathbf{k} směřuje proti kladnému směru osy z .

Torse křivky dané vztahem (16) je dána výrazem

$$(17) \quad {}^2k_{\eta}(l) = \frac{\begin{vmatrix} -\sin \frac{l}{R}, & \cos \frac{l}{R}, & \frac{d\eta(l)}{dl} \\ -\frac{1}{R} \cos \frac{l}{R}, & -\frac{1}{R} \sin \frac{l}{R}, & \frac{d^2\eta(l)}{dl^2} \\ \frac{1}{R^2} \sin \frac{l}{R}, & -\frac{1}{R^2} \cos \frac{l}{R}, & \frac{d^3\eta(l)}{dl^3} \end{vmatrix}}{\frac{1}{R^2} + \left[\frac{d^2\eta(l)}{dl^2} \right]^2},$$

kteřý po zanedbání derivací funkce $\eta(l)$ vyššího řádu než prvního dostane jednoduchý tvar

$$(18) \quad {}^2k_{\eta}(l) = \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl}.$$

Dosazením vztahu (18) do rovnice (15) dostáváme

$$(19) \quad M_k = A \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} \right].$$

Pro prosté kroucení přímých tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu platí známý vztah

$$(20) \quad M_k = GJ_k \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

kde G je modul pružnosti ve smyku,

J_k je moment tuhosti průřezu v prostém kroucení podle vzorce

$$J_k = \frac{\omega_0^2}{\oint \frac{ds}{n(s)}},$$

v němž značí ω_0 dvojnásobnou plochu omezenou střednicí průřezu,

$n(s)$ tloušťku stěny tenkostěnného prutu v místě s

a v němž integrujeme podle proměnné s měřené podél střednice průřezu, viz např. [1], [2].

Všimněme si stavby rovnic (19) a (20), které jsou si značně podobné. Poměrný úhel kroucení $d\varphi(x)/dx$ je v rovnici (19) pro zakřivené pruty nahrazen výrazem $d\varphi(l)/dl +$

+ $1/R \cdot d\eta(l)/dl$ a uvážíme-li známý způsob (např. podle [1], [2]) odvození rovnice (20), vidíme, že konstanta A ve vztahu (19) se opět rovná GJ_k . Platí tedy pro prosté kroucení křivých prutů rovnice

$$(21) \quad M_k = GJ_k \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} \right].$$

Zajímavým limitním případem prostého kroucení křivého prutu je takový, u kterého požadujeme, aby každý průřez byl namáhán pouze kroučícím momentem M_k stejné hodnoty pro všechny průřezy l a aby prut nebyl vůbec namáhán ohybem. Tento případ vyžaduje zvláštní způsob zatížení prutu, nestačí pouze zatížit volné konce prutu vnějším kroučícím momentem M_k neboť tím by se vyvolaly i momenty ohybové. Splníme-li tento požadavek, můžeme při použití rovnic (14) a (21) psát pro řešení tohoto limitního případu soustavu rovnic ve tvaru

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\eta(l)}{dl^2} - \frac{\varphi(l)}{R} &= 0, \\ \frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} &= \frac{M_k}{GJ_k}, \end{aligned}$$

jejíž obecné řešení je dáno funkcemi

$$(23) \quad \varphi(l) = C_1 \sin \frac{l}{R} + C_2 \cos \frac{l}{R},$$

$$(24) \quad \eta(l) = \frac{M_k R}{GJ_k} l - C_1 R \sin \frac{l}{R} - C_2 R \cos \frac{l}{R} + C_3.$$

Probereme si dva případy uložení prutu.

1. Počáteční průřez prutu je posuvně vetknut (nenastává zde nakroucení, svislý průhyb je zde nulový, tečna k čáře svislých průhybů je vodorovná, ale deplanace zde omezována není). Pro určení tří konstant v obecném řešení tedy máme podmínky

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \\ \eta(0) &= 0, \\ \frac{d\eta(0)}{dl} &= 0. \end{aligned}$$

Průběh úhlu pootočení a svislého průhybu se řídí rovnicemi

$$\begin{aligned} \varphi(l) &= \frac{M_k R}{GJ_k} \sin \frac{l}{R}, \\ \eta(l) &= \frac{M_k R}{GJ_k} \left(l - R \sin \frac{l}{R} \right). \end{aligned}$$

2. Natočme si tečnu k čáře svislých průhybů v počátečním průřezu tak, aby platily podmínky

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0, \\ \eta(0) &= 0, \\ \frac{d\eta(0)}{dl} &= \frac{M_k R}{GJ_k}.\end{aligned}$$

V tomto případě všechny tři konstanty v obecném řešení (23) a (24) budou nulové. Pro řešení budou platit rovnice

$$\begin{aligned}\varphi(l) &\equiv 0, \\ \eta(l) &= \frac{M_k R}{GJ_k} l.\end{aligned}$$

Prut nabude tvaru šroubovice, průřezy se proti sobě nenakrotí v obvyklém smyslu a celý kroutící moment je přenášen smykovými napětími vyvolanými torsí křivky svislých průhybů.

V obecném případě, kdy zakřivený tenkostěnný prut je namáhán kroutícím momentem $M_k(l)$, který není stálý pro celou délku prutu, dále je namáhán ohybovým momentem $M_y(l)$ a kdy v některých průřezech prutu je nějakým způsobem ovlivňována deplanace průřezu (např. vetknutím), dochází, podobně jako u prutů přímých, k vázanému kroucení. Vznikají zde doplňková normální napětí a rozdělení smykových napětí se mění. Pro tenkostěnné pruty je charakteristické, že tyto účinky nejsou lokální a proto u nich nelze v plné míře použít principu Saint-Venantova.

