

# Aplikace matematiky

---

Jozef Klimčík

Vektorové premietanie a jeho použitie

*Aplikace matematiky*, Vol. 11 (1966), No. 6, 467–477

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103054>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VEKTOROVÉ PREMIETANIE A JEHO POUŽITIE

JOZEF KLIMČÍK

(Došlo dňa 15. októbra 1965.)

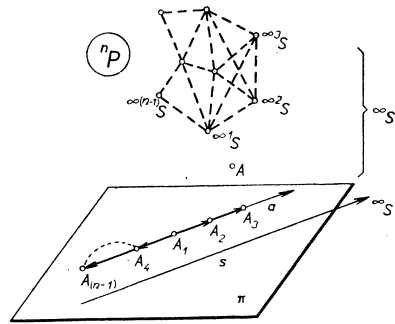
Fedorovova metóda paralelných vektorov ([1] str. 253) bola opäť použitá po dlhšom čase v prácach KRUNČAKA ([1] str. 288) a ZENGINA ([1], str. 304). E. S. FEDOROV rozšíril vyššie uvedenú premietaciu metódu i na štvorrozmerný priestor. Ešte jednoduchšie podanie vektorového premietania v štvorrozmernom priestore ukázala PRIANIŠNIKOVA ([1], str. 156) obzvlášť v poslednej časti svojej práce, veľmi vhodnej pre aplikácie v rôznych odboroch technickej praxe.

Úkolom tejto práce bude poukázať na teoretický základ vektorového premietania a na niektoré výhodné možnosti jeho použitia.

PRINCÍP VEKTOROVÉHO PREMIETANIA

Na obr. 1 vidieť schematické naznačenie vektorového premietania v  $n$ -rozmernom priestore  ${}^n P$ .

Majme  $n$ -rozmerný euklidovský priestor, rozšírený o úbežné prvky,  ${}^n P$  a v ňom úbežný  $(n - 2)$ -rozmerný lineárny priestor  ${}^{\infty(n-2)} P$ , určený  $(n - 1)$ -bodovým simplexom  ${}^{\infty} s_{n-1} = {}^{\infty 1} S, {}^{\infty 2} S, \dots, {}^{\infty(n-1)} S$ . Priestor (v ďalšom rozumej lineárny priestor)  ${}^{\infty(n-2)} P$  nech má s rovinou  $\pi$  priestoru  ${}^n P$  spoločný jediný bod  ${}^{\infty} S$  [2], určený smerom  $s$  v rovine  $\pi$  (obr. 1).



Obr. 1.

**Veta 1.** Ak premietame vlastný bod  $A$  priestoru  ${}^n P$  na priemetňu  $\pi$  z  $n - 1$   $(n - 3)$ -rozmerných úbežných priestorov  ${}^{\infty(n-3)1} P = {}^{\infty 2} S, {}^{\infty 3} S, \dots, {}^{\infty(n-1)} S, {}^{\infty(n-3)2} P = {}^{\infty 3} S, {}^{\infty 4} S, \dots, {}^{\infty(n-1)} S, {}^{\infty 1} S, \dots, {}^{\infty(n-3)n-1} P = {}^{\infty 1} S, {}^{\infty 2} S, \dots, {}^{\infty(n-2)} S$  priestoru  ${}^{\infty(n-2)} P$ , potom príslušné priemety sú v spoločných bodoch jednotlivých  $(n - 2)$ -rozmerných premietajúcich priestorov s rovinou  $\pi$ :  $A_1 = [A {}^{\infty(n-3)1} P] \circ \pi, A_2 = [A {}^{\infty(n-3)2} P] \circ \pi, \dots, A_{n-1} = [A {}^{\infty(n-3)n-1} P] \circ \pi$ . Body  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  ležia na priemke  $a \parallel s$ .

Dôkaz:  $(n - 1)$ -rozmerný priestor  $[A^{\infty(n-2)}P]$  má s rovinou  $\pi$  spoločnú priamku  $a$ , rovnobežnú so smerom  $a$ . Body  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  ležia súčasne v priestore  $[A^{\infty(n-2)}P]$  i v rovine  $\pi$ , preto musia ležať aj na priamke  $a \parallel s$ .

Preto platí

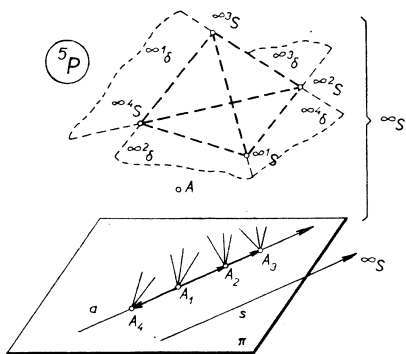
**Veta 2.** Každému vlastnému bodu  $A$  priestoru  ${}^n P$  je jednoznačne priradená v priemetni  $\pi$  množina usporiadaných bodov  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , ktoré ležia na jednej priamke  $a$ , rovnobežnej s pevným smerom  $s$ . Vektory  $(n - 2)$  majú spoločný počiatok a sú rovnobežné so smerom  $s$  ( $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_{n-1}}$ ).

