Aplikace matematiky

Matúš Kuniak

Grafické určovanie charakteristík skrutkovo-skrutkových plôch

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 4, 314–322

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103034

GRAFICKÉ URČOVANIE CHARAKTERISTÍK SKRUTKOVO-SKRUTKOVÝCH PLÔCH

MATÚŠ KUNIAK

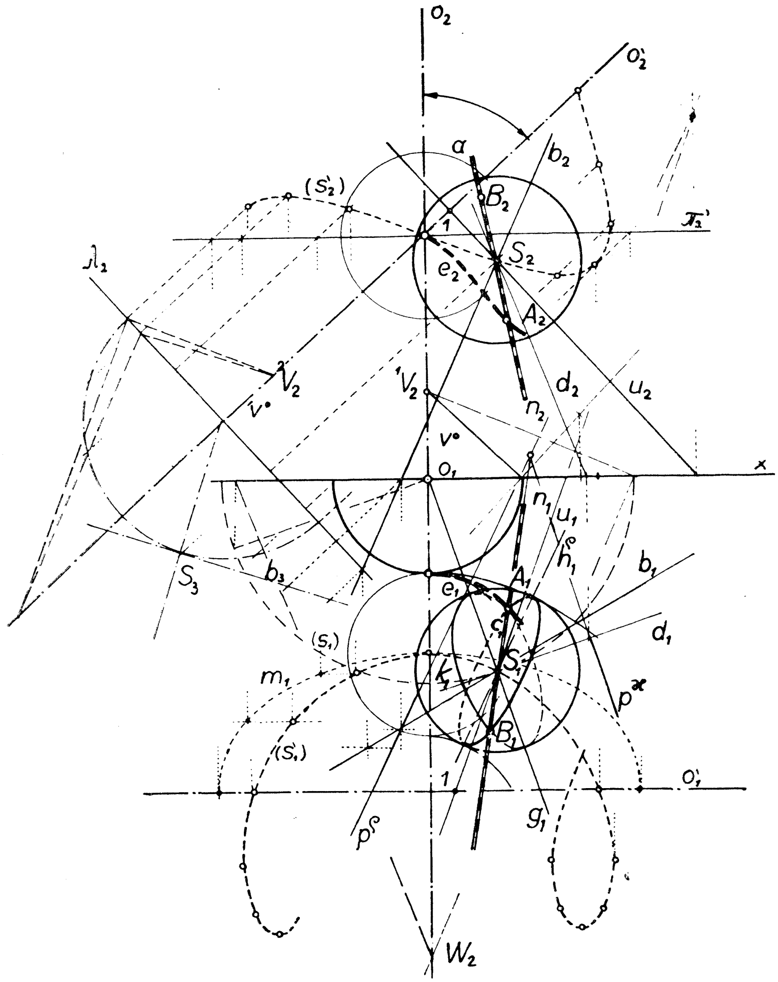
(Došlo dňa 22. februára 1965.)

Vytváranie skrutkových plôch inými skrutkovými plochami je možné z technických dôvodov výhodne realizovať u dvoch typov skrutkovo - skrutkových plôch. U prvého typu tvoriacou skrutkovou plochou podrobenou skrutkovému pohybu je Archimedova serpentína, u druhého typu tvoriacou plochou je skrutkový torzus (plocha dotyčníc skrutkovice) ohraničený hranou dvojnej skrutkovice. V oboch prípadoch sa zameriame na geometriu plošného prvku vytvorenej skrutkovo - skrutkovej plochy.

1. Podrobme rozboru skrutkovú plochu, ktorú vytvorí Archimedova serpentína skrutkovaním okolo osi o pri danej redukovanej výške závitu v^0 a smysle skrutkového pohybu (obr. 1). Poloha Archimedovej serpentíny φ vzhľadom k ose o skrutkového pohybu je určená ostrým uhlom α osi o' tvoriace Archimedovej serpentíny s osou o ($\alpha = \sphericalangle o'o$) a vzdialenosťou týchto navzájom mimobežných osí. Výsledná skrutkovo-skrutková plocha Φ je obalovou plochou serpentíny φ.