Při řešení použijeme předpokladu Umanského, podle kterého deplanaci $u(l, s)$ vyjádříme ve tvaru

$$(25) \quad u(l, s) = f(l) \cdot u_1(s)$$

jako součin funkce deplanace $f(l)$ (dosud neznámé) a jednotkové deplanace $u_1(s)$ (tj. deplanace průřezu přímého prutu za prostého kroucení při jednotkovém poměrném úhlu zkroucení, nebo křivého prutu při $d\varphi(l)/dl + (1/R) \cdot (d\eta(l)/dl) \equiv 1$).

Označíme-li formálně

$$-u_1(s) = {}^1u(s),$$

můžeme velikost normálních napětí vyvozených *vázaným kroucením* (tedy nikoliv ohybem apod.) při platnosti Hookeova zákona vyjádřit vztahem

$$(26) \quad \sigma_k(l, s) = E \frac{\partial u(l, s)}{\partial l} = -E \frac{df(l)}{dl} {}^1u(s).$$

Rozložení smykových napětí podél střednice průřezu získáme z podmínky, že jimi vyvolané deformace sledují tvar, který je úměrný jednotkové deplanaci průřezu.

Odvození tohoto způsobu rozložení smykových napětí provedeme podobným způsobem jako pro pruty přímé s respektováním náhrady poměrného úhlu zkroucení výrazem $d\varphi(l)/dl + (1/R)(d\eta(l)/dl)$. Tím dostáváme rovnici

$$(27) \quad \tau_k(l, s) = G \left\{ f(l) \left[\frac{\omega_0}{n(s) \oint \frac{ds}{n(s)}} - r(s) \right] + \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} \right] r(s) \right\},$$

kde $r(s)$ značí vzdálenost tečny ke střednici průřezu v místě s od středu kroucení průřezu.

Známa základní diferenciální rovnice Umanského pro vázané kroucení *přímých* prutů má tvar

$$(28) \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - f(x) \frac{GJ_k}{EJ_u} v = -M_k(x) \frac{v}{EJ_u};$$

protože pro tyto přímé pruty platí vztahy

$$(29) \quad v = 1 - \frac{J_k}{\oint r^2(s) dF} = 1 - \frac{J_k}{J_c}, \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{GJ_c} \{M_k(x) - f(x)[G(J_k - J_c)]\},$$

můžeme spojením výrazů (28) a (29) dostat základní diferenciální rovnici pro *přímé* pruty v jiném tvaru

$$(30) \quad \frac{1}{GJ_c} \frac{d^2 M_k(x)}{dx^2} - \frac{v}{EJ_u} M_k(x) = \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} - \frac{GJ_k}{EJ_u} v \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

ve kterém se neobjevuje jako neznámá funkce deplanace $f(x)$ ale úhel zkroucení $\varphi(x)$. Provedeme-li zmíněnou záměnu výrazu $d\varphi(x)/dx$ v rovnici (30) dostaneme diferenciální rovnici popisující vázané kroucení *křivých* prutů ve tvaru

$$(31) \quad \frac{1}{GJ_c} \frac{d^2 M_k(l)}{dl^2} - \frac{v}{EJ_u} M_k(l) = \frac{d^3 \varphi(l)}{dl^3} + \frac{1}{R} \frac{d^3 \eta(l)}{dl^3} - \frac{GJ_k}{EJ_u} v \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} \right].$$

Souvislost vnitřních sil $N(l)$, $M_y(l)$, $M_z(l)$ a $M_k(l)$ a deformací $\zeta(l)$, $\xi(l)$, $\eta(l)$ a $\varphi(l)$ vyjadřují čtyři rovnice: (10), (13), (14) a (31). Ze stavby těchto rovnic vidíme, že na sobě závisí jednak podélné deformace a ohyb v rovině prutu a jednak ohyb kolmo k rovině prutu a kroucení. Proto musíme tyto závislé stavy řešit současně, při tom si musíme uvědomit, že vnitřní síly $N(l)$, $M_y(l)$, $M_z(l)$ a $M_k(l)$ neznáme a nelze je ani v obecném případě určit z podmínek rovnováhy prutu jako celku. Je tedy našim úkolem uvést do závislosti deformace a vnější zatížení prutu, které jediné spolu s podmínkami uložení konců prutu známe.

Pro ohyb prutu v jeho rovině dostaneme spojením rovnice (8) s výrazem (13) samostatnou rovnicí

$$(32) \quad EJ_z \left[\frac{d^5 \xi(l)}{dl^5} + \frac{2}{R^2} \frac{d^3 \xi(l)}{dl^3} + \frac{1}{R^4} \frac{d\xi(l)}{dl} \right] - \frac{dq_y(l)}{dl} - \frac{1}{R} q_x(l) = 0. \quad ^3$$

Rovnice (32) má obecné řešení ve tvaru

$$(33) \quad \xi(l) = C_1 + C_2 \sin \frac{l}{R} + C_3 \cos \frac{l}{R} + C_4 l \sin \frac{l}{R} + C_5 l \cos \frac{l}{R} + Q_q(l),$$

kde $Q_q(l)$ je partikulární integrál rovnice (32) příslušný zatížení prutu $q_x(l)$, $q_y(l)$.

Toto obecné řešení obsahuje pět konstant; čtyři z nich můžeme určit obvyklým způsobem z podmínek uložení konců prutu, zbývající pátou konstantu však tímto způsobem neurčíme. Proto určení této poslední konstanty můžeme provést např. tímto postupem:

Užitím čtyř nezávislých podmínek plynoucích z uložení konců prutu můžeme vyjádřit čtyři konstanty obecného řešení (33) v závislosti na páté z nich (kterékoliv); máme tedy toto řešení ve tvaru $\xi(l, C_i)$.