Platí aj naopak

**Veta 3.** Každému z usporiadanej množiny bodov  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  v rovine  $\pi$ , ktoré ležia na priamke  $a \parallel s$ , čiže každému vektoru  $(n - 2)$  vychádzajúcemu zo spoločného počiatku a rovnobežnému so smerom  $s$  ( $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_{n-1}}$ ), ako priemetu môžeme jednoznačne priradiť v priestore  ${}^n P$  určitý bod  $A$  ako vzor.

Dôkaz:  $n - 1$   $(n - 2)$ -rozmerných priestorov  $[A_1^{\infty(n-3)1}P], [A_2^{\infty(n-3)2}P], \dots, [A_{n-1}^{\infty(n-3)(n-1)}P]$  leží v jednom  $(n - 1)$ -rozmernom priestore, určenom priamkou  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} = a \parallel s$  a priestorom  ${}^{\infty(n-2)}P$  (ktoré tvoria priestory  ${}^{\infty(n-3)2}P$  pri  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ), ktorý má s priamkou  $a$ , podľa predpokladu, spoločný bod  ${}^{\infty}S$ . Priestory  $[A_i^{\infty(n-3)i}P]$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) majú jeden spoločný bod  $A$  [2].

Poukážeme ešte na vektorové premietanie v priestore  ${}^5 P$ , v ktorom budeme premietiť zo 4 rovín  ${}^{\infty 1}\delta = {}^{\infty 2}S \infty^3 S \infty^4 S$ ,  ${}^{\infty 2}\delta = {}^{\infty 3}S \infty^4 S \infty^1 S$ ,  ${}^{\infty 3}\delta = {}^{\infty 4}S \infty^1 S \infty^2 S$  a  ${}^{\infty 4}\delta = {}^{\infty 1}S \infty^2 S \infty^3 S$  úbežného 3-rozmerného priestoru  ${}^{\infty 3}P$ , určeného 4-bodovým simplexom  ${}^{\infty}S_A = {}^{\infty 1}S \infty^2 S \infty^3 S \infty^4 S$  v priestore  ${}^5 P$  (obr. 2). Priestor  ${}^{\infty 3}P$  má s rovinou  $\pi$  priestoru  ${}^5 P$  jeden spoločný bod  ${}^{\infty}S$  určený smerom  $s$ . Platí opäť



Obr. 2.

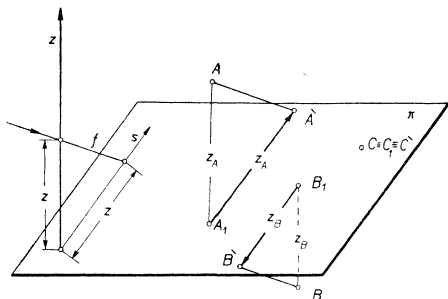
**Veta 4.** Ak premietame vlastný bod  $A$  priestoru  ${}^5 P$  na priemetni  $\pi$  z rovín  ${}^{\infty 1}\delta, {}^{\infty 2}\delta, {}^{\infty 3}\delta, {}^{\infty 4}\delta$  (obr. 2), potom príslušné priemety sú v spoločných bodoch premietajúcich 3-rozmerných priestorov  $[A^{\infty i}\delta]$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) s priemetňou  $\pi$ :  $A_1 = [A^{\infty 1}\delta] \circ \pi$ ,  $A_2 = [A^{\infty 2}\delta] \circ \pi$ ,  $A_3 = [A^{\infty 3}\delta] \circ \pi$ ,  $A_4 = [A^{\infty 4}\delta] \circ \pi$ . Body  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ležia na priamke  $a \parallel s$ .

Ďalšia veta pre 5-rozmerný priestor  ${}^5 P$  by bola analogická s vetou 2 platiacou pre  $n$ -rozmerný priestor  ${}^n P$  a dôkazy by sme vedeli uskutočniť.

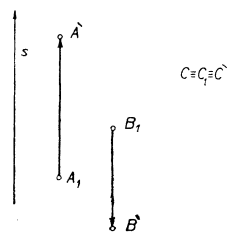
Podľa toho, čo bolo vyššie povedané, je princíp vektorového premietania v  ${}^4P$  ([1], str. 156) a v 3-rozmernom priestore  ${}^3P$  ([1], str. 288), ľahko pochopiteľný.