Určenie bodov charakteristiky e vytvorenej obalovej skrutkovej plochy Φ je možné graficky ľahko previesť pomocou nasledovnej interpretácie vytvorenia uvádzanej skrutkovo-skrutkovej plochy. Danú Archimedovu serpentínu φ môžeme považovať za obalovú plochu guľových plôch o konštantnom polomere, ktorých stredy S ležia na danej skrutkovici (s') o osi o'. Potom môžeme výslednú skrutkovo-skrutkovú plochu Φ získať ako obálku Archimedových serpentín, vytvorených pri skrutkovom pohybe jednotlivých guľových plôch Ψ vytvárajúcich danú serpentínu φ.

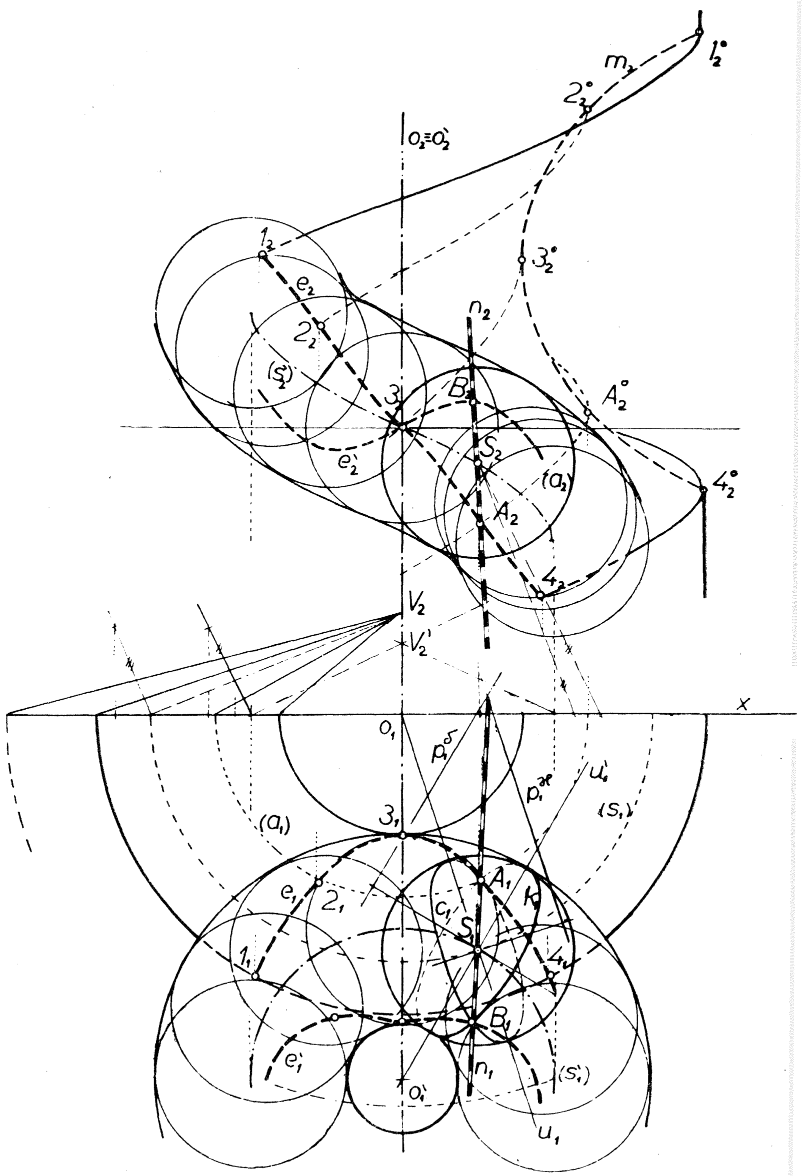
Za účelom získania bodu charakteristiky e vytvorenej plochy Φ zvolme si ľubovoľnú guľovú plochu Ψ o strede S patriacu serpentíne. Táto jednotlivá guľová plocha dotýká se serpentíny φ v hlavnej kružnici c, ktorá leží v normálovej rovine ϱ vzhľadom ku skrutkovici (s'). Pôdorys skrutkovice (s'_1) je čiara afinná s ortocykloidov, odvodíme ju z nárysu pomocou incidencie (bodov $1, 2, 3, \ldots$) skrutkovice s površkami na riadiacom valci skrutkovice (s'). Určujúce prvky (hlavnú normálu a binormálu) normálovej roviny ϱ získame pomocou výhodne zvolenej pomocnej tretej priemetne λ kolmej na os o' Archimedovej serpentíny. Jednotlivá guľová plocha Ψ podrobená danému skrutkovému pohybu okolo osi o vytvorí novú Archimedovu serpentínu Ψ', o osi o ktorej charakteristika je hlavná kružnica k guľovej plochy Ψ, ktorá sa nachádza v normálovej rovine $\varkappa$ vzhľadom ku skrutkovici (s) stredu S guľovej plochy Ψ $(\varkappa = dg)$. Obe hlavné kružnice k a c tejže guľovej plochy Ψ sa pretínajú v bodoch A, B, čo sú body charakteristiky e. Pre konštrukciu bodov charakteristiky uvedenej