Dosadíme-li nyní zderivovaný vztah (13) do rovnice (5) dostáváme pro posouvající sílu $T_y(l)$ výraz

$$(34) \quad T_y(l) = -EJ_z \left[\frac{d^3 \xi(l)}{dl^3} + \frac{1}{R^2} \frac{d\xi(l)}{dl} \right].$$

Nyní vyjádříme z rovnice (2) normální sílu $N(l)$ a dosadíme ji do vztahu (10), který s přihlédnutím k výrazu (34) dostane tvar

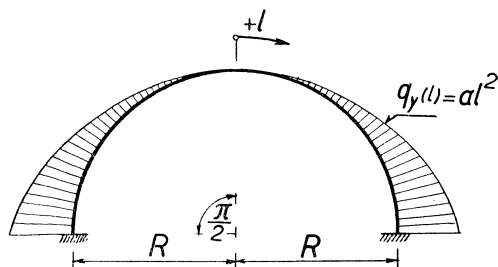
$$(35) \quad REJ_z \left[\frac{d^4 \xi(l)}{dl^4} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \xi(l)}{dl^2} \right] - q_y(l) R = EF \left[\frac{d\zeta(l)}{dl} - \frac{\zeta(l)}{R} \right].$$

Jak již bylo poznamenáno, máme průhyb ξ určen v závislosti na jedné z konstant obecného řešení. Dosadíme-li tuto funkci $\xi(l, C_i)$ do vztahu (35), stane se tento vztah diferenciální rovnicí prvního řádu pro neznámý podélný posun $\zeta(l)$. Z řešení této diferenciální rovnice vyplyne další jedna neznámá konstanta K – závisí tedy podélný posun ζ na dvou konstantách C_i a K . Tyto konstanty určíme v obvyklém případě neposuvného uložení konců prutu ze dvou podmínek nulového podélného posunu koncových průřezů prutu.

Kdyby však byl prut na konci uložen posuvně, popř. by byl konec prutu zcela volný, potom by byla v tomto bodě nulová (nebo známá vnější) normální síla $N(l_0)$

³⁾ Předpokládáme-li neomezený růst poloměru křivosti R , potom tato rovnice přejde ve známý vztah pro průhybovou čáru přímého prutu.

a proto by stačilo v rovnici (35) psát v tomto *koncovém bodě* l_0 místo pravé strany, představující normální sílu, nulu (nebo vnější známou sílu $N(l_0)$). Tím by nám takto upravený vztah (35) v bodě l_0 poskytl podmínku pro určení zbývajících konstant C_i .



Obr. 4.

Protože tento způsob určování konstant není zcela běžný, ukážeme si jej na jednoduchém příkladě. Uvažujme vetknutý obloukový prut (obr. 4) zatížený příčným zatížením o intenzitě $q_y(l) = al^2$; podélné zatížení prutu je nulové. Protože je úloha souměrná, dvě konstanty v obecném řešení (33) vypadnou a tím toto řešení dostane tvar

$$\xi(l) = C_1 + C_3 \cos \frac{l}{R} + C_4 l \sin \frac{l}{R} + \frac{R^4 al^2}{EJ_z}.$$

Uplatněním obvyklých podmínek pro vetknutý prut

$$\xi\left(\pm \frac{\pi R}{2}\right) = 0, \quad \left[\frac{d\xi(l)}{dl}\right]_{l=\pm(\pi R)/2} = 0,$$

vyjádříme konstanty C_1 a C_3 v závislosti na C_4 a proto rovnice pro průhyb zatím je

$$(36) \quad \xi(l, C_4) = -C_4 \frac{\pi R}{2} - \frac{R^6 \pi^2 a}{4EJ_z} + \left(C_4 R + \frac{R^6 \pi a}{EJ_z}\right) \cos \frac{l}{R} + C_4 l \sin \frac{l}{R} + \frac{R^4 al^2}{EJ_z}.$$

Tento výraz dosadíme do rovnice (35), která po integraci dostane tvar

$$(37) \quad \zeta(l) = \left[C_4 \sin \frac{l}{R} \left(2R - \frac{2J_z}{RF} \right) - l \cos \frac{l}{R} - \frac{\pi l}{2} \right] + \frac{Ra}{E} \left(\frac{2R^2 l}{F} - \frac{l^3}{3F} - \frac{R^4 \pi^2 l}{4J_z} + \frac{R^5 \pi}{J_z} \sin \frac{l}{R} + \frac{R^2 l^3}{3J_z} \right) + K.$$

Z podmínek nulových podélných posunů koncových průřezů

$$\zeta\left(\pm \frac{\pi R}{2}\right) = 0$$

dostáváme hodnoty konstant K a C_4 ; platí

$$K = 0,$$

$$C_4 = \frac{R^4 a \pi}{E} \frac{\frac{1}{F} - \frac{\pi^2}{24F} + \frac{R^2}{J_z} - \frac{R^2 \pi^2}{12J_z}}{\frac{R\pi^2}{4} - 2R + \frac{2J_z}{RF}}.$$

Dosazením velikostí těchto konstant do vztahů (36) a (37) dostaneme definitivní tvar funkčního vyjádření průhybu $\xi(l)$ a podélného posunu $\zeta(l)$. Odtud též vidíme, že funkce $\zeta(l)$ je lichá – toto zjištění odpovídá názoru, že na ose souměrnosti vodorovný podélný posun nenastane.

Velikosti vnitřních sil $N(l)$, $M_x(l)$ a $T_y(l)$ nutné pro dimensování prutu určíme dosazením takto získaných funkcí do pravých stran rovnic (10), (13) a (34). Přitom rovnice rovnováhy (1) až (6) jsou přesně splněny.

