

Aplikace matematiky

Stanislav Vojtášek

Multivibrator s tunelovou diodou

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 4, 268–277

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103101>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MULTIVIBRÁTOR S TUNELOVOU DIODOU

STANISLAV VOJTÁŠEK

(Došlo dne 11. listopadu 1966.)

1. ÚVOD

V současné technické praxi zaujímá důležité místo generátor nesinusových kmitů – tzv. multivibrátor, u něhož je aktivní nelineární prvek zastoupen tunelovou diodou. Ukazuje se, že můžeme nahradit s dostatečnou přesností tunelovou diodu paralelní kombinací nelineárního odporu a nelineární kapacity polovodičového přechodu. Tato kapacita bývá u některých typů tunelových diod velmi malá (řádu jednotek pF), takže ji kvůli zjednodušení při řešení některých obvodů zanedbáváme. Matematická teorie však ukazuje, že takové zanedbání může změnit v některých případech charakteristické vlastnosti zkoumaného zapojení.

V tomto článku ukážeme rozbor zapojení jednoduchého multivibrátoru ze stanoviska teorie nelineárních kmitů právě s přihlédnutím k vlivu kapacity přechodu tunelové diody. Dodejme, že existuje ještě tzv. difúzní složka kapacity přechodu tunelové diody [1]. Tato se však v našem případě neuplatní zejména vzhledem k uvažované pracovní oblasti multivibrátoru.

2. KLIDOVÝ STAV A JEHO STABILITA

Uvažujme jednoduché zapojení multivibrátoru podle obr. 1. Odporů R_1 a R_2 vytvářejí pro tunelovou diodu TD vhodné předpětí pracovního bodu. Indukčnost L , kterou považujeme za ideální, tvoří s tunelovou diodou vlastní kmitavý obvod. Kapacita (nábojová) $C_T(u)$ přechodu tunelové diody je vázána s její tzv. diferenciální kapacitou $C_d(u)$ definičním vztahem

$$C_d(u) = \frac{d(C_T u)}{du}.$$

Přítom je C_T dána klasickým vztahem

$$C_T(u) = \frac{q}{u},$$

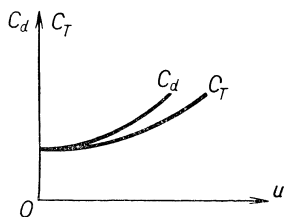
kde q značí náboj soustředěný v C_T , u je pak napětí na C_T .

V praxi neumíme dostupným způsobem změřit závislost C_T na u . Dovedeme však změřit zmíněnou diferenciální kapacitu C_d jako funkci u např. vhodnými měřicími mosty na střídavý proud.

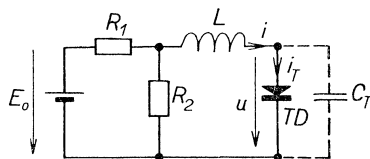
Při řešení nelineárních obvodů jeví se někdy výhodným sestavovat příslušné diferenciální rovnice s kapacitou C_T . Je proto důležité znát způsob, kterým se převede naměřená závislost $C_d = C_d(u)$ na závislost $C_T = C_T(u)$. Integrujeme-li (1), dostaneme

$$C_T(u) - 0 \cdot C_T(0) = \int_0^u C_d(u) du.$$

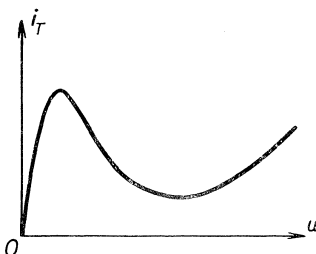
Zmíněnou integraci lze provést buď přímo pomocí vhodné aproximace změřené závislosti $C_d = C_d(u)$, anebo graficky. Na obr. 2 jsou naznačeny kvalitativně obě závislosti.



Obr. 2. Závislosti nábojové kapacity C_T a diferenciální kapacity C_d na napětí u .



Obr. 1. Zapojení multivibrátoru.



Obr. 3. Statická charakteristika tunelové diody.