### VEKTOROVÉ PREMIETANIE TROJROZMERNÉHO PRIESTORU ${}^3P$

V nákrese stotožnenej s priemetňou volíme polohu a orientáciu priamky  $s$  podľa potreby. O priemete bodu v trojrozmernom priestore uvedieme len praktický záver.



Obr. 3a.



Obr. 3b.

Bod  $A$  v priestore je jednoznačne určený vektorom  $A_1A'$  v priemetni  $\pi$  (obr. 3a), rovnobežným so smerom  $s$ . Počiatkový bod  $A_1$  (v ďalšom len  $A$ ) vektoru je pravouhlý priemet bodu  $A$  do  $\pi$ , dĺžka vektoru sa rovná  $z$ -ovej súradnici bodu  $A$  a koncový bod  $A'$  je šikmý priemet bodu  $A$  na priemetňu  $\pi$  (obr. 3b).

Zostrojuvanie priestorových diagramov skupenstiev je najvýhodnejšie vo vektorovom premietaní. V ďalšom ukážeme niektoré iné výhodné možnosti použitia vektorového premietania v  ${}^3P$ .

Závislosť medzi koncentraciami zložiek danej chemickej sústavy, prípadne medzi zložkami a vlastnosťami danej sústavy sa názorne zobrazuje na diagramoch. Na zobrazovanie štvoritých systémov býva používaný tetraéder. Najvýhodnejšie zobrazenie tetraédra a príslušných koncentrácií je vo vektorovom premietaní.

Ukážeme zobrazenie tetraédra vo vektorovom premietaní so základnými konštrukciami, potrebnými pre konkrétne použitie.

Zvoľme v priemetni  $\pi$  za základňu tetraédra rovnostranný trojuholník  $ABC$  a určíme jeho stred  $D$  (obr. 4). Jednou z výšok základne napr.  $BU$  preložíme kolmo rovinu na  $\pi$  a sklopíme ju do priemetne  $\pi$ . Skutočná veľkosť výšky tetraédra je  $\overline{D(D)}$ .

Smer vektorového premietania nech zvierá s výškou  $CZ$  podstavy tetraédra uhol  $45^\circ$ . V smere premietania naniesieme z bodu  $D$  skutočnú veľkosť výšky tetraédra, takže  $\overline{D(D)} = \overline{DD'}$ , pričom  $D$  je počiatkový bod vektora a  $D'$  je koncový bod vektora. Body  $A, B, C$  ležia v priemetni, preto ich vektor je nulový a teda  $A = A', B = B', C = C'$ . V ďalšom kvôli jednoduchosti budeme ich označovať len  $A, B, C$ .

Vrcholy tetraédra  $A, B, C, D$  reprezentujú zložky. Hrany  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  sú osami koncentrácií príslušných dvojitých sústav a body  $U, V, Z$  reprezentujú koncentrácie binárnych zmesí určovanej sústavy. Steny  $ABD, ACD, ABC, BCD$  zase

trojuholníky koncentrácií zložiek.

Na obr. 4 je prevedené zostrojenie zobrazenia sústavy (zmesi) so štyrmi zložkami.

Nech je daná sústava obsahujúca  $a = 25\%$  zložky  $A$ ,  $b = 45\%$  zložky  $B$ ,  $c = 10\%$  zložky  $C$ ,  $d = 20\%$  zložky  $D$  pričom  $a + b + c + d = 100\%$ .

Hrany tetraédra rozdelíme na 100 rovnakých dielkov; najlepšie, ak má hrana 100 mm.

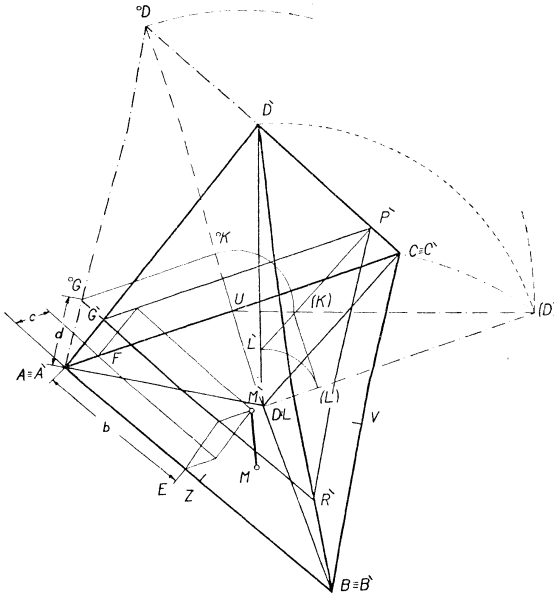
Zvoľme bod  $A$  za počiatok súradnicového systému a hrany  $AB, AC, AD$  za súradnicové osi, zložky  $B, C, D$  vyjadrené percentuálne ( $b, c, d$ ) budú súradnicami bodu  $M$ , ktorý reprezentuje daný systém.