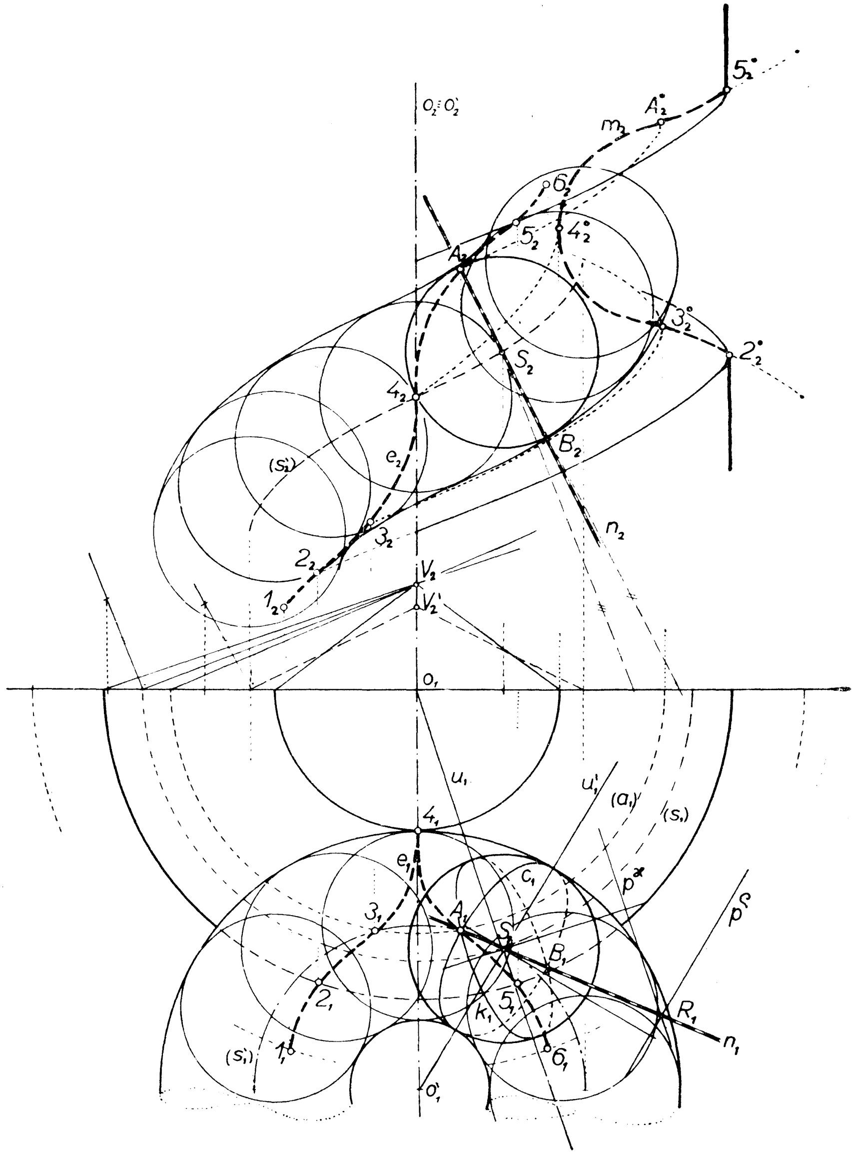
Obr. 1.

