

# Aplikace matematiky

---

George F. Carrier; Richard Courant; Paul Rosenbloom; Chen Ning Yang; Herbert J. Greenberg

Různé. O postavení matematiky. Co potřebuje aplikovaná matematika ve výzkumu a systému výchovy

*Aplikace matematiky*, Vol. 12 (1967), No. 1, 54–71

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103067>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## R Ů Ž N Ě

## O POSTAVENÍ MATEMATIKY

Předkládáme čtenáři záznam diskuse o aplikované matematice, uspořádané na shromáždění SIAMu (Society for Industrial and Applied Mathematics) 4. listopadu 1961 ve Washingtonu.\*) Mnohé problémy, o nichž významní američtí vědci hovoří, jistě nejsou specifické jen pro určité místo a dobu a nebudou tedy snad bez zajímavosti i pro naše čtenáře.

CO POTŘEBUJE APLIKOVANÁ MATEMATIKA VE VÝZKUMU  
A SYSTÉMU VÝCHOVY  
SYMPOSIUM

GEORGE F. CARRIER<sup>1</sup>), R. COURANT<sup>2</sup>), PAUL ROSENBLOOM<sup>3</sup>), C. N. YANG<sup>4</sup>),  
H. J. GREENBERG (předseda)<sup>5</sup>)

DR. H. J. GREENBERG. Dnes budeme hovořit o aplikované matematice a o tom, co je potřeba udělat ve výzkumu a systému výchovy. Je zřejmé, že systém výchovy a vyučování prodělává revoluci. Ale i kdyby aplikovaná matematika, tak jak je dnes vyučována a procvičována, vyhovovala současným potřebám, bylo by velmi pravděpodobně zapotřebí důkladné revize k tomu, aby mohla vyhovovat i v příštím desetiletí. Dnes se však mnohým lidem zdá, že aplikovaná matematika je něco jako nevlastní dítě, mohl bych dokonce říci vzdálené nevlastní dítě, na jehož výtvoř pohlížejí se stejným nezájmem jak matematikové, tak fyzikové a inženýři. Stav aplikované matematiky ve Spojených státech, dobrý či špatný, vznikl jistě spíše historickou náhodnou nepravidelností než z úmyslného záměru. Vezmeme-li na vědomí současnou situaci a existující požadavky, mohl by doufejme vzniknout jakýsi plán pro budoucnost aplikované matematiky. Dnes zde máme vynikající čtveřici významných vědců a pedagogických pracovníků, jejichž spojené zájmy a zkušenosti zahrnují mnoho z aplikované matematiky. Požádali jsme je, aby vyložili své názory na tyto věci co možná nejupřímněji, neboť v kritické době, v níž žijeme, je otevřenost jistě vítána. Jsem si jist, že to co řeknou, bude pečlivě uváženo auditoriem mnohem širším než je dnes zde. Dnešní program začne asi dvacetiminutovými vystoupeními každého

\*) © Society for Industrial and Applied Mathematics, 1962. Veškerá práva vyhrazena.

Přeloženo ze SIAM Rev., 4 (1962), 297–320 a otištěno s laskavým svolením Publications Committee.

<sup>1</sup>) Department of Mechanical Engineering, Harvard University, Cambridge, Mass.

<sup>2</sup>) New York University and the AEC Computing Facility, New York, N. Y.

<sup>3</sup>) Institute of Technology, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

<sup>4</sup>) Institute for Advanced Study, Princeton, N. J.

<sup>5</sup>) Thomas J. Watson Research Center, International Business Machines Corporation, Yorktown Heights, N. Y.

ze čtyř řečníků. Poté bude diskuse u kulatého stolu. Ačkoliv se posluchači nebudou moci připojit k diskusi na pódiu, přivítáme jejich otázky a podle možnosti je zařadíme ke konci času, vymezeného pro diskusi. Nemohu zaručit, že se na všechny otázky dostane, ale jistě se pokusíme zařadit do diskuse podle časových možností otázky, týkající se problémů, jež by jinak byly opomenuty.

Rád bych nyní představil našeho prvního řečníka, kterým bude profesor Richard Courant z Newyorské university. Profesor Courant přináší na toto pódium moudrost nahromaděnou několika generacemi největších světových matematických myslitelů, mezi něž patří. Jeho zkušenosti se prolínají s tradicemi dvou velkých matematických institucí, Göttingenské university a dále ústavu na Newyorské universitě, který v současné době nese jeho jméno. S velkým potěšením představuji profesora Couranta.

PROFESOR R. COURANT. Mnozí z vás viděli v posledním čísle časopisu *American Mathem. Monthly*, October 1961, článek, který je zvlášť důležitý pro naši diskusi. Článek, napsaný profesorem Marshalllem Stonem se zabývá „revolucí v matematice“. Tvrdí se v něm, že žijeme v době převratných úspěchů matematiky, jež předčí vše, čeho bylo dosaženo od starověku až po dnešní dny. Triumf „moderní matematiky“ je připisován jednomu základnímu principu: abstrakci a uvědomělému oddělení matematiky od fyzikálních a jiných příměsí. Tudíž matematické myšlení, zbavené přítěží, se může vznést k výšinám, z nichž je možné pozorovat a dokonale ovládat přizemní realitu.

Nechci překrucovat a podceňovat tvrzení a pedagogické závěry tohoto význačného autora. Avšak jako paušální konstantování, jako pokus položit základy pro další směr výzkumu a především výchovy se článek zdá být výstražným signálem a jistě vyžaduje doplnění. Nebezpečí nadšeného abstrakcionismu je spojeno se skutečností, že tato móda nehlásá vyložené nesmysly, ale pouze poloviční pravdy. Jednostranným polopravdám nesmí být dovoleno ovlivňovat životně důležité aspekty rovnováhy pravdy celé.

Je jisté, že matematické myšlení pracuje s abstrakcí; matematické ideje vyžadují abstraktní progresivní propracovávání, axiomatizaci a vytříbenost. Je také pravda, že dosažení vyšší úrovně pochopení struktury studovaných jevů umožňuje důležitá zjednodušení a též, což bylo zřetelné po dlouhou dobu zdůrazňováno, že principiální obtíže v matematice mizí, jakmile přestaneme metafyzicky považovat matematické pojmy za popisy nějak individuálně existující reality.

Životní síla naší vědy stoupá od jejích kořenů, spouštějících se v nekonečném rozvětvení hluboko do reality, ať již je jí mechanika, fyzika, biologické formy, ekonomické činnosti, geodezie či další obory. Abstrakce a zobecňování není pro matematiku životně důležitější než individualita fenoménu a především než induktivní intuice. Pouze vzájemná souhra těchto sil a jejich syntéza mohou zachránit matematiku a zabránit její přeměně v mrtvou kostru. Musíme bojovat proti pokusům omezit vývoj jednostranně pouze na jediný z obou protikladů.

Musíme bojovat proti tomu starému blasfemickému nesmyslu, že prapůvodním posláním matematické vědy je „oslava lidského ducha“. Matematika nesmí být dovoleno rozštěpit se na „čistou“ a „aplikovanou“. Musí zůstat silným, jednotným, životaplným proudem v širokém toku vědy a nesmí se nikdy stát malým potůčkem, který může kdykoli zmizet v písku.

Tendence k rozdělení jsou matematice vlastní a ukazují na stálepřítomné nebezpečí. Fanatikové obhajující izolacionistický abstrakcionismus jsou vskutku nebezpeční. Ale stejně nebezpeční jsou i konzervativní reakcionáři, kteří nerozlišují mezi falešnými záminkami a odevzdaným snažením.

Snad nejdůležitější je nebezpečí jednostrannosti v oblasti vyučování. Zasvěcená výchova učitelů se širokým rozhledem je více než kdy jindy rozhodným požadavkem naší doby. Je pravda, že studijní programy mají svůj význam, ale volání po změně nesmí zakrýt rozměňování podstaty, propagandu pro neinspirující abstrakci, izolaci matematiky i ústup od ideálů sokratovské metody ve prospěch katecheticko-dogmatických metod.

Naštěstí se zdá, že některé z nejkrajnějších návrhů pokud jde o matematiku ve škole ztrácejí

nyňi na síle. V každém případě by těsné spojení mezi matematikou, mechanikou, fyzikou a dalšími vědami, považované za základní princip a ochotně přijaté nastupující generací učitelů, bylo bezpochyby pocítováno jako radikální a životně důležitý lék na mnohé nemoci našich škol a universit. Čestnou povinností každého vědce je být takovéto reformě nápomocen.

**DR. GREENBERG.** Druhým naším řečníkem bude George Carrier, profesor oboru Mechanical Engineering na Harvardské universitě. Profesor Carrier je člověk extrémně vzácného založení. Je to matematik, který se vyzná v technice i ve fyzice a který s výjimečnou dovedností formuluje a řeší problémy zajímavé jak pro inženýry a vědce tak i pro matematiky. S potěšením představuji profesora Carriera.

**PROFESOR GEORGE F. CARRIER.** Slyšel jsem, že Joe Keller jednou zahájil nějaký proslov týkající se aplikované matematiky touto definicí: „Aplikovaná matematika je taková věda, že čistá matematika je její část“. Souhlasím vřele s tímto tvrzením, ale jako definice je velice zastaralé. Zdá se mi, že aplikovaná matematika je taková věda, že nejenom čistá matematika je její část, ale že i všechny ostatní vědy se stávají jejími částmi, jakmile jen dosáhnou jistého stupně svého vývoje.

Diskuse na toto všeobecné thema by ovšem neobsahovala nic kromě nepříliš výstižných všeobecných tvrzení, zredukuji tudíž své poznámky na několik otázek týkajících se systému výchovy a toho, co považují za jádro aplikované matematiky. Omezují se na otázky týkající se výchovných problémů, protože si myslím, že když jsou kvalifikovaní lidé dobře vychováni a připraveni pro své povolání, budou si zřetelně uvědomovat cenu potřeb a požadavků výzkumu a budou se je snažit uspokojovat. Omezují se na jádro aplikované matematiky, protože si myslím, že v tomto oboru prakticky žádný universitní studijní program ve Spojených státech neexistuje.