OHYB KOLMO NA ROVINU PRUTU A VÁZANÉ KROUCENÍ

Naším prvním úkolem v této části je uvést do souvislosti deformace (svislý průhyb $\eta(l)$ a úhel pootočení $\varphi(l)$) a vnější zatížení prutu. Dosáhneme toho spojením vztahů (7), (9), (14) a (31), ze kterých vyloučíme momenty $M_y(l)$ a $M_k(l)$. Dostaneme soustavu dvou diferenciálních rovnic ve tvaru

$$(38) \quad \frac{d^4 \eta(l)}{dl^4} + \alpha_1 \frac{d^2 \eta(l)}{dl^2} + \alpha_2 \frac{d^2 \varphi(l)}{dl^2} + \alpha_3 \varphi(l) = P(l),$$

$$\frac{d^4 \varphi(l)}{dl^4} + \beta_1 \frac{d^2 \varphi(l)}{dl^2} + \beta_2 \varphi(l) + \beta_3 \frac{d^4 \eta(l)}{dl^4} + \beta_4 \frac{d^2 \eta(l)}{dl^2} = Q(l), \quad ^4$$

⁴⁾ Pro $R \rightarrow \infty$ (tj. pro přímý prut) se tato soustava rozpadne na dvě nezávislé rovnice

$$\frac{d^4 \eta(l)}{dl^4} = \frac{q_z(l)}{EJ_y},$$

$$\frac{d^4 \varphi(l)}{dl^4} - \frac{GJ_k}{EJ_u} \frac{d^2 \varphi(l)}{dl^2} = \frac{\nu}{EJ_u} m_k(l) - \frac{1}{GJ_c} \frac{d^2 m_k(l)}{dl^2};$$

první popisuje ohyb prutu ve svislé rovině a druhá je známá rovnice vázaného kroucení (zderivovaná rovnice (30) s uplatněním vztahu $[dM_k(x)]/dx = -m_k(x)$).

kde značí

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{R^2}, & \beta_1 &= - \left[\frac{GJ_k v}{EJ_u} + \frac{EJ_y}{R^2 GJ_c} \right], \\ \alpha_2 &= - \frac{1}{R}, & \beta_2 &= \frac{vJ_y}{R^2 J_u}, \\ \alpha_3 &= - \frac{1}{R^3}, & \beta_3 &= \frac{1}{R} \left[1 + \frac{EJ_y}{GJ_c} \right], \\ P(l) &= \frac{1}{EJ_y} \left[q_z(l) - \frac{m_k(l)}{R} \right], & \beta_4 &= - \frac{v}{R} \left[\frac{J_y}{J_u} + \frac{GJ_k}{EJ_u} \right], \\ Q(l) &= \frac{v}{EJ_u} m_k(l) - \frac{1}{GJ_c} \frac{d^2 m_k(l)}{dl^2}. \end{aligned}$$

Jestliže pravé strany rovnic soustavy (38) je možno vyjádřit jako lineární kombinaci výrazů tvaru $l^m \cdot e^{\lambda l}$ (kde m je celé nezáporné číslo a λ je číslo obecně komplexní) můžeme pro řešení této soustavy výhodně použít Laplaceovu transformaci.

Obě rovnice soustavy (38) přenásobíme výrazem e^{-pl} a provedeme jejich integraci od 0 do $+\infty$. Tím přejde tato soustava diferenciálních rovnic v soustavu dvou algebraických rovnic pro obrazy $J_\eta(p)$, $J_\varphi(p)$ hledaných funkcí $\eta(l)$ a $\varphi(l)$. Tyto obrazy hledaných funkcí a obrazy pravých stran rovnic jsou dány vztahy

$$(39) \quad \begin{aligned} J_\eta(p) &= \int_0^\infty \eta(l) e^{-pl} dl, & J_\varphi(p) &= \int_0^\infty \varphi(l) e^{-pl} dl, \\ H(p) &= \int_0^\infty P(l) e^{-pl} dl, & Z(p) &= \int_0^\infty Q(l) e^{-pl} dl. \end{aligned}$$

Označíme-li „počáteční parametry“ hledaných funkcí v bodě $l = 0$

$$(40) \quad \begin{aligned} \left[\frac{d^3 \eta(l)}{dl^3} \right]_{l=0} &= -A_1, & \left[\frac{d^3 \varphi(l)}{dl^3} \right]_{l=0} &= -B_1, \\ \left[\frac{d^2 \eta(l)}{dl^2} \right]_{l=0} &= -A_2, & \left[\frac{d^2 \varphi(l)}{dl^2} \right]_{l=0} &= -B_2, \\ \left[\frac{d\eta(l)}{dl} \right]_{l=0} &= -A_3, & \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} \right]_{l=0} &= -B_3, \\ \eta(0) &= -A_4, & \varphi(0) &= -B_4, \end{aligned}$$

můžeme zmíněnou soustavu algebraických rovnic pro obrazy hledaných funkcí psát ve tvaru

$$(41) \quad \begin{aligned} & \gamma_1 + p\gamma_2 + p^2A_3 + p^3A_4 + \\ & + p^2(p^2 + \alpha_1)J_\eta(p) + (\alpha_2p^2 + \alpha_3)J_\varphi(p) = H(p), \\ & \delta_1 + p\delta_2 + p^2\delta_3 + p^3\delta_4 + \\ & + p^2(p^2\beta_3 + \beta_4)J_\eta(p) + (p^4 + p^2\beta_1 + \beta_2)J_\varphi(p) = Z(p), \end{aligned}$$

kde značí

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= A_1 + \alpha_1A_3 + \alpha_2B_3, \\ \gamma_2 &= A_2 + \alpha_1A_4 + \alpha_2B_4, \\ \delta_1 &= B_1 + \beta_1B_3 + \beta_3A_1 + \beta_4A_3, \\ \delta_2 &= B_2 + \beta_1B_4 + \beta_3A_2 + \beta_4A_4, \\ \delta_3 &= B_3 + \beta_3A_3, \\ \delta_4 &= B_4 + \beta_3A_4. \end{aligned}$$