skrutkovo-skrutkovej plochy na základe dotykových prvkov medzi plochami Φ, φ, Ψ a Ψ' z uvedených úvah možno uplatniť

Vetu 1. *Body charakteristiky e obalovej skrutkovo-skrutkovej plochy Φ o tvoriacej Archimedovej serpentíne φ sú spoločné body dvoch kružníc na jednotlivých guľových plochách ${}^1\Psi$, ${}^2\Psi$, ${}^3\Psi$, ... zvolených zo sústavy guľových plôch, obaľujúcich*


1_2°
m_2
2_2°
$o_2 \equiv o_2'$
1_2
3_2°
e_2
n_2
2_2
(s_2')
3_2
B_2
A_2°
e_2'
S_2
(a_2)
4_2°
A_2
4_2
V_2
V_2'
x
o_1
p_1^{σ}
$p_1^{\varkappa}$
u_1'
(s_1)
(a_1)
3_1
A_1
e_1
2_1
c_1
k_1
S_1
1_1
4_1
B_1
e_1'
n_1
(s_1')
o_1'
u_1

Obr. 2.


o₂≡o₂'
m₂
A₂°
5₂°
6₂
5₂
4₂°
A₂
3₂°
2₂°
S₂
4₂
B₂
(s₂)
e₂
n₂
3₂
2₂
V₂
1₂
V₂'
o₁
u₁
u₁'
(a₁)
(s₁)
4₁
e₁
c₁
p^α
p^ρ
3₁
A₁
S₁
B₁
2₁
5₁
R₁
k₁
n₁
(s₁)
1₁
6₁
o₁'

Obr. 3.

serpentínu φ a to hlavnej kružnice c, ktorá vznikne rezom normálovej roviny ϱ ku skrutkovici (s') stredu S guľovej plochy a druhej hlavnej kružnice k guľovej plochy, ktorá je rezom normálovej roviny $\varkappa$ vzhľadom ku skrutkovici (s).

Obe normálové roviny ϱ a $\varkappa$ sa pretínajú v priesečnici $l = \varrho \,.\, \varkappa$, jej priesečníky A, B s guľovou plochou Ψ sú body charakteristiky. Toto konštruktívne uplatnenie je jednoduchšie a presnejšie, nakoľko ide o zostrojenie priesečníkov priamky s guľovou plochou, čo je elementárna konštrukcia. Uvádzanými konštrukciami získame vždy dva body charakteristiky z ktorých len bod A, ktorý je bližšie k ose o patrí k užitej časti charakteristiky.

Z vlastnosti charakteristiky e skrutkovo-skrutkovej plochy pre normálu plochy v jej bode platí:

Veta 2. *Spoločná normála n skrutkovo-skrutkovej plochy Φ a tvoriacej Archimedovej serpentíny v bode A charakteristiky e prechádza stredom S tej guľovej plochy Ψ vpísanej Archimedovej serpentíne φ, pomocou ktorej bola prevedená konštrukcia bodu A charakteristiky e.*

Zo získanej charakteristiky ako hlavnej tvoriacej čiary vytvorenej skrutkovo-skrutkovej plochy je možné odvodiť graficky i iné typy tvoriacich čiar plochy, ako osove rezy (meridiány), alebo rezy kolmé na os skrutkového pohybu a iné.