Snad bych měl nejprve definovat, co myslím pod jádrem aplikované matematiky. Učiním tak tím, že popíši cíle, schopnosti a požadavky lidí, kteří v aplikované matematice pracují. Jejich cílem je posuzovat vědecké úkazy z kvantitativního hlediska. K tomu musí být vyzbrojeni všeobecným vědním základem (ať je to již fyzika, biologie, ekonomie či cokoliv jiného), aby se mohli na problém nebo soubor problémů, kterým se zabývají, podívat jako na otázku matematickou, aby byli schopni použít podle okamžité situace buď klasických a dobře prověřených vědeckých zákonů (jako například v mechanice) nebo pečlivě navržených modelů (v novějších vědních oborech). Aplikovaný matematik musí také rozumět matematice, znát metody a postupy řešení problémů, ať již rigorózně zdůvodňované či jen heuristicky motivované a být v nich natolik zběhlý, že je schopen jich používat pro řešení matematických úloh s plným uvědoměním si jejich dosahu na spolehlivost a interpretaci výsledků.

Aplikovaný matematik musí být obzvlášť zběhlý v umění odhadnout, zda vyřešení daného problému nebo skupiny problémů uspokojí požadavky konkrétního vědního oboru a nebude-li přitom neúměrně nákladné. Musím zdůraznit, že aplikovaný matematik není obyčejným matematikem, ani specialistou v konkrétních vědních oborech; odlišuje se od nich především svým postavením a cílem, ale také výběrem vědních a matematických disciplín, kterých používá.

Jak jsem již řekl, existuje jen velmi málo universitních studijních programů, seznamujících studenta včas a odpovídajícím způsobem s takovýmto postojem a cíli. Jak by takový program měl vypadat? Pevně věřím, že by měl začínat již na úrovni střední školy! Kdyby se trigonometrii a analytické geometrii učilo na středních školách tak, jak by se jim mělo učit, kdyby se statika studentům předkládala současně s matematickými poznatky, aby si uvědomili potřebu a užitečnost studia matematiky, to vše by myslím přispělo k obohacení studijního programu matematiky, k většímu zainteresování studentů a zlepšilo by to i jejich perspektivy. Je to skutečně nutné, neboť je potřeba dát tím jakousi protiváhu důrazu, kladnému středními školami na krásu a přesnost matematického myšlení. Myslím, že mnohé ze sporů, jež vznikly kolem středoškolské matematiky, by se snadno vyřešily, kdyby byli studenti seznamováni nejen s precizním matematickým myšlením, ale též se správně zdůvodněným využitím tohoto matematického myšlení

a s početními postupy, které mu následují. Na této úrovni by výklad měl být poskytnut všem studentům bez ohledu na to, čím se chtějí v budoucnu zabývat. Nechce se mi věřit, že by vzdělaný člověk pokládal v naší době za nepotřebné porozumět alespoň trochu tomu, co ho obklopuje.

Tento souběžný úvod do vědních oborů a do matematiky by měl pokračovat univerzitním studijním programem, zcela jistě pro nováčky v aplikované matematice a jak doufám, rovněž tak i pro další. Když se začíná studovat diferenciální počet, měla by být probírána také dynamika a ony základní partie dalších vědních oborů, pro jejichž kvantitativní zvládnutí stačí probraná látka z analýzy. Výklad by měl být veden tak, aby někdy otázky konkrétního vědního oboru vedly k matematickým tématům, jindy aby výklad matematického aparátu předcházel jeho využití. V obou případech ale učitel musí dané thema chápat skutečně jako matematické – musí při výkladu pamatovat, že ideje jsou daleko důležitější nežli epsilon!

Lidé informovaní více než jsem já by mohli podat popis přednášek, v němž by byla matematická látka chronologicky uspořádána spolu se souběžnými tematy konkrétního vědního oboru, jež jsou studentu aplikované matematiky prospěšné. Myslím ale přesto, že jsem dostatečně objasnil své názory. Jako v ořečové skořápce musí student vidět sladěnou souhru vědního oboru a matematiky a spolu s ní i porozumění předměru, které může dát a měl by je dobře odlišit od čistě matematického způsobu vyvozování z postulátů, při němž nepotřebuje ani neočekává žádnou interakci s fyzikálním světem. Měl by odlišit aplikovanou matematiku i od způsobů vlastních fyzice, hledání doposud neznámých zákonů, jejich prověřování a vyvozování bezprostředních důsledků. Snad zdůrazňuji tyto věci přespříliš, ale myslím si, že takovýto popis ozřejmí hlavní cíle různých aspektů kvantitativních věd.

Mohu snad zdůraznit předcházející problematiku tím, že uvedu ve známost jeden speciální problém, na který myslím již po léta. Týká se výchovy tzv. numericky zaměřených vědců. Nejprve některé úvodní poznámky. Jistě žádný zodpovědný člověk nebude upírat velký současný i budoucí význam vědních oborů, týkajících se počítačích strojů a s nimi spojené techniky. Je-li jich rozvázně používáno, můžeme získat informace, které byly před rozvinutím této disciplíny nedosažitelné. Nicméně tato disciplína, stejně jako kterákoli jiná, je-li použita nerozumně, může nadělat víc škody než užítku. Tvrdím, že při řešení kvantitativního problému, užívajice rigorózně zdůvodněného postupu, nemusíme znát tak mnoho, jako v případě pouze heuristicky motivované metody. Čím nepřesnější je zdůvodnění metody, tím neformálnější a pružnější musí být vybraný postup. Do krajnosti toto jde, podle mých zkušeností, používáme-li na počítačích různých aproximací. Je mnoho důvodů pro to, aby se numerický matematik s jistou dávkou zodpovědnosti velmi podrobně vyznal v matematice a základech vědního oboru, jehož problémy chce svými počítači řešit. Je to např. okolnost, že je těžké odhadnout dosah špatně určených aproximací, dále skutečnost, že stroj sám nemůže zachytit a signalizovat žádné nepředvídané singularity.

Strojový výpočet není a nemůže být náhradou za myšlení či porozumění problému\*). Navzdory tomu znám několik vysokých škol, produkujících numericky zaměřené vědce, v jejichž studijních programech není zahrnuta ona středně obtížná látka z analýzy, umožňující člověku vyřešit bez počítače nepřilíší složitou Laplaceovu rovnici, anebo rozhodnout, že jistý špatně určený problém nemá řešení. Dokonce mi bylo nabídnuto numerické řešení „přiměřené“ aproximace k takovému problému. Netvrdím, že podobné věci jsou typické! Doufám a myslím si, že nikoli. Nicméně existují a já se obracím s prosbou k těm z vás, kdo zodpovídáte za výuku ve věcech kolem počítačů, abyste naléhali na zařazení rozsáhlých a hlubokých přednášek z těch oborů, bez nichž by se věda o numerických výpočtech stala sterilní a izolovanou disciplínou, určenou jen pro provádění rutinních operací namísto toho, aby byla mocným pomocníkem pro všechny vědy, pro něž jím může být.

Shrnuji: myslím, že hlavním nedostatkem našeho výchovného systému je to, že studenti

---

\*) Jsem v pokušení prohlásit, že známé oznámení firmy IBM, kterému se mnozí smějí, není možná ve správném kontextu tak nevhodné, jak si často myslíme.

na vysokých školách mají málo možností seznámit se s věcmi, které by byly motivovány a jež by zdůrazňovaly těsné spojení vědy a matematiky v širokém měřítku. Doufám, že podobné studijní programy prorazí na mnohých našich školách.

DR. GREENBERG. Velice děkuji. Když jsem Georgeovi navrhol, aby mluvil 20 minut, znaje jeho zvyky — že totiž hodinová přednáška u něho trvá asi půlhodinku — obával jsem se, že bude hotov za tři minuty. Myslím však, že mnoho přemýšlí o těchto věcech, neboť spotřeboval prakticky celých dvacet minut.

Dalším naším řečníkem bude profesor Paul Rosenbloom z University of Minnesota. Profesor Rosenbloom je znám svými hlubokými vědeckými výzkumy v matematické analýze. Pro mnohé z nás vynikající kvalitou profesora Rosenblooma je i to, že je velkolepým učitelem. Jeho oddanost vyučování matematice — myslím skutečně vyučování a skutečně matematice — ho přivedla z univerzitní posluchárny až do ministerstva školství státu Minnesota, kde je profesor Rosenbloom kromě dalších funkcí také ředitelem matematického oddělení v Minnesotské národní laboratoři. Profesor Rosenbloom se také účastnil vytváření nových učebních osnov pro střední školy v rámci SMSG (School Mathematics Study Group Program). Jsme velice zvědaví na to, co řekne profesor Rosenbloom.

PROFESOR PAUL ROSENBLIOM. To, co je podle mého názoru potřeba udělat a základní problémy ve vyučování aplikované matematice mohou nejlépe ilustrovat některými aspekty teoretické fyziky. Předně, jakou matematiku potřebujeme, abychom mohli porozumět Schrödingerově rovnici a podobným partiím fyziky? Domnívám se, že mezi jinými věcmi potřebujeme vědět o Hilbertově prostoru. Jistě potřebujeme vědět něco z teorie pravděpodobnosti a hodně o parciálních diferenciálních rovnicích. Musíme vědět něco z maticového počtu a také hodně o reprezentaci grup pro teorii elementárních částic. V našem nynějším školském systému se toto všechno studenti naučí dříve než v prvním či druhém ročníku postgraduálního studia. V tomto období má student fyziky velkou zátěž ve fyzice a obvykle nemá čas pro mnoho matematiky. Takže to, po čem obvykle sáhneme, jsou příručky a skripta, které jsou buďto kuchařskými knihami, nebo smíšenými kursy. Např. věci jako Schiffova kniha dávají studentu množství návodu pro řešení specifických problémů, ale nikoliv pochopení, proč je možné těchto metod použít. Dále máme např. knihy Kempleho a Marche, které do výuky studenta fyziky zavádějí jistou základní matematiku.