Súradnice na hranách tetraédra  $AB, AC$ , ktoré sú stranami

základne tetraédra ležiacimi v priemetni, zobrazujú sa v skutočnej veľkosti zvolenej mierky. Preto percentuálny obsah zložiek  $B = (b = AE)$ ,  $C (c = AF)$  vynesieme v skutočnej veľkosti. V dôsledku toho, že hrany  $AD, BD, CD$  sú skreslené, tak zložku  $d = \overline{AG}$  musíme skrátiť.

Otočíme stenu  $ACD$  do priemetne  $\pi$  a z bodu  $A$  nanesieme na stranu  $\overline{A^0D}$  trojuholníka  $AC^0D$  úsečku  $d = \overline{A^0G}$  a otočíme trojuholník  $AC^0D$  do pôvodnej polohy. Bodom  $^0G$  vedieme rovnobežku s  $AC$ , ktorá pretne v bode  $^0K$  výšku  $U^0D$  otočenej steny. Úsečku  $U^0K$  nanesieme z bodu  $U$  na  $U(D)$  do bodu  $(K)$  a z neho vedená kolmica na  $D(D)$  pretne túto v bode  $(L)$ . Úsečku  $D(L)$  nanesieme na  $DD'$  do bodu  $L'$ , ktorým vedieme rovinu  $PRQ$  rovnobežnú s  $\pi$ , kvôli čomu zostrojíme bodom  $L$  priamku  $L'P'$  rovnobežnú so  $ZC$  pretínajúcu koncový priemet  $C'D'$  hrany  $CD$  v bode  $P'$ . Priamka  $P'G' \parallel AC$  pretína koncový priemet  $A'D'$  hrany  $AD$  v hľadanom koncovom priemete  $G'$  bodu  $G$ . Úsečka  $\overline{L(L)} = \overline{LL'}$  určuje vzdialenosť bodu  $M$  od základne tetraédra.

Nad úsečkami  $AF, AE, AG'$  zostrojený rovnobežnosten súradníc určuje vrchol  $M$  (tj.  $\overline{M'M} = \overline{LL'}$ ) zobrazujúci bod, ktorý odpovedá hľadanej sústave.

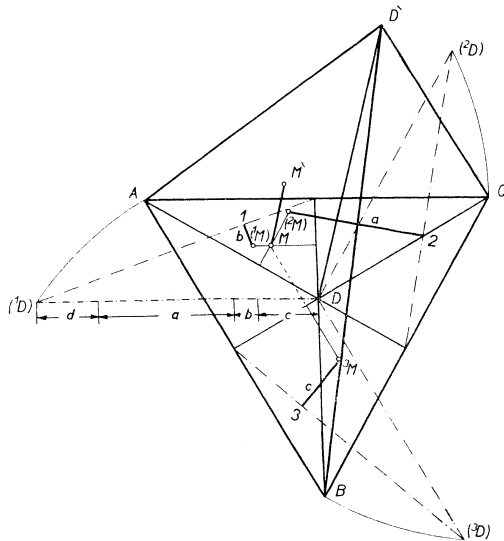


Obr. 4.

Percentuálne zastúpenie zložiek sústavy odpovedajúcich bodu  $M$  vo vnútri tetraédra, dá sa nájsť pomocou kolmíc na jeho steny, vedených týmto bodom (obr. 5).

Na kolmiciach z bodov  $({}^1M)$ ,  $({}^2M)$ ,  $({}^3M)$  na sklopené polohy výšok protíľahlých stien predpokladanej zložky, úsečky  $a = \overline{{}^2M}2$ ,  $b = \overline{{}^1M}1$ ,  $c = \overline{{}^3M}3$  určujú percentuálne zastúpenie zložiek, pričom  $d = \overline{MM'}$  určuje priamo. Súčet zložiek  $a + b + c + d$  rovná sa výške tetraédra = 100%.

Vyššie uvedeným spôsobom boli zobrazené, skúmané a vyhodnotené vlastnosti halloyzitov z lokalít východného Slovenska a kaolinitu na základe ich kryštalochemických vzorcov. Pri známej voľbe tetraédra a kryštalochemických vzorcoch sústav (halloyzitov), jednotlivé zložky boli zastúpené nasledovne:  $A = \text{H}_2\text{O} = a\%$ ;  $B = \text{Si} = b\%$ ;  $C = \text{Al} = c\%$ ;  $D = \text{OH} = d\%$  [3].



Obr. 5.