Nelineární odpor přechodu tunelové diody je představován statickou charakteristikou (obr. 3) danou rovnicí

$$(2) \quad i_T = f(u).$$

Zapojení na obr. 1 lze popsat s použitím (2) následující soustavou diferenciálních rovnic

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{i}{L} - \frac{u}{L} + \frac{E_0}{LR_1} \varrho, \\ C_T \frac{du}{dt} &= i - f(u), \end{aligned}$$

kde

$$\varrho = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Položme $u = x_1$, $i = x_2$ a přepíšme soustavu (3) do tvaru

$$(4) \quad C_T \frac{dx_1}{dt} = -f(x_1) + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_1}{L} - \frac{\varrho}{L} x_2 + \frac{E_0}{LR_1} \varrho.$$

Klidový stav je dán souřadnicemi x_{10} , x_{20} , které se vypočtou řešením těchto rovnic

$$(5) \quad -f(x_1) + x_2 = 0,$$

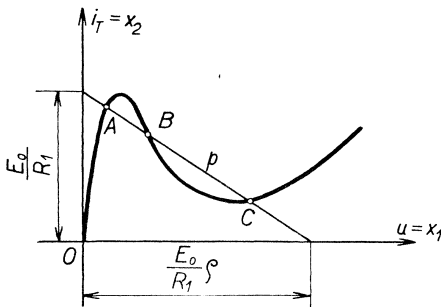
$$-\frac{x_1}{L} - \frac{\varrho}{L} x_2 + \frac{E_0}{LR_1} \varrho = 0.$$

Souřadnice x_{10} a x_{20} vzniknou protnutím statické charakteristiky tunelové diody přímkou p podle obr. 4. Přímka je dána druhou rovnicí v soustavě (5). Obecně mohou vzniknout až tři klidové stavy označené podle obr. 4 písmeny A, B, C. Průsečík C může ležet i v oblasti „záporného“ odporu statické charakteristiky tak jako průsečík B, popř. mohou ležet v této oblasti všechny tři průsečíky.

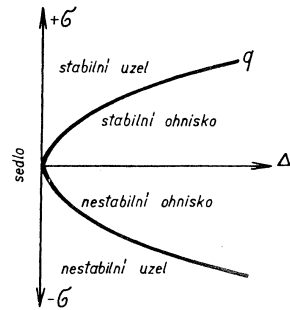
Zkoumejme nyní stabilitu průsečíků A, B, C s tím, že si budeme všimnout vlivu kapacity C_T . Ukáže se totiž, že C_T může ovlivnit stabilitu, takže ji nemůžeme vždy zanedbat, i když dosahuje malých hodnot.

Charakteristická rovnice linearizované soustavy odvozené ze soustavy (4) je

$$(6) \quad \lambda^2 + \lambda \left(\frac{f'}{C_T^0} + \frac{\varrho}{L} \right) + \frac{1}{LC_T^0} (1 + \varrho f') = 0.$$



Obr. 4. Průsečíky přímky p se statickou charakteristikou.



Obr. 5. Oblasti stabilních a nestabilních klidových stavů.

Přitom f' značí derivaci $f(x_1)$ podle x_1 v bodě x_{10} a C_T^0 značí hodnotu $C_T(x_1)$ v totéž bodě.

Pišme zkráceně (6) ve tvaru

$$(7) \quad \lambda^2 + \lambda\sigma + \Delta = 0,$$

kde

$$(8) \quad \sigma = \frac{f'}{C_T^0} + \frac{\varrho}{L},$$

$$\Delta = \frac{1}{LC_T^0} (1 + \varrho f').$$

Rovnice (7) nám umožní názorně posoudit druh singulárního bodu příslušného zkoumanému klidovému stavu, jak také vyplývá z obr. 5. Hraniční parabola q , ležící v pravé polorovině souřadného systému (σ, Δ) , má zřejmě rovnici $\sigma^2 = 4\Delta$, což plyne přímo z (7).

Pro další rozbor budeme potřebovat ještě mezní hodnoty kořenů λ_1 a λ_2 pro $C_T^0 \rightarrow 0$ a charakteristickou rovnici soustavy pro $C_T^0 = 0$. Mezní hodnoty obou kořenů odvodíme např. tak, že vyřešíme nejprve rovnici (6) a rozvedeme odmocninu, která se objeví na pravé straně ve výrazech pro oba kořeny, v řadu. Limitním přechodem pro $C_T^0 \rightarrow 0$ dostaneme

$$(9) \quad \lim_{C_T^0 \rightarrow 0} \lambda_1 = -\frac{1}{f'L} - \frac{\varrho}{L},$$

$$\lim_{C_T^0 \rightarrow 0} \lambda_2 = -\infty \quad (\text{pro } f' > 0),$$

$$\lim_{C_T^0 \rightarrow 0} \lambda_2 = +\infty \quad (\text{pro } f' < 0).$$

Pro $C_T = 0$, a tedy i pro $C_T^0 = 0$, dostaneme namísto (6)