Je zde ale jedno velké nebezpečí, že totiž výchova fyziků půjde stejným směrem jako výchova lékařů. Tam je nyní situace taková, že lékař není schopen vážné odborné práce dříve než ve věku 35 a v některých případech dokonce 40 let, což je daleko za věkovým optimem tvořivých schopností člověka. Odvolávám se např. na poznámku v Kempleho knize, kde je uveden věk, v němž nejvýznačnější tvůrci kvantové mechaniky provedli své první důležité výzkumy, nebo na Hardyho „A Mathematician's Apology“, v níž se autor o matematice zmiňuje jako o záležitosti mladých lidí. Nynější situace je taková, že vzdělání profesionálního fyzika není zakončeno dříve než ve 35 nebo 40 letech. Stejnou věc můžeme pozorovat i v mnohých technických odvětvích. Podívejme se např. co se děje v aerodynamice, ekonomii, psychologii a dokonce i v matematice. Ve všech těchto odvětvích dochází k podobnému úkazu. Hrozí nám velké nebezpečí; ponecháme-li totiž systém výchovy beze změny, nebudeme už vůbec docházet k vytváření nových poznatků, protože lidem bere spoustu času jen dosáhnout současných hranic výzkumu.

V aplikované matematice také existuje problém, zda je možné určit nějaké pevné, základní znalosti, které by měli lidé v ní pracující znát a které by jim postačovaly. Podíváte-li se na celou matematiku, shledáte, že jakýkoliv pokus udát takový soubor znalostí znamená současně jak příliš mnoho tak i příliš málo. Nejlépe to mohou ilustrovat na příkladě knihy Morseho a Feshbacha, která je příliš objemná, než aby ji jakákoliv lidská bytost mohla přečíst, ale nemyslím si přitom, že by byla úplně postačující pro profesionální výcvik fyziků nebo kohokoliv kdo používá ve fyzice matematiku, protože v ní není nic o tom, jak skutečně formulovat problém. Jak chcete potom

používat kterékoli z popsaných metod? V jiném směru ukazuje odpověď nedávná Wightmanova práce o kvantové elektrodynamice, kde je ve značném rozsahu používána moderní teorie analytických funkcí několika komplexních proměnných. Pokusíme-li se určit pro lidi pracující v aplikované matematice souhrn předběžných znalostí příliš specificky, ovlivnění tím, o čem právě nyní víme, že je to aplikovatelné, může velmi dobře dojít k tomu, že jim vezmeme možnost orientovat se v nových oborech a myšlenkových postupech takových, jako jsou Wightmanovy. Druhý problém je, zda by aplikovaným matematikům posloužilo určení jistých základních kursů ve studijním programu, i kdyby to bylo možné. Pokouší se o to např. Stone v článku, o němž jste se (prof. Courant) zmiňoval. Pokouší se určit, co musí člověk znát, aby mohl v matematice toho či onoho dosáhnout, nebo aby mohl být považován za vzdělaného matematika. Připomínám jednu Diracovu práci z kvantové elektrodynamiky, kde se říká, že obvyklý postup, spočívající v tom, že se vezme fyzikální situace a pokoušíme se sestavit matematický model, který by jí vyhovoval, se zdá být téměř svěřací kazajkou autorovy představitosti. Mnohem plodnější je podle jeho názoru následující postup: vytvořit matematický model a teprve poté se poohlédnout po fyzikální interpretaci. Pozoruhodným příkladem takového způsobu práce je ovšem přesně to, co dělá Yukawa ve své první práci o mesonu. Představme si částici, jejíž chování popisuje taková a taková diferenciální rovnice. Předpokládejme, že řekneme: „Toto je náboj, toto je hmota atd. a toto je proud. Podívejme se, jak se částice bude chovat“. Pak někdo jiný jde a v laboratoři ji objeví.

Stejnou věc mohu ilustrovat ještě jinak. Připomínám reakci Fran Freedmana, teoretického fyzika angažovaného v PSSC, na učebnici pro 7. ročník, psanou v rámci SMSG, kam jsem se s velkým úsilím snažil zařadit např. aplikace matematiky na fyziku a též do kapitoly o statistice jisté příklady použití matematiky ve společenských vědách. Freedman řekl, že nejpraktičtější v této knize je kapitola o konečných matematických systémech, protože ukazuje studentům, jak vytvářet nové modely. Myslím, že je nebezpečné pokoušet se formulovat v termínech matematiky jakožto vědy již vytvořené, které speciální kursy nebo znalosti je třeba zahrnout do studijních programů. Základní problém tkví v tom, že aplikovaná matematika je taková věda, že matematika je pouze její část. Ze situace v reálném světě musíme idealizaci a zjednodušováním vytvářet matematický model. Reálný svět je velmi komplikovaný a naše lidské vědomí příliš ubohé a nanicovité než abychom jej mohli postihnout skutečně takový, jakým je. Jsme tudíž donuceni zjednodušovat jej a idealizovat. Studujeme pak matematický model, používající veškerých matematických metod, často však také naší intuice z podvědomé interpretace. Prověrkou našeho modelu pak je, zda interpretován zpět, na realitu, vyhovuje. Prostřední stadiem procesu, studium matematického modelu, které je vlastně matematikovou hrou, je jenom částí celého procesu aplikování matematiky. Pokud budeme vyučovat matematice nebo aplikované matematice, chápající ji jako zakončený celek, potud nebudeme poskytovat studentům žádnou představu o tom, jak se postavit k reálné situaci, jak ji matematicky zpracovat a jak prověřit, zda zvolený matematický aparát skutečně vyhovuje. Existuje ještě jeden problém ohledně matematického modelu. Často děláme odvážné odhady a formulujeme drastické hypotézy. Dovolte mi uvést příklad z teorie povrchového efektu. Problém, který fakticky řešíme, je problém rovinného vlnění zasahujícího vodič, který vyplňuje polovinu prostoru. Pak to aplikujeme na reálný vodič, kterým je malý drát a na jakékoliv vlnění s výjimkou rovinného. Děláme tedy to, že bereme speciální případ, který jsme schopni vyřešit a formulovat odpověď a který je dostatečně typický, takže může být aplikován k reálné situaci, jež se ale zdaleka nedá zvládnout již tak snadno. Další věc: velmi často bude několik zcela odlišných modelů vyhovovat údajům v rámci rozumných experimentálních chyb. Například z toho, co víme o řešení rovnic s malým parametrem vyplývá, že bychom vždy mohli chápat Maxwellovy rovnice buď lineárně nebo nelineárně, takže jakýkoliv počet dalších teorií bude vyhovovat reálnému světu stejně dobře jako Maxwellovy rovnice. Toto také Maxwell nejprve udělal. Člen obsahující  $D$  se objevil v jeho rovnicích z důvodů symetrie. S ohledem na experimentální údaje z té doby byl tento člen příliš malý, takže by bývalo bylo

jedno zařadit jej do rovnic či vynechat. Ale Maxwell si řekl, že s tímto členem jsou rovnice hezčí, symetričtější.

Vezměme jiný příklad. V obecné teorii relativity byly jen asi dva speciální problémy vyřešeny natolik, že je možné dělat z nich předpovědi a porovnávat je s pozorováními.

Jsou to velmi zjednodušené situace, extrémně symetrické; jediná částice bez jakýchkoliv dalších hmot apod.

Téměř všichni fyzikové jsou přesvědčeni, že to není přesně správná teorie, ale že to musí být v podstatě správný způsob nazírání na věci. Důvod proč tomu věří, netkví ve shodě s pozorováními, protože jak jsem již uvedl, je jen velmi málo důkazů a situací, v nichž existuje řešení srovnatelné se skutečností. Skutečným kritériem zde je, že to je estetické a elegantní; je to jednoduché; je to ekonomické; vysvětluje to a sjednocuje mnoho různých věcí. I když nepodávám zcela přesný obraz stavu věcí, je to v daný moment nejspokojivější způsob výkladu. Jestliže ponecháme stranou estetické elementy a budeme-li vyučovat aplikovanou matematiku striktně z utilitárního hlediska, opomeneme tím jeden z hlavních způsobů, kterými se posuzují věci v aplikované matematice. Vraťme se nyní na chvíli zpět, k záležitostem studia aplikací matematického modelu na reálný svět. Problém může být ilustrován dvěma způsoby. Mnozí z nás např. vědí o obtížích při výkladu diferenciálních rovnic. Studenti se lehkou naučí řešit diferenciální rovnice probíraných typů. Skutečná potíž je vždy v tom, jak pro zvolený fyzikální problém formulovat příslušnou diferenciální rovnici a interpretovat její řešení. Dalším příkladem jsou problémy, které máme na univerzitách po celé zemi se vztahem statistiky ke katedrám matematiky. Na většině univerzit je statistika přednášena jako část matematické teorie pravděpodobnosti a tak je člověk, který se zabývá podobnými věcmi jako Doob, považován za statistika. Doob je velký matematik; nepopírám to. Říkám jen, že na katedrách matematiky mnohých univerzit se takovéto věci nebo partie popisované ve Fellerově knize považují za statistiku. Je velmi těžké nalézt tam lidi, kteří by chápali, že existují vážné problémy kolem otázky vytváření modelů. Existují vážné problémy při prověřování, zda model skutečně vyhovuje situaci. Jakmile se pokusíte to udělat, objeví se řada problémů čisté i aplikované analýzy. Člověk může teoreticky rozumět leccemu. Ale když je postaven před praktický problém, zjistí se, že jej nemůže vyřešit. Poradíte si tedy s praktickou situací jak nejlépe umíte. Pak musíte odhadnout, možná velmi nesnadno, do jaké míry vaše odchylka od hypotézy modelu pravděpodobně ovlivní výsledek. Mohu uvést mnoho příkladů z oboru zpracování dat reálného světa. Věc je v tom, že pokud člověk nemůže být zaměstnán na katedře matematiky jako učitel statistiky, jestliže nedělá matematickou teorii pravděpodobnosti a pokud na katedrách matematiky není nikdo, kdo by rozuměl v tomto smyslu reálnému světu, znamená to, že na zemědělské škole musí být někdo, kdo dělá zemědělskou statistiku, na ekonomické člověk, který dělá ekonomickou statistiku atd., zkrátka věci, které musí být udělány, jež jsou však často dělány bez dostatečného kontaktu s matematickou stranou věci.