Vo vektorovom premietaní dostaneme pomerne jednoduché a presné riešenie určenia percentuálneho zastúpenia zložiek zmesi zliatin (sústav) vytvorených tromi alebo štyrmi trojitými alebo štvoritými kompozíciami (v chémii vôbec riešenia zmesi trojitých a štvoritých systémov).

Pákové pravidlo a ťažisko používané pri dvojitých a trojitých systémoch použijeme aj pri zliatinách so štyrmi zložkami.

Nech sú dané 3 štvorité zliatiny  $L$ ,  $M$ ,  $N$  s percentuálnym obsahom zložiek.  $L$ :  $a = 42\%$ ,  $b = 11\%$ ,  $c = 6\%$ ,  $d = 41\%$ ;  $M$ :  $a = 6\%$ ,  $b = 60,5\%$ ,  $c = 20,5\%$ ,  $d = 13\%$ ;  $N$ :  $a = 5\%$ ,  $b = 10,5\%$ ,  $c = 63\%$ ,  $d = 21,5\%$ .

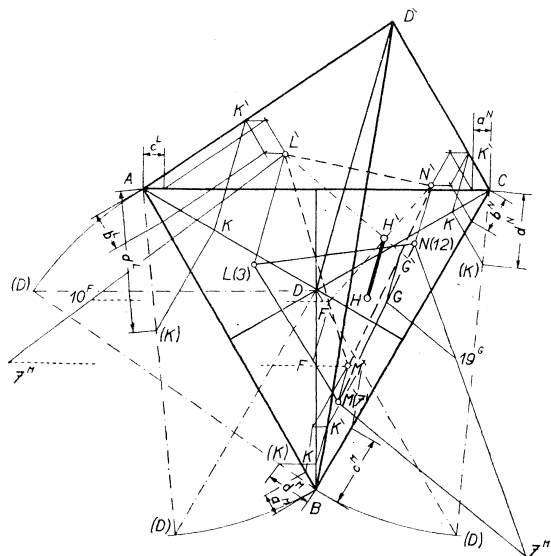
Pri zobrazení zliatiny  $L$  postupujeme analogicky ako pri zostrojení priemetu bodu  $M$  na obr. 4 s tým, že skrátenie súradnice zložky  $d$  uskutočnené je na obr. 6 pomocou sklopenia, užitím bodu  $K$ . Pre zliatinu  $M$  je počiatok súradného systému v bode  $B$  a vynášame zložky  $a$ ,  $c$ , kým zložku  $d$  skraccujeme. Počiatkom pre zliatinu  $N$  je vrchol tetraédra  $C$ . Vynášame zložky  $a$ ,  $b$  a zložka  $d$  je opäť skrátená pomocou sklopenia.

Spojením bodov  $L$ ,  $M$ ,  $N$  a  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$  dostávame počiatkový a koncový priemet určitého trojuholníka.

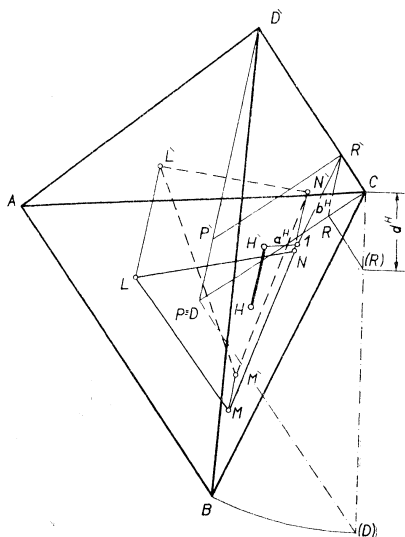
Nech váha zliatin je:  $L = 3$  kg,  $M = 7$  kg,  $N = 12$  kg.

Najprv nájdeme výslednú zliatinu  $F$  prvých dvoch zliatin  $L + M$  a potom bod  $G$ , ktorý reprezentuje kompozíciu zliatin  $M + N$ . Body  $F$ ,  $G$  zostrojíme užitím páko-

vého pravidla. Napr. v koncovom bode  $L$  bodu  $L$  nanesieme na ľubovoľnú priamku (vedenú bodom  $L$ ) 10 dielkov (vo zvolenej mierke), čo odpovedá súčtu váh zliatin  $10 \text{ kg} = L + M = F$ . Bod  $F$  leží na priamke vo vzdialenosti 7 dielkov od bodu  $L$  a troch dielkov od bodu  $M$ . Konštrukciu bodu  $F$  a  $F'$  vidieť na obr. 6 ( $10^F F' \parallel 7^M M'$ ,



Obr. 6.



Obr. 7.