$$(10) \quad \lambda f' + \frac{1 + f'\varrho}{L} = 0.$$

Jediný kořen λ_1 pak bude

$$(11) \quad \lambda_1 = -\frac{1}{f'L} - \frac{\varrho}{L}.$$

Vidíme, že kořen λ_1 pro $C_T^0 = 0$ je stejný jako $\lim \lambda_1$ pro $C_T^0 \rightarrow 0$, což se dalo očekávat. Všimněme si nyní jednotlivých klidových stavů A, B, C podle obr. 4.

Stav A

V klidovém stavu A je $f' > 0$. Na základě obr. 5 a rovnic (8) vidíme, že je to při $C_T^0 \neq 0$ vždy stabilní stav, jemuž přísluší singulární bod buď typu ohniska, anebo uzlu. A to podle velikosti σ a Δ . Na skutečnosti nic nemění možné případy $f' > 1/\varrho$, anebo $f' < 1/\varrho$. V případě, že zanedbáme C_T^0 , zůstane stav A stabilním, jak plyne z rovnice (11). Pro velmi malé hodnoty C_T^0 , přesněji: pro $C_T^0 \rightarrow 0$ budou oba kořeny λ_1 a λ_2 záporné, jak je vidět z rovnic (9). Nemění se tedy stabilita zkoumaného klidového stavu. Příklad, kdy $f' < 0$, bude rozebrán u stavu C.

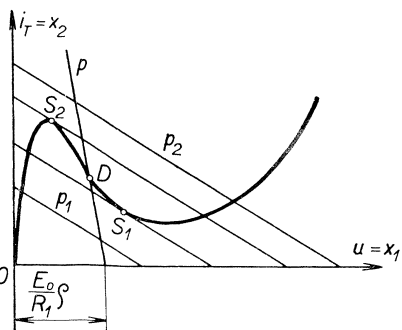
Stav B

V klidovém stavu B je $f' < 0$ a zřejmě také $|f'| > 1/\varrho$, takže $\Delta = 1 + f'\varrho < 0$. Podle obr. 5 je tu zřejmě nestabilní klidový stav typu sedla (pro $C_T^0 \neq 0$). Zanedbáme-li C_T^0 , je však stav B stabilní. Uvažujeme-li však velmi malou hodnotu C_T^0 , tzn. že $C_T^0 \rightarrow 0$, bude stav B nestabilní. A to vlivem λ_2 (v limitním případě), i když $\lim \lambda_1 \geq 0$ pro $C_T^0 \rightarrow 0$. Naruší tedy nenulová (velmi malá) hodnota C_T^0 stabilitu stavu B (vzhledem k případu $C_T = 0$).

Stav C

Zde zkoumejme dva různé případy.

1) Příklad $f' < 0$ (není zachycen na obr. 4, je však na obr. 6). Potom je také $|f'| < 1/\varrho$. Je tedy $1 + f'\varrho > 0$ a také $\Delta > 0$. Bude tento klidový stav (pro $C_T^0 \neq 0$)



Obr. 6. Polohy přímky p vzhledem ke statické charakteristice.

buď stabilní, nebo nestabilní, a to podle znaménka σ . Tomuto stavu přísluší zřejmě buď ohnisko, anebo uzel. Zanedbáme-li C_T^0 , bude stav nestabilní. Pro velmi malé hodnoty C_T^0 , tzn. pro $C_T^0 \rightarrow 0$, bude stav nestabilní, jak plyne přímo z limitních hodnot kořenů λ_1 a λ_2 pro $C_T^0 \rightarrow 0$. Vidíme, že nemůže velmi malá hodnota C_T^0 ovlivnit stabilitu klidového stavu. Tato skutečnost má velký význam pro praxi.

2) Příklad $f' > 0$ (viz obr. 4). V tomto případě je klidový stav (pro $C_T^0 \neq 0$) vždy stabilní, tak jako stav A. Přísluší mu singulární bod buď typu ohniska, anebo uzlu (viz obr. 5). Pro $C_T^0 = 0$ zůstane stav sta-

bilním. Pro velmi malé hodnoty C_T^0 , tzn. pro $C_T^0 \rightarrow 0$ stabilita stavu se nemění. Nenulová, avšak velmi malá kapacita neovlivní tedy stabilitu klidového stavu (vzhledem k případu $C_T = 0$).