Jako příklad toho, co potřebuje systém vyučování aplikované matematice, bych rád uvedl malou knížku von Karmana a Biota. Myslím, že tento příklad musí být zobecněn na mnohé partie matematiky a mnohé aplikace. Jednoduše není možné doufat, že formálními kursy se dá naučit vše, co aplikovaný matematik potřebuje znát; žádným způsobem není možné předpovědět právě to, co by měl každý znát, neboť není možné předvídat vytváření nových teorií jako např. teorie informace nebo teorie her.

Kurs musí zahrnovat rozmanitá témata ze všech oborů matematiky. Musí být přímo propleten aplikacemi. Jakmile se rozhodneme, jakou matematiku chceme vyučovat, obecný postup by měl být takovýto: vzít skutečný problém z libovolného vědního oboru. Takový, že pro jeho řešení je dané matematické thema důležité. Musí se pro něj vytvořit matematický model, pak ukázat, k jakým matematickým problémům reálná úloha vede a ty musí být vyřešeny. Poté může být zájem soustředěn na matematiku. Můžeme rozvíjet základní matematickou teorii, jak doporučuje „Comitee on the Undergraduate Program“. Aplikujeme teorii k původnímu a rovněž



k dalším problémům, – tím je ilustrována skutečná síla matematické abstrakce – týž matematický model může mít různé konkrétní interpretace.

Můžeme začít např. s problémem elektromagnetické teorie, jenž vede k Laplaceově rovnici. Kromě toho, že ji aplikujeme na náš původní elektromagnetický problém, prozkoumáme také Brownův pohyb nebo mechaniku kapalin, v níž se rovněž používá Laplaceovy rovnice.

Ohledně věcí, o nichž vyslovil jisté obavy profesor Courant se domnívám, že je třeba zdůraznit problémy a otázky, kladené obecné teorii ze strany konkrétního problému. To ilustruje např. Nirenbergova práce o parabolických rovnicích. Autor dokazuje velmi obecné existenční věty pro rovnice se spojitými koeficienty nebo dokonce Lebesgueovsky integrovatelnými koeficienty. Ale je zde i problém, který pochází od Sewalla Wrighta – z jeho matematické teorie evoluce. Při pokusu vytvořit kvantitativní teorii evoluce dostává parabolické rovnice, ke kterým žádná z jeho obecných teorií není aplikovatelná, neboť koeficienty jsou příliš singulární. Máme zde krásnou a rozsáhlou obecnou teorii a nemůžeme s její pomocí zvládnout ani jednoduchý případ difuze jediného genu v populaci proměnného rozměru.

Jelikož nemůžeme ve formálních kursech postihnout všechno, musíme vytvořit podmínky pro samostatnou práci. Musíme mít nějaký „malý“ výzkum. Máme dost peněz pro každého, kdo se chce při svém studiu věnovat aplikované matematice. Musíme udělat jen jedinou věc – zorganizovat to.

Profesor Courant mluvil o tom, jak se má vyučovat v těsném vztahu k realitě. Náš existující výchovný systém, odzdoła až nahoru, je částí reality, v níž žijeme. Jinými slovy, chceme-li něco změnit, musíme znát počáteční podmínky. Na úrovni universit jsou počáteční podmínky dány tím, že hlavní slovo tam mají většinou čistí matematikové, kteří byli vychováni v tradicích přehlížení aplikací. Nemyslím, že bych se měl pouštět do historických příčin tohoto jevu, ale od dob vytvoření první postgraduální školy ve Spojených státech, školy Johna Hopkinse v r. 1876 se všeobecné úsilí soustřeďovalo k tomu, aby byl za nejvládnější činnost universit uznáván výzkum, aniž by musel být ospravedlňován z hlediska prospěšnosti a užitečnosti. Boj za ospravedlnění výzkumu na universitách byl vyhrán v letech 1940–1950 a přitom tak dokonale, že nyní je otázka uznání výuky a pedagogické činnosti na universitách jedním z našich největších problémů.

Tento dosti překvapující zjev můžeme pozorovat i na některých našich vedoucích školách technického směru, kde katedry matematiky vedly dlouhou bitvu, aby se osvobodily a nebyly pouze služebníky. Takové katedry se často pyšní tím, že nemají nikoho, kdo by se zajímal o aplikace, nebo tím, že své nejlepší lidi neobtěžují aplikacemi. „My tu děláme opravdovou matematiku a na vyučování inženýrů tady je druhá garnitura.“ Musíme přiznat, že většina lidí, na něž spoléháme pokud jde o výuku aplikované matematiky, kterou chceme zařadit do studijního programu, se k matematice dostala z důvodů spíše estetických než utilitárních. To ale znamená, že chceme-li aplikovanou matematiku dostat do studijního programu universit a postgraduálních škol, musíme ji prezentovat takovým způsobem, že zdůrazníme, že aplikovaná matematika může být také krásná a hluboká. Že má také vzrušující a znepokojující problémy, právě takové jako je problém čtyř barev nebo problém homotopie grup na sféře. Musíme ukázat, jak vzrušující je vzít reálnou situaci, řekněme chování elektronů. Tady máte experimenty. Elektrony se chovají podivně. Zde je Diracův matematický model, popisující chování jednoho elektronu. Je zde zlatý důl problémů, neprobádané oblasti, nové hranice, volající po objeviteli! Pohleďte, kam až taková abstraktní matematika může vést. Vezměte řešení rovnic, odpovídající částicím s „negativní energií“. Co jen mohou znamenat? A od tajuplné teorie míst, kde nejsou elektrony, se dostáváme k díram v polovodičích, k tranzistorům a Nobelově ceně. Přímou poezie! Drama!

A po této názorné lekci, nemáte chuť se pokusit o model popisující interakci dvou elektronů? Kdoví na co se může náhodou přijít!

V celé zemi je na 2000 vysokých škol a universit. Chceme-li aby se na přiměřeném počtu z nich přednášela aplikovaná matematika a přitom námi žádaným způsobem, chceme-li pro to

získat mnoho lidí, kteří byly vychováni jako estéti pro přednášení analýzy a ještě odlišným způsobem, musíme naši aplikovanou matematiku pro ně napsat.

Proč jsou na tak mnoha vysokých školách přednášky o Fourierových řadách a okrajových problémech? Důvodem je Churchillova kniha. Předtím, než ji Churchill napsal, nemohlo se to přednášet, protože nikdo na univerzitách nebyl schopen tuto látku přednášet jen tak z hlavy. Před rokem 1950 mohl být postgraduální kurs z matematické logiky jen na těch vysokých školách, kde se někdo v tomto oboru věnoval výzkumu. Jakmile se objevily moje, Suppesova a Kleeneho knihy, mnoho dalších vysokých škol zavedlo přednášky z matematické logiky. Chceme-li mít ve studijním programu věci, o nichž zde mluvil profesor Courant a Carrier, nebo věci, o nichž se zmiňuje Morris Kline, pak musíme napsat praktickou učebnici, která by se dala používat při přednáškách a vše do ní shrnout. Chceme-li přitom zasáhnout v nejcitlivějším místě, musí to být dříve, než se lidé rozhodují o svém zaměření. To znamená, že takové přednášky budou muset být ve studijním programu brzy po začátku. Neměla by to být prostě užitečná matematika; musejí zahrnovat skutečné aplikace k problémům moderní vědy a techniky. Nyní se podívejme např. na typická skripta z analýzy. Jen tak pro praxi v integrování je zde mnoho výpočtů různých momentů, bez nejmenší zmínky o jejich fyzikálním významu v mechanice. Chcete-li se povcičit v určitých integrálech, můžete stejně tak počítat očekávané pozorovatelné hodnoty v kvantové mechanice. To je jen pro dobrý cvik. Nebo se může ukázat, jak inženýři používají momentů při řešení reálných problémů.

Je zde také problém komunikace. Nemám dost času, abych se jím mohl podrobněji zabývat. Počet fyziků, ekonomů a psychologů, kteří jsou sběhlí v matematice, stále vzrůstá. Je jen velmi málo knih podobných dvěma knížkám Chinčinovým, které vysvětlují problémy aplikované matematiky čistému matematikovi. Vezměte si nějakou typickou knihu z oboru teoretické fyziky. Je psána pro lidi, kteří vědí velmi mnoho o empirické stránce věci, o tom, co se děje v reálném světě, ale jejichž matematická příprava je slabá.

Často se stává, že elementární fyzika je ignorována, jakoby čtenář již znal a rozuměl experimentu, který byl proveden — stejně tak je tomu i s používanými odbornými fyzikálními termíny. Kniha je psána tak, jakoby autor předpokládal, že čtenář ani nechce porozumět vysoké, intelektuální matematice. Matematik na vysoké škole a jeho studenti potřebují zcela jiné knihy.

Ještě jednu závěrečnou poznámku k diskusi o důležitosti měřu matematiky k reálnému světu. Chceme-li dosáhnout toho, aby tyto věci byly brány v úvahu na jediné univerzitě, postačí, když tam bude profesor Courant — ten se postará o to, aby vše bylo v pořádku a bude podporovat lidi v tomto směru. Ovlivní to pouze malou oblast. Chceme-li něco podobného udělat na 60 postgraduálních a 2000 vysokých školách, musíme mít učitele. Něco podobného jako křížácké tažení. Vezměme třeba SMSG. Ti jsou úspěšní, protože to je křížácké tažení. Můžete zkusit své štěstí v rámci SMSG, jako jsme to zkusili my s Burtem Colvinem anebo musíte zorganizovat své vlastní. Ale jen stát stranou a fňukat, že to a to je špatné, to věci nepomůže.