$FF' \parallel LL'$  resp.  $FF' \parallel DD'$ ). Podobne bol zostrojený bod  $G$  na strane  $MN$  trojuholníka  $LMN$ . Zo zliatin  $L + M + N$  vzniká nová zliatina  $H$ , ktorú určí priesečník priamok  $LG$  a  $NF$  zostrojením počiatkových priemetov  $LG, NF$  a koncových priemetov  $L'G', N'F'$ .

Zistením súradníc bodu  $H$  určíme percentuálny obsah zložiek zliatiny, ktorú tento bod reprezentuje.

Kvôli prehľadnosti sú na obr. 7: tetraéder  $ABCD$ , trojuholník  $LMN$  a bod  $H$ . Bodom  $H$  preložíme rovinu rovnobežnú s  $\pi$  (rovinu nie je vyznačená). Priesečníka tejto roviny so stenou  $CDD'$  je priamka  $PR$ , rovnobežná s počiatkovým priemetom  $DC$ , pričom  $\overline{HH'} = \overline{PP'}$ .

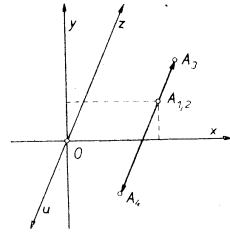
Ak vedíme bodom  $R'$  priamku rovnobežnú s hranou  $CB$  a bodom  $H'$  s hranou  $AC$ , pretínajú sa tieto v bode 1 kde  $\overline{R'1} = b^H$  a  $\overline{H'1} = a^H$ . Po zostrojení počiatkového priemetu bodu  $R$  z jeho koncového priemetu  $R'$  ( $RR' \parallel DD'$ ;  $R$  leží na  $CD$ ) a určení  $(R)$  v sklopení na  $C(D)$  je  $d^H = \overline{C(R)}$ . Tri úsečky  $a^H, b^H, d^H$  určujú percentuálne zastúpenie zložiek  $A, B, D$  v zliatine  $H$  ( $L + M + N$ ). Po sčítaní úsečiek  $a^H, b^H, d^H$  rozdiel dĺžky hrany tetraédra a ich súčtu (napr.  $\overline{AB} - a^H + b^H + d^H$ ) je  $c^H$  a predstavuje percentuálne zastúpenie zložky  $C$ . Ak  $\overline{AB} = 100\%$  potom  $a^H = 10\%$ ,  $b^H = 29\%$ ,  $c^H = 38,5\%$ ,  $d^H = 22,5\%$ .

VEKTOROVÉ PREMIETANIE ŠTVORROZMERNÉHO PRIESTORU  ${}^4P$

Osi súradného systému vo vektorovom premietaní  ${}^4P$  volíme obyčajne tak, aby  $x$  a  $y$  boli na seba kolmé. Súradné osi  $z$  a  $u$  zvolíme výhodne ako vidieť na obr. 8.

Ukážeme opäť prípady praktického použitia vektorového premietania v  ${}^4P$ , pričom budeme predpokladať ovládanie niektorých základných konštrukcií.

Mineralóg E. H. BOECKE [4] zaoberajúc sa štúdiom turmalínov uvádza, že minerály s tými istými piatimi zložkami, s rôznym obsahovým pomerom zložiek patria do jedného izomorfného radu, ak body zobrazujúce minerály v  ${}^4P$ , ležia v tej istej hyperrovine  ${}^3P$ .



Obr. 8.

Hyperrovina  ${}^3P$  v štvorrozmernom priestore  ${}^4P$  je obecne určená štyrmi bodmi I, II, III, IV, preto stačí vybrať štyri minerály o ktorých sa zistilo, že patria do určitého izomorfného radu. Pri vyšetrowaní ďalšieho minerálu tých istých zložiek s iným ich percentuálnym obsahom, zobrazíme bodom V v priestore  ${}^4P$ . Príslušnosť minerálu do daného izomorfného radu dokážeme tak, ak graficky určíme, že bod V leží v hyperrovine  ${}^3P$ .

Chemické zloženie štyroch minerálov z radu turmalínu vyjadrené v % piatich komponent je nasledovné:

turmalíny	% obsahu				
	H <sub>2</sub> O	R <sub>2</sub> O	RO	R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SiO <sub>2</sub> + R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
I	13,8	6,9	—	27,6	51,7
II	16	—	8	25,6	50,4
III	10	—	30	16	44
IV	18	8	16	19,6	46,4

Ďalší minerál je zložený z tých istých komponent:

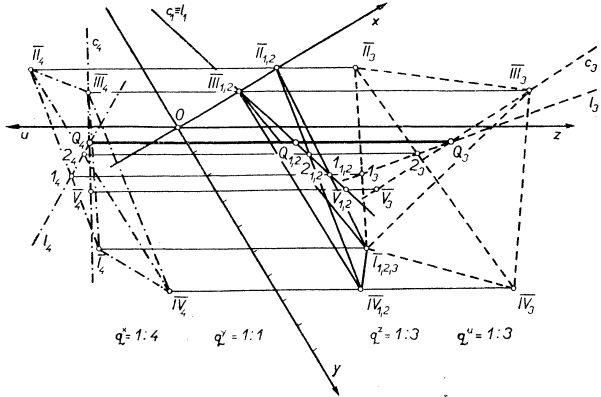
V	15,2	4,8	3,0	26,8	50,2
---	------	-----	-----	------	------

Priemety bodov I, II, III, IV určujúceho štvorstena hyperroviny  ${}^3P$  a bodu V, zostrojíme tak, že percentuálne obsahy H<sub>2</sub>O, R<sub>2</sub>O, RO, R<sub>2</sub>O<sub>3</sub> považujeme za súradnice  $x, y, z, u$  (obr. 9). Zistíme, či bod V leží v hyperrovine  ${}^3P = I, II, III, IV$ . Vidíme, že spojnica  $c = III, V$  pretína rovinu I, II, IV v bode Q. Incidenciu bodu V s hyperrovinou potvrdzujú aj iné spojnice bodu V s vrcholmi štvorstena I II III IV (v obr. 9 kvôli prehľadnosti nerysované). Minerál V patrí teda do radu turmalínu.

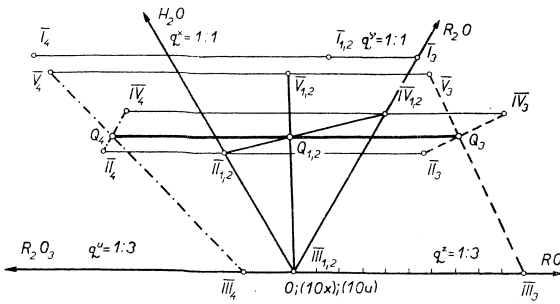


V citovanej práci ([1], str. 156) Z. J. PRIANIŠNIKOVA uviedla vyššie nastolený problém, kde súradnicovým simplexom je pentaster.

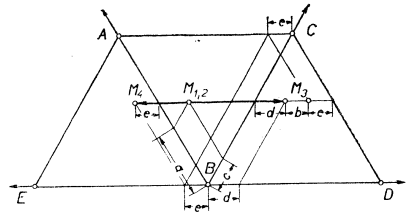
Na obr. 10 je riešená tá istá úloha za pomoci pentasterickej sústavy štvorrozmerného priestoru  ${}^4P$ . Bolo použité skrátania súradníc  $q^x = 1 : 1$ ,  $q^y = 1 : 1$ ,  $q^z = 1 : 1$ ,  $q^u = 1 : 3$ ,



Obr. 9.



Obr. 10.



Obr. 11.

$q^u = 1 : 3$ . Kvôli presnosti bola zavedená transformácia na osiach  $x$  a  $u$ . Priesečníky  $Q_{1,2}$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$  ležia na jednej priamke, z čoho usudzujeme, že minerál V patrí do radu turmalínu.

Zostrojenie diagramu určenia zmesi dvoch 5-komponentných zliatin je opäť aplikáciou problému vo vektorovom premietaní  ${}^4P$ .

Na zobrazenie zloženia diagramu použijeme rovnoramenný lichobežník  $ACDE$ , pričom bod  $B$  považujeme za počiatok súradného systému. Na obr. 11 vidieť vynešenie bodu  $M(a = 38; b = 12; c = 16; d = 18; e = 16)$  v tejto sústave.

Predpokladajme, že dve 5-komponentné zliatiny líšia sa len rôznym percentuálnym zastúpením jednotlivých zložiek. Súčet koncentrácií všetkých komponent každej

zliatiny nech je 100%, z čoho vyplýva, že z piatich zložiek zliatiny nezávislé sú len štyri komponenty.

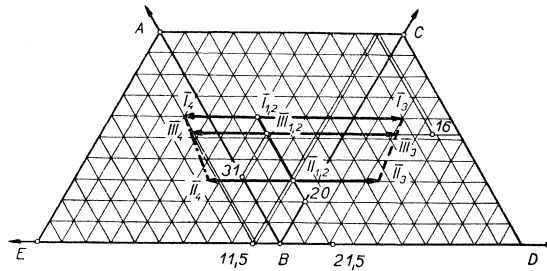
Ak dáme do súvisu komponenty zliatin s vrcholmi rovnoramenného lichobežníka, zobrazíme ľahko dané zloženie zliatin bodmi štvorrozmerného priestoru. Zliatine danej 5-komponentnou sústavou priradujeme jednoznačne bod štvorrozmerného priestoru  ${}^4P$ .