Řešením soustavy (41) dostáváme

$$(42) \quad \begin{aligned} & p^7A_4 + p^6A_3 + p^5(\gamma_2 - \delta_4\alpha_2 + A_4\beta_1) + p^4(\gamma_1 - \alpha_2\delta_3 + A_3\beta_1) + \\ & + p^3(\gamma_2\beta_1 - \alpha_2\delta_2 + A_4\beta_2 - \alpha_3\delta_4) + p^2(A_3\beta_2 - \alpha_2\delta_1 + \gamma_1\beta_1 - \\ & - \delta_3\alpha_3) + p(\gamma_2\beta_2 - \delta_2\alpha_3) + \gamma_1\beta_2 - \delta_1\alpha_3 + Z(p)(\alpha_2p^2 + \alpha_3) - \\ & - H(p)(p^4 + p^2\beta_1 + \beta_2) \\ J_\eta(p) &= - \frac{\quad}{p^2[p^6 + p^4(\beta_1 + \alpha_1 - \alpha_2\beta_3) + p^2(\beta_2 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_4) + \alpha_1\beta_1 - \alpha_3\beta_4]}, \end{aligned}$$

$$(43) \quad \begin{aligned} & p^5(A_4\beta_3 - \delta_4) + p^4(A_3\beta_3 - \delta_3) + p^3(\gamma_2\beta_3 - \delta_2 + A_4\beta_4 - \delta_4\alpha_1) + \\ & + p^2(\gamma_1\beta_3 - \delta_1 + A_3\beta_4 - \delta_3\alpha_1) + p(\gamma_2\beta_4 - \delta_2\alpha_1) + \gamma_1\beta_4 - \delta_1\alpha_1 + \\ & + Z(p)(p^2 + \alpha_1) - H(p)(p^2\beta_3 + \beta_4) \\ J_\varphi(p) &= \frac{\quad}{p^6 + p^4(\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2\beta_3) + p^2(\alpha_1\beta_1 + \beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_2\beta_4) + \alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_4}. \end{aligned}$$

Oba tyto výrazy, které představují obrazy hledaných funkcí $\eta(l)$ a $\varphi(l)$ podle (39), je možno zapsat jako součet elementárních zlomků ve tvaru

$$J_\eta(p) = \sum_k \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\eta D_{kj}}{(p - p_k)^j}, \quad J_\varphi(p) = \sum_b \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\varphi D_{bi}}{(p - p_b)^i},$$

kde p_k, p_b jsou kořeny polynomů ve jmenovateli výrazů (42) a (43),

n_k, n_b je násobnost těchto kořenů,

D_{kj}, D_{bi} jsou čísla (obecně komplexní) vzniklá tímto rozkladem.

Hledané funkce $\eta(l)$ a $\varphi(l)$, tj. originály výrazů (42) a (43) dostaneme ze vzorců

$$\eta(l) = \sum_k \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\eta D_{kj} \cdot l^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_k l}, \quad \varphi(l) = \sum_b \sum_{i=1}^{n_b} \frac{\varphi D_{bi} \cdot l^{i-1}}{(i-1)!} e^{p_b l}.$$

Tyto funkce $\eta(l)$ a $\varphi(l)$ jsou obecným řešením soustavy diferenciálních rovnic (38). Úlohu konstant tu přebírá osm neznámých „počátečních parametrů“ $A_1 \div B_4$ daných vzorcí (40), které určíme z okrajových podmínek. Tyto okrajové podmínky budou mít různý tvar podle způsobu uložení konce prutu.

a) Konec prutu je vetknut. V tomto místě l_0 nenastává žádné kroutivé pootočení průřezu, žádný průhyb, tečna k čáře svislých průhybů je vodorovná a průřez ve vetknutí nedeplanuje. Platí tedy podmínky

$$(44) \quad \varphi(l_0) = 0,$$

$$(45) \quad \eta(l_0) = 0,$$

$$(46) \quad \frac{d\eta(l_0)}{dl} = 0,$$

$$(47) \quad f(l_0) = 0.$$

Poslední podmínku, která plyne z platnosti výrazu (25), si upravíme tak, aby se v ní objevovaly pouze derivace funkcí η a φ v bodě l_0 .

Ze vztahů (29) plyne pro funkci deplanace zakřiveného prutu výraz

$$(48) \quad f(l) = \frac{1}{v} \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} - \frac{M_k(l)}{GJ_c} \right].$$

Nyní zderivujeme rovnici (9) a za $M_y(l)$ do ní dosadíme vztah (14), dostáváme

$$\frac{d^2 M_k(l)}{dl^2} = \frac{1}{R} \frac{dM_y(l)}{dl} - \frac{dm_k(l)}{dl} = - \frac{EJ_y}{R} \left[\frac{d^3 \eta(l)}{dl^3} - \frac{1}{R} \frac{d\varphi(l)}{dl} \right] - \frac{dm_k(l)}{dl}.$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (31), můžeme z ní vyjádřit $M_k(l)$, platí

$$(49) \quad M_k(l) = - \left\{ \frac{EJ_y}{RGJ_c} \left[\frac{d^3 \eta(l)}{dl^3} - \frac{1}{R} \frac{d\varphi(l)}{dl} \right] + \frac{1}{GJ_c} \frac{dm_k(l)}{dl} + \frac{d^3 \varphi(l)}{dl^3} + \frac{1}{R} \frac{d^3 \eta(l)}{dl^3} \right\} \frac{EJ_u}{v} + GJ_k \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} \right].$$

Podmínku (47) v místě vetknutí l_0 můžeme s použitím vztahu (48), do kterého dosadíme výraz (49) psát ve tvaru

$$(50) \quad \frac{d^3 \varphi(l_0)}{dl^3} \frac{EJ_u}{GJ_c v} + \frac{d\varphi(l_0)}{dl} \left(1 - \frac{E^2 J_y J_u}{R^2 G^2 J_c^2 v} - \frac{J_k}{J_c} \right) + \frac{d^3 \eta(l_0)}{dl^3} \frac{EJ_u}{RGJ_c v} \left(1 + \frac{EJ_y}{GJ_c} \right) + \frac{dm_k(l_0)}{dl} \frac{EJ_u}{G^2 J_c^2 v} = 0.$$