DR. GREENBERG. Posledním našim řečníkem je profesor C. N. Yang z Princetonského Institute for Advanced Study. Profesora Yanga známe jako jednoho z vedoucích světových teoretických fyziků. On a T.D. Lee dostali v roce 1957 Nobelovu cenu za práci o nezachování parity. Mnohé problémy aplikované matematiky vznikaly z podnětů fyziky. Analogicky i pro nás bude nejvhodnější, uvažujeme-li o budoucnosti aplikované matematiky, vyslechnout profesora Yanga, reprezentujícího moderní matematickou fyziku. Jsme mu velmi vděční za to, že si našel čas a zamířil se o problémy, které jsou konec konců „dilematem matematika“. Prosím profesora Yanga.

PROFESOR C. N. YANG. Zatímco obvykle je dobré mít poslední slovo, jeví se mi jako zřetelná nevýhoda být posledním řečníkem v diskusi našeho typu. Žádám vás proto o shovívavost, budu-li muset opakovat snad jen jinými slovy něco z toho, o čem se zde již mluvilo.

Chceme-li mluvit o tom, co potřebuje aplikovaná matematika, musíme nejprve vědět, co to aplikovaná matematika je. Odpověď na poslední otázku je velmi obtížná. Nultou aproximací

by mohlo být toto: aplikovaná matematika je něco mezi teoretickou fyzikou a tím, o čem přemýšlejí matematikové — něco mezi těmito dvěma předměty.

Nejprve si představme fyzika. Jeho pocity, chce-li se poradit s matematikem, vystihuje známá historka. Někjaký člověk s velkým rancem špinavého prádla hledal po dlouhou dobu bezúspěšně prádelnu. Pocítil velickou úlevu, když nakonec objevil krámeček, v jehož výloze byl vývěsní štít s nápisem „Zde praní prádla“. Vešel dovnitř a položil ranec na pult. Muž za pultem se otázel:

„Co je to?“

„Chci, abyste to vyprali.“

„My prádlo nepereme.“

„Jak to, vždyť máte ve výloze napsáno, že tu perete prádlo.“

„Ach tak, to je omyl! My pouze malujeme vývěsní štíty!“

V malé knížce, nazvané „A Mathematician's Apology“ G. H. Hardy vykládá své názory o rozdílu mezi čistou a aplikovanou matematikou, o užitečnosti každé z nich a o jejich vnitřní intelektuální přitažlivosti. Citují: „Nemusím doufat říkat, že se nepokouším očerňovat matematickou fyziku, skvělý předmět, plný závažných problémů a nejkrásnějších představ. Není ale situace obyčejného aplikovaného matematika trochu pathetická? Chce-li být užitečným, musí dělat spoustu všední práce a nemůže naplno rozehrát svou obrazotvornost, ani když by si přál povznést se k výšinám. Pomyslné vesmíry jsou o mnoho krásnější než tento stupidním způsobem zařízený reálný svět a většina důmyslných výtvorů fantazie aplikovaného matematika musí být odložena v zápětí poté, co byla vytvořena, z krutého ale postačujícího důvodu — že totiž nevyhovuje skutečnosti.“

Hardy se domnívá, že aplikovaná matematika je nudná. Jinde v knížce se tvrdí, že aplikovaná matematika je ve skutečnosti méně užitečná než čistá nebo pravá matematika, jak ji někdy nazývá. Aby se autor vyhnul nepohodlným otázkám, počítá Maxwella a Einsteina, Eddingtona i Diraca k pravým matematikům.

Je to rozkočná kniha. Četl jsem v ní s velkým potěšením výmluvné pasáže, v nichž se argumentuje někdy hluboce filosoficky, jindy velmi jednoduše a vtipně, aby byla matematika obhájena jako čisté umění.

Vyprávěl jsem vám historku s prádlem i Hardyho názory o aplikované matematice, protože se mi zdá, že definují přesně to, co by aplikovaná matematika být neměla: aplikovaná matematika by neměla být ani nudným předmětem, jak si to o ní myslí Hardy, ani uměním malování vývěsních štítů.

Aplikovaná matematika je tvořivý předmět převážně na rozhraní matematiky a teoretické fyziky, ale též mezi matematikou a dalšími předměty, který syntetizuje jevy fyzikálního světa matematickým jazykem. Rozdíl mezi aplikovaným matematikem a teoretickým fyzikem by měl být jen v důrazu kladeném na induktivní proces vedoucí od fyzikální reality k matematické formulaci a deduktivní proces přechodu od matematické formulace k fyzikální realitě. Teoretický fyzik více zdůrazní induktivní proces a naopak aplikovaný matematik zdůrazňuje deduktivní proces. Opravdu dobrý teoretický fyzik by ve skutečnosti měl být též dobrým aplikovaným matematikem a naopak. Myslím, že toto hledisko neodporuje názorům aplikovaných matematiků samotných. Je jisté v soulase s názory vyjádřenými profesorem Greenspanem v jeho vášnivě obhajobě [2] aplikované matematiky na shromáždění Americké matematické společnosti v lednu 1961.

Budeme-li souhlasit s právě podanou charakteristikou aplikované matematiky, zdá se mi, že systém výchovy a výzkumu v aplikované matematice bude muset položit základní důraz na fyzikální realitu. Zdůvodním nyní podrobněji poslední tvrzení.

Víme, že systém propojení v počítačím stroji a vestavěné mikroprogramy určují základní soubor jeho operací. Různé stroje, s různými propojeními a mikroprogramy, mohou v principu dělat stejnou práci. Docílí se toho programováním; avšak stroje vykonávají pak stejnou práci ne všechny stejně snadno. Podobně i systém výchovy utváří u studenta styl myšlení, jisté záliby

ve volbě problémů a určuje jeho psychologickou a emocionální odezvu na vznikající obtíže. Citát z Hardyho jasně ukazuje, že systém výchovy vedený ve směru k čisté matematice nepřispívá ke správnému ocenění krás skryté v matematické interpretaci fyzikálních jevů. Pro aplikovaného matematika takové nedostatečné ocenění není potěšující.

Z druhé strany, systém výchovy zaměřený k fyzice nebrání pozdějšímu osvojení matematických pojmů, ale ve skutečnosti často napomáhá tvořivému matematickému myšlení. Proč tomu tak je, je patrně hluboký problém, snad příbuzný otázce, proč vůbec může být fyzikální svět předmětem matematických formulací a též snad otázce, kolik matematických pojmů skutečně vzniklo z fyzikální reality. V každém případě ale je to samozřejmost, uznávaná i samotnými matematiky. Hadamard [3] například prohlašuje ve své „The Psychology of Invention in the Mathematical Field“, že fyzikální interpretace je obecně bezchybným průvodcem matematického tvoření a často pro ně tuto roli sehrála.

Neříkám samozřejmě, že každý fyzik se může stát matematikem a ne naopak. Zdá se mi však, že máme-li talentovaného studenta a úkol vychovat z něho aplikovaného matematika, je lepší zasvětit ho nejprve do stylu disciplíny fyzikovy, před tím, než je uchvácen radikálnější, méně tolerantním a obrazotvornějším stylem matematiky.

Fyzika byla tradičně, zvláště v minulých stoletích, důležitým zdrojem nových matematických idejí. Fourier řekl v roce 1882 — cituji z překladu [4]:

„Hluboké studium přírody je neuvěřitelnějším zdrojem matematických objevů. Toto studium, nabízející ke zkoumání určitý objekt, má nejenom výhodu, že nepřipouští nejasné otázky a nikam nevedoucí kalkulace; je kromě toho i nechybnou metodou pro utváření samotného zkoumání a objevení výsledků, které chceme znát a které by přírodní vědy měly uchovat: to jsou základní prvky, přítomné ve všech přírodních úkazech.“

Ale Fourier je snad pokládán za příliš starodávného. A možná i za ne dostatečně čistého matematika, aby stálo za to ho vyslechnout. Ocitujme proto Hermanna Weyla, který byl čistým matematikem jako žádný jiný. Napsal v článku [5] nazvaném „Teorie relativity jako stimul matematického výzkumu“, že

„Problém relativity je základní problém v geometrii i algebře a byl za takový matematiky již dávno uznáván.“

... za sebe mohu říci, že přání porozumět, jaký je skutečný matematický obsah formálního aparátu teorie relativity, mne přivedlo ke studiu reprezentací a invariantů grup; moje zkušenost v tomto směru pravděpodobně není ojedinělá“.

Dovolte mi dodat, že teorie reprezentací grup, studovaná Wylem, ovlivnila ve své době významně vývoj moderní atomové fyziky.

Tento příklad ilustruje krásně plodnost matematického myšlení, jež má svůj původ ve fyzikálních pojmech, dosahuje výšin abstrakce a vrací se, aby obohatilo rozvoj fyziky. Zdá se mi, že má-li se výzkum v aplikované matematice dynamicky rozvíjet, musí formulovat své nové problémy a hledat nové ideje v nekonečných a nádherných projevech fyzikální reality.

#### Literatura

- [1] *G. H. Hardy*: A Mathematician's Apology, Cambridge Univ. Press, 1940, str. 74—75.
- [2] *H. P. Greenspan*: Applied Mathematics as a Science, Am. Math. Monthly, 68, 1961, str. 872 až 880.
- [3] *J. Hadamard*: The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton Univ. Press, 1945, str. 52.
- [4] *J. B. Fourier*: The Analytic Theory of Heat, Cambridge Univ. Press, 1878 (anglický překlad).
- [5] *H. Weyl*: Proc. Am. Phil. Soc. 93, 1949, str. 535.