Z výše uvedeného vyplývá, že zanedbání parazitního prvku, zde C_T^0 , může někdy vést k chybným výsledkům při posuzování stability klidového stavu. V praxi se často stává, že použijeme zjednodušeného náhradního obvodu určitého (nelineárního) prvku. Zanedbáme-li při tom některé, zejména malé parazitní prvky takového obvodu, můžeme se někdy dopustit zásadních omylů. Je třeba být opatrným a zkoumat případ od případu.

Obraťme nyní pozornost k zvláštnímu případu polohy přímky p , kdy tato protíná statickou charakteristiku jen v jednom bodě D v oblasti „záporného“ odporu, a to způsobem, jak je naznačeno na obr. 6. Při tom je zřejmě $f' < 0$, $|f'| < 1/\varrho$. V praxi se totiž doporučuje volit takovou velikost ϱ , tj. hodnoty odporů R_1 a R_2 při daném napájecím napětí E_0 , že se nastaví právě tento stav. Jak víme, přísluší stavu D buď ohnisko, anebo uzel (stabilní, popř. nestabilní). Chceme-li, aby zkoumaný obvod generoval nesinusové kmity, tj. aby pracoval jako multivibrátor, musí být příslušný singulární bod typu nestabilního uzlu.

3. PERIODA KMITŮ V MEZNÍM PŘÍPADĚ

Aby příslušel stavu D nestabilní uzel, musí být splněny současně dvě podmínky (viz obr. 5)

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma^2 &> 4\Delta, \\ \sigma &< 0. \end{aligned}$$

Zaměříme se dále na rozbor mezního cyklu takového případu, kdy v soustavě (4) kapacita $C_T(x_1)$ se stává libovolně malou. A to všude v jistém intervalu proměnné x_1 v němž probíhají předpokládané změny x_1 , a který zahrnuje bod D . Označme tento interval jako I .

Přepíšme nejprve soustavu (4) na tvar jediné autonomní diferenciální rovnice

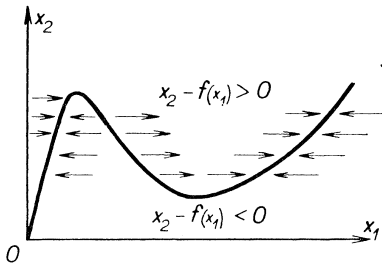
$$(13) \quad C_T(x_1) \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2 - f(x_1)}{\frac{E_0}{R_1} \varrho - x_1 - \varrho x_2} L.$$

K rozboru výše zmíněného mezního případu můžeme za jistých zjednodušujících předpokladů použít teorie tzv. diferenciální rovnice s malým parametrem u vyšších derivací [2]. Představme si proto interval I rozdělen na malé úseky a v každém tomto úseku považujme $C_T(x_1)$ za konstantu. A nyní zkoumejme, co se stane (v jednotlivých úsecích), bude-li tato „konstanta“, která přebírá úlohu onoho malého parametru, klesat k nule. Označme nadále tuto operaci zkráceně symbolem $C_T(x_1)_I \rightarrow 0$.

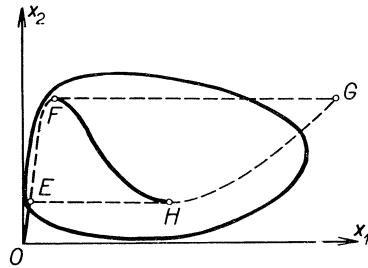
Pro $C_T(x_1) = 0$, $x_1 \in I$ dostaneme tzv. degenerované řešení (kterých může být obecně více) ve tvaru

$$(14) \quad x_2 - f(x_1) = 0.$$

V tomto případě je to řešení jediné, neboť je dáno průběhem statické charakteristiky tunelové diody. Pro $C_T(x_1)_1 \rightarrow 0$ poroste zřejmě všude v l derivace dx_1/dt nadevšecky meze (v absolutní hodnotě). Její znaménko je dáno znaménkem rozdílu $x_2 - f(x_1)$. Směrové pole fázových trajektorií bude vyznačeno šipkami podle obr. 7. Fázové trajektorie se pak budou při operaci $C_T(x_1)_1 \rightarrow 0$ přimykát k degenerovanému řešení (14) v oblasti, kde je $df/dx_2 > 0$, tím těsněji, čím bude $C_T(x_1)$ blíže nule, když $x_1 \in l$. Mezní cyklus, pokud existuje, je naznačen silnou čarou na obr. 8, a to pro pří-



Obr. 7. Směrové pole v okolí statické charakteristiky.