Tím máme určeny všechny čtyři podmínky v místě vetknutí prutu v použitelné formě. Kdyby ve zvláštním případě místo vetknutí splývalo s počátkem délkových souřadnic (tj. $l_0 = 0$), potom z osmi „počátečních parametrů“ majících úlohu konstant v obecném řešení by tři vypadly, neboť podle podmínek (44), (45) a (46) platí

$$A_3 = A_4 = B_4 = 0.$$

Zbývajících pět konstant bychom určili z podmínky (50) a ze čtyř podmínek daných způsobem uložení druhého konce prutu.

b) Konec prutu l_0 je prostě podepřen. Nenastává zde žádné kroutivé pootočení průřezu, žádný průhyb, ohybový moment je zde nulový a též normální napětí od vázaného kroucení jsou v tomto průřezu l_0 nulová. Okrajové podmínky tedy jsou

$$(51) \quad \varphi(l_0) = 0,$$

$$(52) \quad \eta(l_0) = 0,$$

$$(53) \quad M_y(l_0) = 0,$$

$$(54) \quad \sigma_k(l_0, s) = 0.$$

Podmínky (53) a (54) si opět upravíme tak, aby se v nich vyskytovaly jen hodnoty a derivace funkcí η a φ v bodě l_0 . Podmínka (53) s přihlédnutím ke vztahu (14) má tvar

$$(55) \quad \frac{d^2\eta(l_0)}{dl^2} = 0.$$

Podmínka (54) podle rovnice (26) je

$$(56) \quad \frac{df(l_0)}{dl} = 0,$$

proto zderivujeme rovnici (48) a spojíme ji se vztahem (9). Tím v místě prostého uložení l_0 , kde nevzniká žádný ohybový moment, dostává podmínka (54) prakticky použitelný tvar

$$(57) \quad \frac{d^2\varphi(l_0)}{dl^2} = -\frac{m_k(l_0)}{GJ_c}.$$

Kdyby $l_0 = 0$, tj. kdyby počátek souřadnic l splýval s prostě podepřeným koncem prutu, platil by pro dva „počáteční parametry“ vztah

$$A_4 = B_4 = 0.$$

Ostatní by bylo možno určit z podmínek (55) a (57) a ze čtyř podmínek uložení na opačném konci prutu.

c) Konec prutu je zcela volný⁵⁾. Potom všechny síly v tomto bodě jsou nulové nebo vnější známé. Proto platí podmínky

$$(58) \quad T_z(l_0) = 0 \quad \text{resp.} \quad T_z(l_0) = \mathbf{T},$$

$$(59) \quad M_y(l_0) = 0 \quad \text{resp.} \quad M_y(l_0) = \mathbf{M},$$

$$(60) \quad M_k(l_0) = 0 \quad \text{resp.} \quad M_k(l_0) = \mathbf{M}_k,$$

$$(61) \quad \sigma_k(l_0, s) = 0.$$

Podmínku (58) upravíme pomocí vztahu (4) a (14), dostáváme

$$(62) \quad \frac{d^3\eta(l_0)}{dl^3} = \frac{1}{R} \frac{d\varphi(l_0)}{dl} \quad \text{resp.} \quad EJ_y \left[\frac{d^3\eta(l)}{dl^3} - \frac{1}{R} \frac{d\varphi(l)}{dl} \right] = \frac{\mathbf{M}_k}{R} - \mathbf{T}.$$

Podmínka (59) je velmi podobná podmínce (53), proto platí

$$\frac{d^2\eta(l_0)}{dl^2} = \frac{\varphi(l_0)}{R} \quad \text{resp.} \quad -EJ_y \left[\frac{d^2\eta(l_0)}{dl^2} - \frac{\varphi(l_0)}{R} \right] = \mathbf{M}.$$

Konečně podmínku (60) uplatníme psaním rovnice (49) v koncovém bodě l_0 a podmínka (61) je již zapsána rovnicí (57).

Uplatněním okrajových podmínek na obou koncích prutu plně určíme funkční průběhy svislého průhybu $\eta(l)$ a úhlu zkroucení $\varphi(l)$. Můžeme proto jejich dosazením do vztahů (14) a (49) určit velikosti ohybového $M_y(l)$ a kroutícího momentu $M_k(l)$.

⁵⁾ Je zřejmé, že tento případ, kdy je prut na jednom konci volný a na druhém vetknutý, je staticky určitý; proto jeho řešení můžeme provést snadněji jiným způsobem. Můžeme totiž rovnou určit průběh vnitřních sil v průřezech prutu $N(l)$, $T_y(l)$, $T_z(l)$, $M_y(l)$, $M_z(l)$ a $M_k(l)$. To nám dovolí ihned vyčíslit napětí od ohybu obvyklým způsobem z ohybových momentů $M_y(l)$. Též pro řešení vázaného kroucení můžeme použít známého průběhu kroutícího momentu $M_k(l)$ podél délky prutu. Rovnice pro funkci deplanace průřezu křivého prutu $f(l)$ má při platnosti předpokladu (25) tvar

$$\frac{d^2f(l)}{dl^2} - f(l) \frac{GJ_k}{EJ_u} \nu = -M_k(l) \frac{\nu}{EJ_u}$$

a je přímo řešitelná neboť právě $M_k(l)$ známe. Okrajové podmínky pro funkci $f(l)$ jsou podle rovnic (25) a (26):

v místě vetknutí l_{op} platí

$$f(l_{op}) = 0,$$

na volném konci l_0

$$\frac{df(l_0)}{dl} = 0.$$

Uplatněním těchto okrajových podmínek získáme průběh funkce deplanace $f(l)$ a podle vztahu (26) můžeme určit průběh normálních napětí $\sigma_k(l, s)$ vyvozených *vázaným kroucením*, popř. užitím vzorců (48) a (27) i rozložení smykových napětí při tomto vázaném kroucení.