## DISKUSE

DR. GREENBERG. Víím, že naši řečníci by možná chtěli začít diskutovat o jiných themeatech; nebudme však nevíšimaví a zabýváme se určitými existujícími problémy. Rád bych začal s následující obecnou otázkou, adresovanou celé skupině. Hodně se mluví o moderní aplikované matematice a je také velká móda mluvit o finitní matematice. Přitom se neví, zda je finitní matematika něčím zásadně novým a zda bude mít velký vliv na budoucnost aplikované matematiky, nebo zda je to něco známého, co už je v podstatě zahrnuto v naší činnosti a v našich studijních programech, takže jí nemusí být přidáván zvláštní význam. Byl by někdo tak laskav a řekl nám pár slov o úloze finitní matematiky jakožto nové části aplikované matematiky?

PROFESOR COURANT. Já víím, co to je matematika, dost dobře nevíím, co je to aplikovaná matematika. Ale co to je „finitní matematika“, čím se liší od matematiky tak jak se vyvinula a byla pěstována od starověku, to jsem ještě nepochopil. Možná, že to je obchodní trik, podobně jako tituly knih, ale chceme-li vyloučit pojem limity nebo nekonečna, připadá mi to jako hudba beze zvuku nebo malířství bez barev.

DR. GREENBERG. Nikdo nechce nic dodat? Znamená to, že jsme se tím vypořádali s finitní matematikou? Dovolte mi otázku. My, kteří pracujeme v numerické matematice a máme co dělat s počítači, často slyšííváme: „Vy děláte nové věci v matematice. Čemu by se měli studenti učit, aby mohli dělat také něco podobného?“ Jako kdyby existoval nějaký souhrn matematických znalostí, potřebný pro numerickou matematiku a práci s počítači, řekněme něco jako lineární rovnice. Myslím, že se tím míní věci jako např. Booleova algebra. Otázka zní: je to něco nového, je to důležité pro aplikovaného matematika, který se věnuje řekněme problémům teoretické fyziky? Nebo snad kombinatorickým problémům?

PROFESOR ROSENBLOOM. Tyto kombinatorické problémy se vyskytují hlavně v moderních aplikacích na společenské vědy a zčásti i v biologických vědách. Mají své místo i důležitost, jsou často hluboké a těžké. Můžete zjistit oč jde např. z Mannovy knihy „Analýza a návrh experimentů“ a z novější knihy Riordanovy. Ovšem pokoušejíce se dosáhnout jisté rovnováhy ve studijních programech pro první ročníky — naše tradiční přednášky pro první a druhé ročníky se zmiňují jen o elementární fyzice, zmiňují-li se vůbec o nějakých aplikacích — mnozí lidé jako Kemeny a Tucker a další se pokusili napsat knihy pro první a druhé ročníky, v nichž si přiměřeně všímají aplikací na biologické a společenské vědy. Jediný problém je v tom, že tito lidé jsou nadšenci a jako takoví to trochu přehnali. Někdo bude muset napsat něco, co by obnovilo rovnováhu, bez toho ovšem, že by opomenul to, co oni udělali. Hlavní jádro aplikované matematiky je stále ještě analýza a opírá se tudíž o pojem limity, diferenciální počet, množinu reálných čísel apod. I v aplikacích na biologické a společenské vědy, jakmile chcete skutečně něco dělat s pravděpodobností, jste zase zpátky u analýzy. Někdo bude muset napsat knihy pro první a druhé ročníky, které by přiměřeným způsobem nahradily Kemenyho, Snella a Thompsona, a které by rozmanitě ilustrovaly mnoho aplikací, aby se ukázalo, jak je matematika spojena s reálným světem.

DR. GREENBERG. Jestliže má aplikovaná matematika mít vliv v nových oblastech, zdálo by se podle struktury přednášek z aplikované matematiky, které na universitách tradičně byly a stále jsou a které jsou principiálně příbuzné mechanice pevných látek a kapalin, že ve studijním programu je třeba provést podstatné změny. Otázka zní: Jestliže má aplikovaná matematika zasáhnout do království moderní fyziky a dokonce i novějších oborů, biologie a lékařství, jak budou tyto předměty zařazeny do studia matematiků, aby mohli mít na jejich rozvoj nějaký vliv a naopak?

PROFESOR CARRIER. Mám podezření, že se to provede stejně, jako tomu bylo s většinou temat, jež jsou dnes již klasická. Profesionální aplikovaný matematik širokých zájmů, který si troufne

na tyto nové problémy, pochopí, jaká matematika je nutná pro to, aby byl udělán krok vpřed a na jistém stupni, pravděpodobně v době postgraduálního studia, seznámí s ní studenti. Poté, podle toho, jak porostou požadavky, látka bude přednášena na nižší úrovni, aby si ji studenti mohli snadno osvojit. Nemyslím si, že by bylo rozvázné zařazovat něco do studijního programu pokud nepocítíme, že je to žádáno — programy jsou beztak přeplněny věcmi, o nichž víme, že jsou nutné. Katedry matematiky mohou docela dobře zavést přednášky rozsáhlejší a náročnější, než si může student aplikované matematiky z časových důvodů dovolit, ale záleží na aplikovaném matematikovi samotném, aby věděl o nových oborech v matematice a o jejich obecném charakteru do té míry podrobně, aby byl schopen poznat, že mu některý z nich pravděpodobně může být užitečný.

DR. GREENBERG. To se dotýká otázky předložené jedním z posluchačů, dr. Grayem z John Hopkins Applied Physics Laboratory, který se ptá: „Jakým způsobem co nejlépe zabezpečit výchovu vědce v tom smyslu, aby později, až bude postaven před nějaký problém, věděl o tom, že existuje účinná matematická metoda pro jeho řešení, o níž se dříve třeba nepředpokládalo, že by mohla mít k problému nějaký vztah?“ Obtíž je v tom, že je dosti těžké předpovědět v termínech čisté matematiky, které partie by mělo zahrnovat vzdělání aplikovaného matematika.

PROFESOR COURANT. Termín „aplikovaná matematika“ se netýká nějakého určitého souhrnu znalostí. „Aplikovaného matematika“ odlišuje od „čistého matematika“ v podstatě element motivace, element, který by ale měl být také přítomen v duši čistého matematika: hluboký zájem o vztah mezi matematikou a tím, co může být nazváno realitou. Být tímto vztahem silně ovlivněn, toť vše, co charakterizuje „aplikovaného matematika“.

Pokud jde o schopnost řešit problémy, předkládané zvenčí, řekl bych, že člověk nemůže být připraven na všechny možnosti a problémy, které se mohou vyskytnout. Je samozřejmě tragikomické, když inženýr přichází k matematikovi s otázkou a ten stráví dlouhou dobu přemítáním, pozměňováním a zjednodušováním problému a když se nakonec šťastně vrátí s odpovědí, zjistí, že tázající zatím ztratil o problém veškerý zájem.

DR. GREENBERG. Dovolte mi ještě jednu otázku. Snad všichni souhlasí s tím, že je třeba smísit předmět matematiky s předměty ostatních věd a že je třeba napsat nějaké knihy, aby se mohly stát základem pro studijní program. Víme, že knihy se již píší a že dokonce existuje křížácké tažení. Zúčastňuje se ho i profesor Rosenbloom. Myslím, že mnoho lidí je zvědavé na úspěch tohoto úsilí. Nedávno napsal Morris Kline článek, o němž hodně lidí ví. V článku si vzal na paškál, snad poněkud přehnaným způsobem, nové studijní programy. Rád bych se zeptal profesora Rosenblooma, jakožto člověka zúčastněného v SMSG (School Mathematics Study Group), do jaké míry dochází k nějakému zlepšení a také do jaké míry mohou lidé zainteresovaní v aplikované matematice a vědě pomoci v dalším rozvoji tohoto projektu; mám na mysli udělat více věcí, o nichž lidé v SMSG vědí, že by měly být udělány pro lepší uspokojení všech požadavků.

PROFESOR ROSENBLOOM. Předně, pokud jde o článek mého dobrého přítele Morris Klineho a jeho kritiku — opakuje se v něm bez větších změn to, co mi řekl v lednu 1960 v Chicagu. Patrně se z naší rozmluvy příliš nepoučil. Již tehdy jsem ho vyzval, aby se k nám připojil, nebo aby přestal s polemikou.

Souhlasím s ním v zásadě v mnoha věcech, které říká o matematických studijních programech, nemyslím si ale, že je věci byt jen za mák prospěšné stát stranou a říkat, co je špatné. Chceme-li dosáhnout změny, jež musí být udělána, musíme mít pozitivní program. Pokud jde o pokus revidovat systém vyučování matematice na školách, měli jsme mnoho problémů. Například tzv. „problem of social engineering“, který spočíval v tom, že musela být rychle udělána změna za podmínek, kdy nikdo nesměl nikomu nic nařídít. Museli jsme přimět spoustu lidí k tomu,

aby se dobrovolně rozhodli udělat to, co měli udělat. Takže problém nebyl ani tak v tom, jaká matematika se má učit v 7. nebo kterékoli jiné třídě. Obtíž byla také v rychlém zavedení celého projektu do velkého počtu škol — neměli jsme možnost je nijak přinutit. Vypadalo to všechno tedy tak, že bylo shromážděno velké množství lidí, ze škol i odjinud, z různých částí země, reprezentující různé názory jak po stránce matematické tak i pedagogické, a chtěli jsme od nich, aby v naprosto nestísňené atmosféře psali učebnice.