Obr. 8. Mezní cykly pro případy $C_T(x_1)_1 \neq 0$ a $C_T(x_1)_1 \rightarrow 0$.

pad, kdy $C_T(x_1)$ dosahuje pro $x_1 \in l$ sice malých, avšak nenulových hodnot. V takovém případě pak nabývá derivace dx_1/dt všude na mezním cyklu konečných hodnot (co do absolutní hodnoty). Viz (4). V mezním případě, když $C_T(x_1)_1 \rightarrow 0$, vzniká tzv. „nespojité mezní cyklus“ skládající se zprv ze dvou úseků EF a GH , které jsou částmi fázových trajektorií a jsou řešením dané soustavy. Na těchto úsecích je všude derivace dx_1/dt konečná (co do absolutní hodnoty). Zadruhé se pak zmíněný nespojitý mezní cyklus skládá ze dvou přímkových úseků FG a HE , rovnoběžných s osou x_1 , které nepatří k fázovým trajektoriím, neboť na nich roste derivace dx_1/dt nadevšecky meze. Tyto úseky patří k tzv. „nekonečně rychlým“ přeskokům. Přímkové úseky se dotýkají charakteristiky v bodech F a H . Tohoto mezního případu, naznačeného na obr. 8 čárkovaně, užíváme obvykle při praktickém řešení multivibrátoru.

Jak lze tušit, může být singulární bod typu nestabilního ohniska zdrojem kmitů blízkých sinusovým. Je třeba upozornit na to, že i sedlo může být obecně zdrojem periodických kmitů, jejichž fázový obraz je složen zčásti z fázových trajektorií, zčásti z nekonečně rychlých přeskoků, které k fázovým trajektoriím nepatří. Vznikne tak již zmíněný nespojitý mezní cyklus. Naproti tomu uzel (nestabilní) může být zdrojem periodických (nesinusových) kmitů, jejichž fázový obraz je tvořen mezním cyklem (spojitým). Teprve v mezním případě, a za jistých podmínek, může fázový obraz nabýt (kvalitativně) týchž vlastností jako v případě sedla. Podrobný rozbor se vymyká z rámce této práce. Čtenář se dozví další podrobnosti např. v [3]. My se zde v dalším spokojíme se stručným rozbohem pouze našeho případu, kdy singulární bod je typem nestabilního uzlu.

Z výše uvedeného vyplývá, že nemusíme v takovémto jednoduchém případě používat přesných metod pro výpočet periody. V praxi pak řešení dále zjednodušíme tak, že statickou charakteristiku aproximujeme po částech lineární funkcí.

Při sestavení nespojitého mezního cyklu stačí zřejmě aproximovat úseky EF a GH , tak jak je naznačeno na obr. 9. Na témže obrázku je vyznačen silnou čarou předpokládaný nespojitý mezní cyklus $EFGH$.

Je-li mezní cyklus znám, pak spočteme snadno periodu kmitů T . Tato je dána součtem doby T_1 , která představuje dobu pohybu mezi body E a F , a doby T_2 představující dobu mezi body G a H . Doby pohybu po úsečkách FG a HE jsou ovšem rovny nule jak také vyplývá z první diferenciální rovnice soustavy (4) pro $C_T(x_1) \rightarrow 0$. V praxi se nedopustíme takovýmto zjednodušením velké chyby, neboť časy nekonečně rychlých přeskoků bývají řádově tisíckrát menší než časy T_1 a T_2 .

V tomto zjednodušeném případě rozumíme obvykle pod pojmem „řešení multivibrátoru“ výpočet závislostí, z nichž lze určit neznámé doby T_1 a T_2 . Přitom postupujeme tak, že určíme nejprve obecné řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu, odvozené ze soustavy (4) pro $C_T(x_1) = 0$. Označíme-li přímkou jdoucí body E a F zjednodušeně pouze rovnicí

$$x_2 = k_1 x_1,$$

dostaneme příslušnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$(15) \quad Lk_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1(1 + k_1 \varrho) = E_0 \frac{\varrho}{R_1}.$$

Použijeme-li pak napětí U_1 a U_2 podle obr. 9, odvodíme snadno vzorec pro čas T_1