Dosazením těchto momentů do rovnice (4) dostaneme funkční závislost pro svistou posouvající sílu $T_x(l)$. Pro zjištění velikost normálních napětí vyvozených vázaným kroucením nejprve dosadíme výraz (49) do (48) pro funkci deplance $f(l)$; potom takto upravený vztah (48) zderivujeme a dosadíme do rovnice (26). Průběh smykových napětí $\tau_k(l, s)$ vyvozených *vázaným kroucením* nám určuje vztah (27).

ZÁVĚR

Shrneme-li ukázané výsledky, vidíme, že celkové normální napětí v místě s průřezu l je dáno vztahem

$$\sigma(l, s) = \sigma_N(l) + \sigma_{M_y}(l, s) + \sigma_{M_x}(l, s) + \sigma_k(l, s).$$

První tři sčítance tohoto vztahu jsou podle obvyklých postupů odvozeny z normální síly $N(l)$ a ohybových momentů $M_y(l)$ a $M_x(l)$. Platí tedy známé vzorce

$$N(l) = \int_F \sigma_N(l) dF, \quad M_y(l) = - \int_F \sigma_{M_y}(l, s) z dF, \quad M_x(l) = - \int_F \sigma_{M_x}(l, s) y dF.$$

Provedeme-li integrace elementárních sil $\sigma_k(l, s) dF$ a jejich statických momentů k osám y a z , musíme dostat nulu, neboť, pokud se týká *celkové* ekvivalence sil v průřezu, jsou normální síla $N(l)$ a momenty $M_y(l)$ a $M_x(l)$ již zachyceny napětími $\sigma_N(l)$, $\sigma_{M_y}(l, s)$ a $\sigma_{M_x}(l, s)$. Můžeme tedy s přihlédnutím k rovnici (26) psát

$$\int_F {}^1u(s) dF = 0, \quad \int_F {}^1u(s) z dF = 0, \quad \int_F {}^1u(s) y dF = 0.$$

Těmto podmínkám je možno známým způsobem vyhovět tím, že průběh jednotkové deplance je hlavní, tj. pól použitý pro konstrukci polární plochy se ztotožňuje se středem smyku průřezu a zároveň počátek, od něhož počítáme funkci $\int_0^s ds/n(s)$ volíme tak, aby platilo

$$\int_F \left[\int_0^s \frac{ds}{n(s)} \right] dF = 0.$$

Složitější situace je u napětí smykových. Též tato napětí se skládají ze tří částí podle vztahu

$$(63) \quad \tau(l, s) = \tau_{T_y}(l, s) + \tau_{T_x}(l, s) + \tau_k(l, s),$$

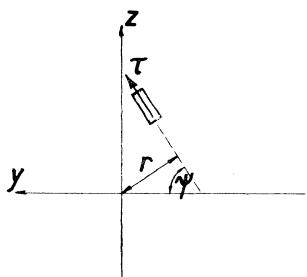
z nichž první dvě jsou celkově ekvivalentní s posouvajícími silami $T_y(l)$ a $T_x(l)$ a jsou z nich také známým způsobem vypočítávány. Třetí část těchto smykových napětí $\tau_k(l, s)$ je vyvolávána vázaným kroucením a pro zachování ekvivalence nemá mít v průřezu žádnou výslednici.

Aby tato podmínka byla splněna, musí s použitím rovnice (27) podle obr. 5 platit vztahy

$$f(l) \frac{\omega_0}{\oint \frac{ds}{n(s)}} \oint \cos \psi(s) ds - \left[f(l) - \frac{d\varphi(l)}{dl} - \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} \right] \oint n(s) r(s) \cos \psi(s) ds = 0,$$

$$f(l) \frac{\omega_0}{\oint \frac{ds}{n(s)}} \oint \sin \psi(s) ds - \left[f(l) - \frac{d\varphi(l)}{dl} - \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} \right] \oint n(s) r(s) \sin \psi(s) ds = 0.$$

Tyto rovnice mohou být splněny, jsou-li v každé z nich oba sčítance v jejich levých stranách nulové. Z toho plyne pro první sčítance podmínka



Obr. 5.

$$\oint \cos \psi(s) ds = \oint \sin \psi(s) ds = 0.$$

Tyto integrály mají význam průmětů prvků průřezu do osy y resp. z , a musí být u uzavřeného průřezu nulové; proto je této podmínce pro první sčítance vyhověno.

Člen

$$f(l) - \frac{d\varphi(l)}{dl} - \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl}$$

může však být nulový jen ve zvláštním případě a proto by měly být rovny nule integrály

$$(64) \quad \oint n(s) r(s) \cos \psi(s) ds,$$

$$\oint n(s) r(s) \sin \psi(s) ds.$$

Toto je splněno např. u průřezů se dvěma rovinami souměrnosti u kterých je průřez dělen na čtyři stejné kvadranty a proto každému prvku průřezu odpovídá po diagonále prvek antimetrický.

Pro obecný tvar průřezu však výrazy (64) nejsou nulové a proto smyková napětí $\tau_x(l, s)$ vyvozená vázaným kroucením mají při tomto způsobu výpočtu výslednice

$$(65) \quad \Delta T_y(l) = G \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} - f(l) \right] \oint n(s) r(s) \cos \psi(s) ds,$$

$$\Delta T_z(l) = G \left[\frac{d\varphi(l)}{dl} + \frac{1}{R} \frac{d\eta(l)}{dl} - f(l) \right] \oint n(s) r(s) \sin \psi(s) ds,$$

kteřé narušují ekvivalenci sil v průřezu. Z toho plyne, že pruty s průřezy, u kterých tato skutečnost nastává, jsou namáhány ještě přídatným namáháním a proto pro ně není předložený výpočet zcela přesný.