Na tvarové premeny tejto obalovej skrutkovej plochy pri danej tvoriacej serpentíne φ majú vplyv nasledovné parametre:

a) uhol α osi o' sepentíny φ a osi o hlavného skrutkového pohybu;

b) redukovaná výška v^0 skrutkového pohybu;

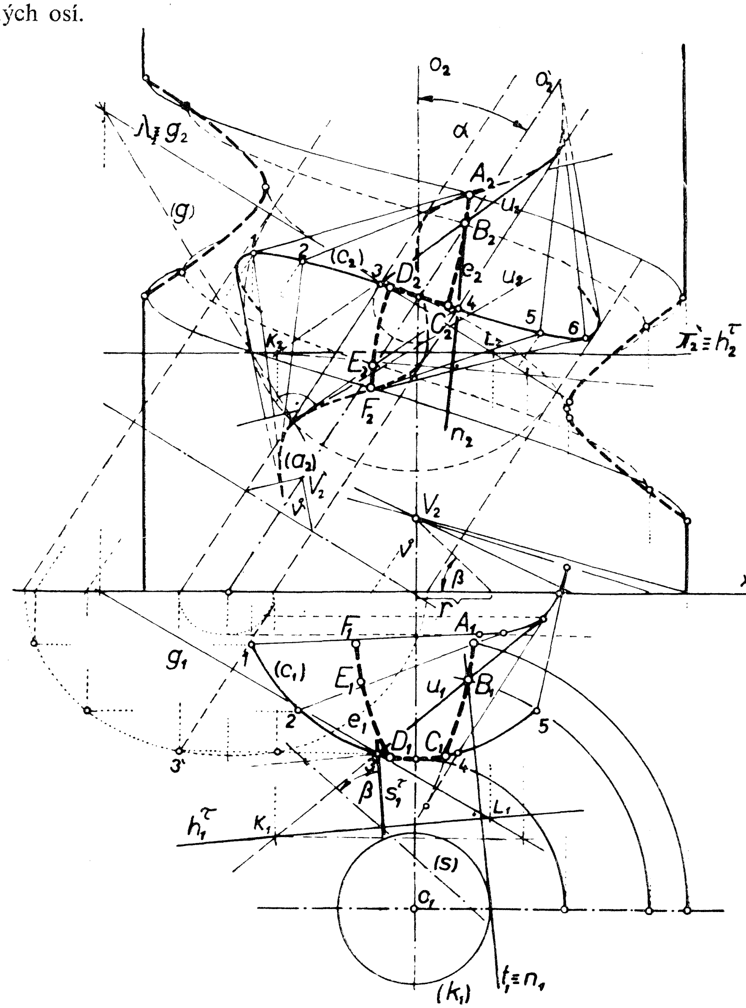
c) či skrutkový pohyb je pravo, alebo ľavotočivý.

Na obr. 2 je prevedená konštrukcia bodov charakteristiky e skrutkovo - skrutkovej plochy u ktorej os o' tvoriacej serpentíny φ je rovnobežná s osou o skrutkového pohybu. Konštrukcia bodu A, resp. B charakteristiky e je analogická, ako v predošlom obecnom prípade. Z užitej vetvy e charakteristiky bol odvodený i osový rez (meridián) m vytvorenej plochy Φ, ktorý často výraznejšie dáva predstavy o tvare vytvorenej skrutkovo-skrutkovej plochy. Priebeh neužitej časti charakteristiky reprezentuje vetev e'. V uvedenom prípade pravotočivá serpentína bola podrobená pravotočivému skrutkovému pohybu.

Podstatne tvarove odlišnú skrutkovú plochu získame, keď podrobíme ľavotočivú serpentínu pravotočivému skrutkovému pohybu. Tento prípad je prevedený v obr. 3 Rozdielnym parametrom oproti predošlému prípadu je ľavotočivý zmysel Archimedovej serpentíny, ktorá je podrobená základnému pravotočivému skrutkovému pohybu.