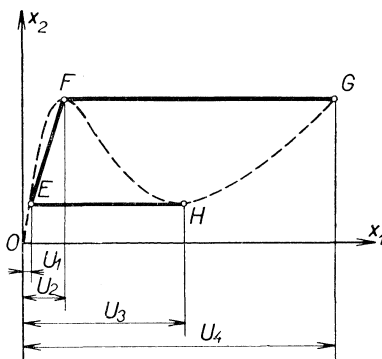
$$(16) \quad T_1 = - \frac{Lk_1}{1 + \varrho k_1} \ln \frac{(1 + \varrho k_1) U_2 - E_0 \frac{\varrho}{R_1}}{(1 + \varrho k_1) U_1 - E_0 \frac{\varrho}{R_1}}.$$

Označíme-li přímkou jdoucí body H a G rovnicí

$$x_2 = k_2 x_1 + q,$$

dostaneme příslušnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$(17) \quad Lk_2 \frac{dx_1}{dt} + x_1(1 + \varrho k_2) = E_0 \frac{\varrho}{R_1} - \varrho q.$$



Obr. 9. Mezní cyklus pro $C_T(x_1)_1 \rightarrow 0$ a při použití po částech lineární aproximace.

С использованием напряжений U_3 и U_4 по рис. 9 можно вывести формулу для T_2

$$(18) \quad T_2 = - \frac{Lk_2}{1 + \varrho k_2} \ln \frac{(1 + \varrho k_2) U_3 + q\varrho - E_0 \frac{\varrho}{R_1}}{(1 + \varrho k_2) U_4 + q\varrho - E_0 \frac{\varrho}{R_1}}.$$

Как пример приведем расчет периода $T = T_1 + T_2$ для следующих значений: $L = 4,9 \cdot 10^{-4}$ Г, $R_1 = 250 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $E_0 = 4,5$ В, $k_1 = 5,6 \cdot 10^{-2}$ А/В, $k_2 = 1,61 \cdot 10^{-2}$ А/В, $q = -5,02 \cdot 10^{-3}$ А, $U_1 = 5,4 \cdot 10^{-3}$ В, $U_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ В, $U_3 = 0,33$ В, $U_4 = 0,485$ В. По формулам (16) и (18) получим $T_1 = 11,03 \mu\text{s}$, $T_2 = 13,92 \mu\text{s}$, также $T = 24,95 \mu\text{s}$.

Литература

- [1] Берман Л. С.: Нелинейная полупроводниковая емкость. Москва 1963.
 [2] Эльсгольц Л. Э.: Качественные методы в математическом анализе. Москва 1955.
 [3] Андронов А. А. - Витт А. А. - Хайкин С. Е.: Теория колебаний. Москва 1959.

Резюме

МУЛЬТИВИБРАТОР С ТУННельНЫМ ДИОДОМ

СТАНИСЛАВ ВОЙТАШЕК (STANISLAV VOJTÁŠEK)

В статье решается с точки зрения качества нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее простой мультивибратор с туннельным диодом. Туннельный диод заменен параллельным соединением нелинейного сопротивления и нелинейной емкости полупроводникового перехода. Подробно анализируется влияние этой нелинейной емкости на устойчивость равновесных состояний и на предельный цикл в фазовой плоскости. Показано, что в некоторых случаях нельзя пренебрегать емкостью полупроводникового перехода используемого туннельного диода при решении рассматриваемого типа мультивибратора. Однако, теоретические рассуждения остаются в силе и в более широком смысле и имеют свое значение и на практике. Анализ предельного цикла дополнен иллюстрацией практического вычисления.

Summary

TUNNEL-DIODE MULTIVIBRATOR

STANISLAV VOJTÁŠEK

In the paper a nonlinear differential equation describing a simple tunnel-diode multivibrator is solved from a qualitative point of view. A parallel connection of a nonlinear resistance and a nonlinear capacity of the semiconductor junction is substituted for the tunnel diode. The influence of the nonlinear capacity on the stability of equilibrium states and the limit cycle in the phase plane is thoroughly discussed. It is shown that in certain cases it is not possible to neglect the capacity of the semiconductor junction when solving the given type of multivibrator. The theoretical considerations are of a more general validity and are of importance especially for practice. The discussion of the limit cycle is completed by an illustrative practical example.

Adresa autora: Ing. Stanislav Vojtášek C.Sc., Ústav výpočtové techniky ČSAV-ČVUT, Horská 3, Praha 2.