Zliatiny I, II sú dané zložkami  $A, B, C, D, E$  v %.

zliatiny	zložky				
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
I	40	10	20	20	10
II	10	30	20	25	15

Zliatiny treba zmiešať v pomere I : II = 70 : 30.

Vynesieme komponenty zliatin I, II ako súradnice, čím dostaneme  $I_{1,2}, I_3, I_4$  a  $II_{1,2}, II_3, II_4$  (obr. 12).



Obr. 12.

Zmiešanie zliatin prebieha podľa pákového pravidla. Výsledná zliatina III bude zobrazená bodom na priamke I II, ktorý vytína úsečky v obrátenom pomere k váhovým množstvám zliatin I a II. Z diagramu odčítame hodnoty zložiek:

zliatina	zložky				
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
III	31	16	20	21,5	11,5

Na určenie zloženia tvrdej fázy kryštalickej látky, a iných obdobných úloh v chémii i v hutníctve je výhodné použiť vektorového premietania v  ${}^4P$ . Diagramy sú ľahko zostrojiteľné.

## ZÁVER

Užitie deskriptívne-geometrickej metódy vektorového premietania vo viacrozmernom priestore, je za určitých podmienok výhodnejšie na riešenie rôznych špeciálnych úloh, ako použitie iných premietacích metód.

Aplikácie vektorového premietania boli ukázané na rôznych príkladoch a riešenia úloh, uskutočnené vo vektorovom premietaní 3-rozmerného a 4-rozmerného priestoru  ${}^3P$  a  ${}^4P$ , ukazujú na mnohé prednosti tejto premietacej metódy.

## Literatúra

- [1] Методы начертательной геометрии и ее приложения. Сборник статей под редакцией Н. Ф. Четверухина. Москва 1955.
- [2] P. H. Schoute: Mehrdimensionale Geometrie I. Leipzig 1902.
- [3] J. Klimčík, V. Radzo: Grafické určenie halloyzítov a kaolinitu. Sborník vedeckých prác VŠT v Košiciach, 1965.
- [4] H. E. Boecke: Eine Anwendung Mehrdimensionaler Geometrie auch chemisch-mineralogische Fragen. Neues Jahrbuch für Mineralogie. II. Band, 1910.

## Резюме

## ВЕКТОРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

ЙОЗЕФ КЛИМЧИК (JOZEF KLIMČÍK)

В работе изложен принцип векторной проекции в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  ${}^nP$ , расширенном бесконечной отдельными элементами, и в пятимерном пространстве  ${}^5P$ .

Удобное применение векторной проекции в трехмерном пространстве  ${}^3P$  было показано в случае построения пространственных диаграмм состояний, при построении диаграммы зависимостей между концентрациями компонент данной химической системы и свойствами систем на основе их кристаллохимических образцов. В данных случаях рассматриваются четырехмерные системы на тетраэдре.

При изучении химических составов (напр. сплава) с пятью компонентами применена векторная проекция в четырехмерном пространстве  ${}^4P$ . Внедрение

как трансформации, так и сокращения координат на осях, главным образом пентастерического состава в  ${}^4P$ , оказывается в некоторых случаях с точки зрения точности очень удобным.

## Zusammenfassung

### VEKTORPROJEKTION UND IHRE ANWENDUNG

JOZEF KLIMČÍK

In der Arbeit wird das Prinzip der Vektorprojektion im  $n$ -dimensionalen euklidischen, um uneigentliche Elemente verbreiteten Raum  ${}^n P$  und im 5-dimensionalen Raum  ${}^5 P$  angeführt.

Auf die geeignete Anwendung der Vektorprojektion im 3-dimensionalen Raum  ${}^3 P$  wurde hingewiesen bei der Konstruktion der Raumdiagramme von Aggregatzuständen bei der Konstruktion des Abhängigkeitsdiagramms zwischen den Konzentrationen von Komponenten des gegebenen chemischen Systems und den Eigenschaften der Systeme auf Grund deren kristallochemischer Formeln.

In den angeführten Fällen handelt es sich um die Darstellung der vierdimensionalen Systeme auf einem Tetraeder.

Beim Studium der chemischen Systeme (z. B. einer Legierung) mit 5 Komponenten wurde die Vektorprojektion im 4-dimensionalen Raum  ${}^4 P$  angewendet. Die Einführung der Transformation sowie der Koordinatenverkürzung auf den Achsen, besonders des penta-sterischen Systems im  ${}^4 P$ , ist in einigen Fällen vom Gesichtspunkt der Genauigkeit sehr vorteilhaft.

*Adresa autora:* Inž. Jozef Klimčík, Katedra matematiky a desk. geom. BF VŠT, Švermova 3, Košice.