V podstatě byl problém v tom, aby se bylo mohlo říci, že např. tato učebnice pro 9. ročník je výsledkem naprosté shody matematiků i učitelů. Seattleův systém škol zavedl SMSG, neboť jejich inspektor matematiky byl ve skupině, která psala učebnice. Také Národní rada učitelů matematiky v ní měla své lidi. Předseda jejich výboru pro studijní programy středních škol byl ve skupině učebnic pro 11. ročník atd. Takovéto problémy jsme s tím měli a do jisté míry výsledek závisel na přesvědčení a zralosti úsudku lidí, kteří se dostali do skupin pro učebnice. Ve skupině pro 7., 8. a 12. ročníky bylo hodně lidí, kteří o věci smýšleli stejně jako Kline a já a tudíž jsme do programů zařadili věci, o nichž jsme mysleli, že jsou nutné. Ohledně skupin pro 9. až 11. ročník byli někteří z nás zklamáni, protože lidé, o nichž předpokládali, že se budou aplikací více zastávat, se nakonec v otevřených problémech podřídili ostatním. Řekl bych, že nyní existuje aparát, umožňující vyzkoušet určité věci ve velkém měřítku a že křížácké tažení je v chodu. Má-li někdo alternativní návrhy, je myslím mnohem praktičtější použít existujícího aparátu a nikoli pokoušet se vytvořit nový, konkurenční. Existuje-li nějaká skupina, která si myslí, že je třeba napsat jinou učebnici pro 9. ročník a je-li ochotna investovat do jejího napsání jistou práci, pak se to může zařídit prostřednictvím SMSG a tito lidé mohou ihned využít existujícího aparátu pro vyzkoušení tohoto návrhu a zapojit do něho lidi v různých částech země — tak je SMSG zařízen. Například loni v létě byla takto napsána učebnice pro 10. ročník s větším důrazem na analytickou geometrii. Já sám píši text o aplikované matematice pro 12. ročník a jsem si jist, že až bude hotov, profesor E. G. Begle se postará, aby byl vyzkoušen a porovnán s jinou učebnicí, o maticové algebře, rovněž pro 12. ročník, kterou již SMSG má. Doufáme, že nakonec budeme mít asi půl tuctu alternativních učebnic pro 12. ročník. Pochopitelně, že bych byl raději, kdyby byly do programu zařazeny na vhodných místech věci, které navrhuji já, jako třeba Volterrova teorie, vyložena spíše pomocí diferencních než diferenciálních rovnic a úvod do kvantové mechaniky prostřednictvím finitní matematiky, ale já jsem jen jediný člověk. Nemohu psát všechny tyto učebnice sám. Měl jsem čas jen na napsání určitého počtu kapitol pro 7. a 8. ročník. Chceme-li věci pomoci, pak někdo jako Kline nebo Polya nebo vy se musí dát dohromady spolu s půltuctem školních učitelů a psát knihy pro děti. Můžete to udělat přímo v New Yorku; mohu vyjmenovat v pěti minutách celý seznam dobrých středoškolských učitelů z New Yorku, kteří by byli natolik talentovaní a matematicky schopní, že by mohli pracovat s vámi, nebo s Morrisem Klineem nebo s kterýmkoliv jiným matematikem, aby mohl vzniknout nový program pro 9.—11. ročníky, kde jak si myslím, by to bylo nejvíce zapotřebí. Myslím, že Begle by s potěšením spolupracoval a poskytl své lidi pro tento účel k dispozici. Ale řekl bych vám stejně jako Morrisu Klineovi: „Zkuste to anebo nekritizujte“. Není žádnou omluvou říkat, že „skutečně dobří aplikovaní matematikové jako já nemají na to čas; měl by to udělat někdo jiný“. A to je obsah článku, není-liž pravda? Říká se v něm v podstatě, že dobří aplikovaní matematikové dělají důležitou vědeckou práci — v článku nejsou slova „jako já“ — a že nemají čas, aby sami psali učebnice.

DR. GREENBERG. Myslím, že bychom měli poskytnout stejný čas na schůzi SIAMU i Morrisu Klineovi.

PROFESOR COURANT. Nesouhlasím docela s tím, co jste řekl, ale domnívám se, že by v tom neměly být zainteresovány výhradně jen všelijaké komise. Není jisté, zda komise může napsat skutečně povzbuzující učebnice pro střední nebo i mateřské školy. Myslím si, že ty organizace, které podporují miliony dolarů všelijaké komise, by měly podpořit nadšené jednotlivce, ochotné napsat dobré učebnice.

PROFESOR ROSENBLUM. Dovoľte mi poznamenať, že toto se již děje. Předně, v rámci SMSG mohou psát samostatný text anebo může být utvořena velká komise. Nyní, kdy věc je zaběhnuta, není již nutná celá ta věc s ustanovováním velké skupiny, která by se měla vzájemně dohodnout a napsat učebnici. Myslím, že skupinka pro 9. až 11. ročníky, v sestavě řekněme jeden matematik a dva středoškolské učitelé, nebo nějak podobně uspořádaná, by nyní měla docela uspokojivé podmínky. (Doplněno 2. března: Několik málo vynikajících matematiků umí psát dobře pro mládež, ale většina by potřebovala pomoc dobrých učitelů).

PROFESOR COURANT. Pořád si myslím, že by měl člověk psát jako jednotlivec, nikoli jako člen skupiny pod dozorem vrchní komise. Tak tomu bylo po dlouhá desetiletí např. ve Francii. Vynikající matematikové psali jakožto jednotlivci s velkým úspěchem učebnice pro střední školy. Totéž je nyní v Rusku.

PROFESOR CARRIER. Musím říci, že mám obavy o něco větší než jen o učebnice. Týkají se výchovy učitelů středních škol. Jak asi všichni víte, NSF (National Science Foundation) přispívá na letní kurzy pro další vzdělávání učitelů středních škol. Zúčastnil jsem se rozhodování o tom, které kurzy by měly být financovány a které ne. Každý z předpokládaných kursů, s nímž jsem se mohl seznámit, byl zaměřen k prohloubení znalostí a k objasnění perspektiv matematiky; zjistil jsem velice zarmocující okolnost, že žádný z nich se netýkal vzdělání nebo perspektiv v oboru použití matematiky.

Plně souhlasím s tím, že tito učitelé si musí osvojit určitou přesnost matematického myšlení a zevrubně pochopit jisté matematické disciplíny. Současně s tím je ale nutné, aby se seznámili s perspektivami a pochopili také, jak se matematiky používá. Měli by v tom nabýt jisté zručnosti, aby mohli řešit základní kvantitativní problémy, jež se ve vědě vyskytují. Konec konců, převážná většina studentů, které budou na středních školách učitelé matematiky učit, se nestane profesionálními matematiky, ale bude mít příležitost matematiky používat ve spojení s vědou nebo dalšími obory lidské práce. Zdá se mi tudíž, že středoškolský učitel matematiky musí studovat pečlivě připravený a vhodným způsobem předložený materiál, který mu pomůže jak k tomu, aby vedl studenty k preciznímu matematickému myšlení, tak i k tomu, aby je seznamoval s návyky, které jsou podkladem mnohotvárných aplikací matematiky. Speciálně, tito učitelé musí být vedeni k pochopení toho, že názor, v současné době dosti rozšířený, totiž že krása a čistota matematiky nesvědčí, když je uvedena do souvislosti s reálným světem, není příliš moudrý. Použití matematiky ve vědě i jinde může být stejně vzrušující, esteticky potěšující a společensky prospěšné jako „čistá“, soběstačná disciplína. Naši učitelé a studenti by si to měli brzy uvědomit.

PROFESOR YANG. Mám jen velmi malou zkušenost se studenty střední školy, ale před několika lety jsem měl příležitost mluvit s nimi a výsledek mne velmi znepokojil. Snad nebude zcela nemístné, když vás seznámím se svým zážitkem. Bydlím v Princetonu, kde je velmi dobrá střední škola. Před dvěma lety skupina studentů z vyšších ročníků této školy, velmi talentovaných a zajímavých se o vědu, zorganizovala fyzikální klub. Pozvali si různé fyziky z Princetonu a zeptali se, zda by je mohli po určitý čas vést při studiu fyziky. Bylo nás několik, kdo jsme řekli, že bychom mohli a scšli jsme se společně se studenty, abychom se domluvili, jak budou přednášky vedeny a co se bude probírat. Pamatuji se, že kromě jiných tam byli také Wheeler a White. Jeden ze studentů vstal a řekl: „V následujícím pololetí chceme probrat tyto věci“. Pak napsal na tabuli seznam tematik počínaje mechanikou, elektřinou, v němž dále byly elektromagnetismus, kvantová mechanika, termodynamika, nukleární fyzika, kvantová elektrodynamika, teorie elementárních částic atd. Byli jsme tím zcela zaraženi a pokoušeli jsme se ty chlapce přesvědčit, že žádný stručný kurs není možný a že vůbec není užitečné – ve skutečnosti že je to škodlivé – naučit se spoustu termínů bez toho, že by člověk věděl, co vůbec znamenají. Ukázalo se, že to není tak snadná záležitost. Nevím, co by se s tím mělo dělat, stejně tak nevím, jak rozšířený tento zjev je. Obávám se, že se nyní velmi rychle šíří jeden nešvar. Velký zájem veřejnosti a důraz, kladený v poslední



době na vědu, speciálně na fyziku, způsobil, že talentovaní studenti střední školy pravděpodobně ve velkém spěchu pochytili spoustu termínů a slyšeli o mnoha věcech, ale nikoli ty věci samotné.

DR. GREENBERG. Dovolte mi otázku, o níž se zde ještě nemluvílo. Týká se postgraduálního studia aplikované matematiky na vysokých školách ve Spojených státech. Je ta věc v pořádku nebo je to špatné? Kdosi zde položil zajímavou otázku a sice jaká je úloha doktorských disertací (Ph. D.) v současné situaci čisté a aplikované matematiky? Je práce na doktorských disertacích zadávaných v oboru aplikované matematiky v našich institucích dostatečně hodnotná? Mají tyto disertace význam pro upevňování úlohy a postavení aplikovaného matematika v tom smyslu, že ho vedou k dobré vědecké činnosti? Myslím, že na tyto otázky snad odpoví profesor Carrier a profesor Courant.