Výpočet v tomto případě bychom mohli zpřesnit tím, že bychom našli takové přídatné zatížení povrchu tenkostěnného prutu, které vyvolá pouze posouvající síly $\Delta T_y(l)$ a $\Delta T_z(l)$, ale nezpůsobí žádné normální síly, žádné ohybové ani kroutící momenty. Toto přídatné zatížení by mělo obecně šest složek: podélnou $\Delta q_x(l)$, příčné $\Delta q_y(l)$ a $\Delta q_z(l)$, vyvozovalo by spojitá ohybová zatížení $\Delta m_y(l)$ a $\Delta m_z(l)$ a spojitá kroutící zatížení $\Delta m_k(l)$. Jejich velikosti bychom určili z podmínek rovnováhy vyjmutého prvku prutu, ve kterých bychom s přihlédnutím ke vztahům (65) položili $N(l) \equiv M_y(l) \equiv M_z(l) \equiv M_k(l) \equiv 0$ a $T_y(l) \equiv \Delta T_y(l)$, $T_z(l) \equiv \Delta T_z(l)$; platí

$$(66) \quad \begin{aligned} \Delta q_x(l) &= -\frac{\Delta T_y(l)}{R}, \\ \Delta q_y(l) &= -\frac{d\Delta T_y(l)}{dl}, \\ \Delta q_z(l) &= -\frac{d\Delta T_z(l)}{dl}, \\ \Delta m_y(l) &= \Delta T_z(l), \\ \Delta m_z(l) &= \Delta T_y(l), \\ \Delta m_k(l) &= 0. \end{aligned}$$

Potom si můžeme představit, že v případě, který jsme řešili předloženým způsobem (za použití Umanského předpokladu (25)), je prut zatížen nejen daným vnějším zatížením, ale i tímto zatížením přídatným. Protože toto přídatné zatížení ve skutečnosti neexistuje, můžeme dále prut zatížit tímto přídatným zatížením vzatým záporně a jím vyvolaná napětí sečíst s napětími dříve určenými.

Sestavením vztahů (66) jsme si dokázali, že je možno najít taková zatížení, která vyvodí pouze posouvající síly $\Delta T_y(l)$ a $\Delta T_z(l)$. Z toho plyne, že při zatěžování těmito zatíženími působícími v opačném směru vzniknou v průřezech prutu opět pouze posouvající síly $-\Delta T_y(l)$ a $-\Delta T_z(l)$, jimiž vyvolaná napětí vykompenzují výslednice nezachycených napětí $\Delta T_y(l)$ a $\Delta T_z(l)$ daných vztahy (65).

Proto touto cestou, která je přibližná, můžeme řešit vytčenou úlohu i pro tenkostěnné pruty uzavřeného průřezu obecného tvaru.

Další přibližnost podané metody spočívá ve volbě polohy střednice prutu. Zatímco ohybové momenty vztahujeme k hlavním centrálním osám setrvačnosti, kroutící moment je počítán ke středům kroucení jednotlivých průřezů. Těžiště a středy kroucení leží na kružnicích s poloměrem obecně různým, v našem pojednání však byl tento poloměr pro obě křivky ztotožněn a značen R . Tato chyba se zmenšuje s klesající křivostí prutu a u prakticky prováděných konstrukcí je ji možno zanedbat.

Literatura

- [1] Janatka J.: Přímé tenkostěnné nosníky — teorie výpočtu. SNTL, Praha 1961.
- [2] Panc V.: Statika tenkostěnných prutů a konstrukcí. ČSAV, Praha 1959.
- [3] Rektorys K. a kol.: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 1963.
- [4] Ромаповский П. И.: Преобразование Лапласа. Физматгиз, Москва 1961.
- [5] Власов В. З.: Тонкостенные упругие стержни. Физматгиз, Москва 1959.

Резюме

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ ЖЕСТКОГО НЕДЕФОРМИРУЕМОГО ЗАМКНУТОГО СЕЧЕНИЯ

ВЛАДИМИР КРЖИСТЕК (VLADIMÍR KRŽISTEK)

Для криволинейного в горизонтальной проекции стержня является типичным то обстоятельство, что отдельные виды нагрузок нельзя отличить. Неотделимо связаны друг с другом, во-первых, продольные деформации и изгиб в плоскости стержня и, во-вторых, изгиб перпендикулярно на плоскость стержня и стесненное кручение.

Первый случай — продольные деформации и изгиб в плоскости стержня — приводит нас к двум дифференциальным уравнениям, общее решение которых произведено, и показан способ, как определить постоянные, используя краевые условия.

Второй случай — изгиб перпендикулярно на плоскость стержня и стесненное кручение — сводится к решению системы двух линейных дифференциальных уравнений, решенных при помощи преобразования Лапласа. Подробно здесь изложены краевые условия при различных способах укладки концов стержня и способ их применения для совершенного определения искомых функций.

Summary

THIN-WALLED CURVED BARS WITH RIGID CLOSED SECTION

VLADIMÍR KRŽISTEK

For a bar with curved plan it is characteristic that it is not possible to separate various kinds of stresses. Such a correlations exist between longitudinal deformation and the bending in the plane of the bar and between the bending normal to the plane of the bar and the bounded torsion.

In the first case of longitudinal deformation and the bending in the plane of the bar we obtain two differential equations. Their general solution is given together with a method for determination of constants from boundary conditions.

In the second case of the bending normal to the plane of the bar and the bounded torsion it is necessary to solve two linear differential equations. This is done through the aid of Laplace transform. Detailed discussion of boundary conditions for different types of bedding of bar's ends is given together with the methods of complete determination of the sought-for functions.

Adresa autora: Ing. Vladimír Křístek, Katedra betonových konstrukcí a mostů ČVUT, Žitkova 4, Praha 6.