PROFESOR CARRIER. Samozřejmě odpověď je, že se na tyto otázky nedá odpovědět jednoznačně. Existují vysoké školy, na nichž se podle mého mínění dělá neobyčejně cenná práce. Na těchto školách jsou lidé, kteří vědí (podle nějakých rozumných kritérií) jaký druh výzkumu je hodnotný; zadávají studentům důležitá témata a zatím co vedou jejich práci na disertaci, starají se o to, aby studenti používali své vlastní představivosti, aby si zvykali na postavení aplikovaného matematika, aby se hodně naučili a aby jejich práce byla opravdu vědeckým přínosem a nikoliv jen přepracováním něčeho jiného. Na takových školách je výzkumná práce cenná a co je důležitější, student získává vhodný soubor poznatků, na němž lze již zakládat produktivní výzkum. Pravděpodobně existují další školy, které nemají takové úspěchy v postgraduální výchově studentů. Často je to způsobeno tím, že lidé na těchto školách se sami výzkumem nezabývají. Na vedoucím studentovy práce nebo komisi, která práci vede, obvykle závisí, jak hodnotná práce je; zřejmě jsou schopní i méně schopní vedoucí. Myslím, že na Harvardu máme v tomto směru úspěchy a jsem si jist, že každý z přítomných si myslí totéž o své vlastní universitě. V každém případě, na mnohých školách ve Spojených státech je výzkum v aplikované matematice veden dobře.

DR. GREENBERG. Zdá se, že pramenem idejí pro aplikovanou matematiku v budoucnosti bude věda a do jisté míry také technika, pokoušející se využít všech nových objemů. Zmíníme se o vzájemném vztahu postgraduálního studia a oblasti průmyslu jakožto zdroje problémů? Jinými slovy: má aplikovaný matematik, i kdyby nebyl externím poradcem se spoustou znalostí, přístup k novým problémům? Spousta lidí jistě má, ale je to nutně zdroj problémů čerstvých a nových?

PROFESOR CARRIER. Nevím. Znáám nějaké lidi, kteří dělají hodnotnou výzkumnou práci a v podstatě s průmyslem nemají žádný kontakt; jsou to velmi dobří aplikovaní matematikové a někteří z nich také velmi dobří inženýři. Na druhé straně, mnoho problémů, které jsem já osobně shledal vzrušujícími a podnětnými, bylo takových, že jsem se s nimi tak či onak setkal v kontaktu s průmyslem — to může být náhoda anebo to skutečně cosi říká. Znáám ale další lidi, kteří na základě svých znalostí o umění a literatuře atd. nalézají a pracují na velmi cenných vědeckých problémech bez takovýchto vnějších podnětů; opakují tedy, že neexistuje jediná odpověď. To, zda je třeba vnějších podnětů, závisí na jednotlivých lidech, kteří se zabývají výzkumem a kteří zadávají svým studentům úkoly (je-li to třeba dělat). Různí lidé reagují na podněty různě.

PROFESOR COURANT. Rád bych poznamenal něco jen vzdáleně souvisejícího s touto diskusí. Cítím stejně jako ostatní řečníci, že dosažení a zachování plodného kontaktu mezi matematikou a ostatními obory je velmi obtížné. „Aplikovaný matematik“ by měl pracovat společně s fyziky, inženýry atd. a přitom nemyslím jen jako příležitostný poradce. Systém výuky na universitách a systém postgraduálního studia zvláště bude pravděpodobně muset být pozměněn pod tlakem studentů různých intelektuálních zaměření. V aplikované matematice jsou nejdůležitější problémy v přechodu od reálného problému k nalezení matematického modelu, v matematické analýze modelu a

v následujícím přeložení výsledků opět do jazyka reality. V nynější době je tato otázka dvojího přechodu zhusta opomíjena. Na universitách existuje podle mého názoru jediný způsob jak tento nedostatek překonat: je třeba dosáhnout na seminářích nebo v pracovních skupinách těsné neformální spolupráce mezi několika vynikajícími matematiky a fyziky nebo inženýry, podobně jako tomu bylo za války v OSRD. Např. vznik a mocný rozmach celých oborů programování a operačního výzkumu v Británii za války byl umožněn jen těsnou spoluprací a souhrou mezi výzkumníky matematicky i statisticky zaměřenými a lidmi z praxe. Nemám na to žádný recept, ale cítím, že university by měly v tomto směru rozvinout svou činnost a překročit hranice mezi jednotlivými disciplínami.

PROFESOR CARRIER. Něco bych rád dodal, abych vyloučil nedorozumění, pokud jde o slovo „nabídnuty“. Řekl jsem, že mnohé z problémů, které pokládám za podnětné, mi byly nabídnuty ze známostí s průmyslovým světem. Nemyslím tím, že původně formulovanou otázku shledá aplikovaný matematik nebo jiný vědec nutně podnětnou (i když v mnohých případech tomu tak může být). Podnětným směrem ve výzkumu může být abstrakce nebo zobecnění takových otázek; tudíž říkám-li „nabídnuty“, myslím to ve velmi širokém smyslu; jistě nechci, aby produktivní výzkumníková práce spočívala v hledání odpovědí na otázky, které jsou mu doslovně formulovány nějakým podnikem. Na druhé straně je velice užitečné zajímat se o základní problémy jevů, o něž se opírají takové „průmyslové otázky“.

DR. GREENBERG. Je zde ještě pár otázek od posluchačů, které bych se pokusil zařadit do diskuse. Jedna z nich je adresována Georgeovi Carrierovi. Z jeho výroků, věnovaných věcem kolem počítačů, tážající usuzuje, že možná ani není úkolem aplikovaného matematika skutečně dovést věci až ke stroji, neboť k tomu jsou určeni jiní lidé, programátoři apod. Tážající chce vědět, zda by aplikovaný matematik měl řešit celý problém, až po jeho numerickou analýzu, i kdyby to znamenalo, že by měl sám programovat.

PROFESOR CARRIER. Myslím, že odpověď na tuto otázku bude obvykle kladná. Nejdůležitější využití strojů, které jsem kdy viděl je v Los Alamos, kde téměř každý sleduje svůj výzkum až po všechny nutné výpočty zahrnující i stroje. Toto ovšem není jednoznačně vhodná odpověď. Existují některé rutinní problémy, pro něž je veškeré nutné programování již hotové až na jisté formální substitute. Do této kategorie bych zařadil např. inverzi nepřilíš velkých matic, i když mne to třeba usvědčuje z neznalosti. Rutinní operace může jistě dělat někdo, jehož úkolem je právě dělat rutinní operace a nemusí to být aplikovaný matematik v tom smyslu, ve kterém bych ho rád definoval. Když jde ale o subtilní výzkumný problém, kdy předně postup zdaleka není rutinní a struktura výsledků nemůže být přesně předpověděna, a kdy je třeba vniknout do problému, aby bylo možné rozhodnout, co vlastně budeme od počítače chtít, pak by aplikovaný matematik měl nerutinní části výzkumu provést sám.

DR. GREENBERG. Myslím, že v této souvislosti bude chtít něco poznamenat profesor Yang, protože vím, že nedávno se pro něho dělaly nějaké výpočty, na nichž mu velmi záleželo a že skončily úspěšně.

PROFESOR YANG. Nevím, zda mohu o této věci mluvit obecně, ale jak již řekl profesor Carrier, velmi mnoho záleží na samotném problému, na výzkumníkovi a též na programátorovi. Mám osobní zkušenost, že dáte-li problém programátorovi v nehotovém stavu, máte pak pochybnosti, alespoň já jsem je vždy měl, o souvislosti vypočítaných čísel s vašim původním problémem.

DR. GREENBERG. Je zde také otázka pro profesora Yanga. Zní takto: Víím, že příliš časný výcvik v čisté matematice má za následek, že studenti přezírají aplikace. Neučí fyzikové své žáky přímo opovrhovat technickými aplikacemi? Rád bych svou otázku poněkud zobecnil a otázel se, zda fyzikům často není vlastní přezírání matematiků stejně tak jako inženýrů a je-li tomu tak, proč? Cožpak oni neznají ty historky o Fourierovi a dalších?

PROFESOR YANG. Obávám se, že nemohu odpovědět za všechny fyziky, ale vážně pochybuji o tom, že by bylo mnoho fyziků zaslepených natolik, že by pohlíželi spatra buď na čisté matematiky nebo na inženýry. Nemyslím, že by tomu tak bylo s fyziky, s nimiž jsem přišel do styku. Je v povaze fyzikovy disciplíny učit se respektovat jak akademické otázky čisté intelektuální přitažlivosti tak i velmi praktické problémy. Jestliže naneštěstí někteří fyzikové zanechávají dojem jaký právě popsal Dr. Greenberg, dovoluji mi rázně se od nich distancovat.

DR. GREENBERG. Pánové, máte ještě nějaké závěrečné poznámky, které byste chtěli dodat, aby nedošlo ke zkreslení významu vašich slov?

PROFESOR YANG. Dovoľte, abych vám řekl historku o vývoji kvantové mechaniky, jež není zcela vzdálená problému jak vyučovat matematice, abychom vychovali dobré aplikované matematiky. V letech 1924–1925 bylo zcela zřejmé, že v brzku bude vyvinuta nějaká nová mechanika. Ve skutečnosti bylo tehdy už několikrát podotknuto, že snad energetické hladiny řekněme vodíkového atomu by mohly být interpretovány jako vlastní hodnoty nějakého operátoru. Jak víte, Göttingen byl velkým centrem podobných problémů — mnozí lidé tam s velkým úsilím hledali operátor, který by dával správné vlastní hodnoty. Rozumí se, že veškeré úsilí bylo marné. Nakonec, vycházejíc z fyzikální situace, byla napsána operátorová rovnice, byla také fyziky vyřešena a to dalo požadované vlastní hodnoty. Zdá se, že člověk může jen velmi obtížně předvídat správné kombinace, jež si příroda vybírá. Je asi marné, pokoušet se uhodnout, co příroda udělá a podle toho vyzbrojovat lidi všemi možnými matematickými prostředky. Důležité nejsou žádné speciální znalosti z toho, či onoho matematického oboru, důležitý je, jak zdůraznil profesor Courant, celkový postoj.

DR. GREENBERG. Myslím, že uzavřeme naši diskusi. Děkuji za nás za všechny všem účastníkům.

*Přeložil Ivan Havel*