2. V ďalšom preveďme rozbor skrutkovej plochy, ktorú vytvorí skrutkový torzus (plocha dotyčníc skrutkovice) ohraničený hranou dvojnej skrutkovice, podrobený skrutkovému pohybu. Tvoriaca plocha skrutkového torza φ je určená osou o' redukovanou výškou $'v^0$ a zmyslom hrany vratu (a). Základný skrutkový pohyb pre vytvorenie skrutkovo-skrutkovej plochy Φ o tvoriacej ploche φ je určený osou o

parametrom v^0 a zmyslom skrutkového pohybu; pričom vzájomná poloha osí o a o' je určená ostrým uhlom $\alpha = \sphericalangle oo'$ a vzdialenosťou týchto navzájom mimobežných osí.



Obr. 4.

Aj v tomto prípade sa zameriame na skúmanie dotykových prvkov vytvorenej plochy Φ a tvoriacej plochy φ.

Skrutkový torzus φ ako rozvinuteľnú priamkovú plochu môžeme považovať za obálku roviny τ podrobenej skrutkovému pohybu. Dve súmedzné polohy skrutkujúcej roviny τ majú za priesečnicu práve tvoriacu priamku skrutkového torzusa, ktorá sa dotýka hrany vratu (a). Ak takto interpretujeme vytvorenie skrutkového torzusa, potom môžeme výslednú skrutkovo-skrutkovú plochu Φ získať ako obálku jednotlivých skrutkových torzusov, vytvorených pri skrutkovom pohybe jednotlivých dotykových rovín ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$, ... obalujúcich daný skrutkový torzus φ.

Konštrukcia bodov charakteristiky e u uvedeného typu skrutkovo-skrutkovej plochy Φ bude potom nasledovná: Zvolme si ľubovoľnú povrchovú priamku u skrutkového torzusa φ. Pozdĺž tejto povrchovej priamky existuje k ploche jediná dotyková rovina τ. Určujúcimi prvkami dotykovej roviny τ sú zvolená povrchová priamka u a dotyčnica g ku kruhovej evolvente, ktorú získame na skrutkovom torzuse, ako jeho rezovú čiaru rovinou λ kolmou na os o'. K zostrojeniu nárysu g_2 a pôdorysu g_1 dotyčnice evolventy bolo použité roviny λ kolmej na os o'. Pre rovinu $\tau = ug$ bola v úrovni π' zostrojená jej hlavná priamka I osnovy pomocou incidenčných bodov K, L. Sklopením spádovej priamky s^τ roviny τ zostrojíme jej pôdorysnú odchyľku β. Pri danom skrutkovom pohybe roviny τ okolo osi o kolmej na π priesečnica dvoch súmedzných polôh roviny τ bude spádová priamka t o odchylke β dotýkajúca sa vratnej skrutkovice (k), ležiacej na riadiacom valci o osi o a polomere $r = v^0 \operatorname{cotg} \beta$. Polomer r pre pôdorys (k_1) bol získaný graficky zo známych daných a získaných hodnôt. Potom dotyčnica t_1 ku (k_1) kolmá na h^τ je obrazom priesečnice dvoch súmedzných polôh skrutkujúcej dotykovej roviny τ, je tedy tvoriacou priamkou skrutkového torzusa τ', ktorého os je v priamke o. (Polomer r kružnice (k) je pre každú dotykovú rovinu τ rôzny, pretože pôdorysné odchylky β rovín τ sú rozdielne.)

Z vlastnosti dotykových prvkov, uvažovaných plôch Φ, φ, τ a τ' vyplýva, že charakteristika u skrutkového torzusa φ a charakteristika t skrutkového torzusa τ' sa pretínajú v bode B (obe priamky u a t ležia v tejže rovine τ), čo je bod charakteristiky e skrutkovo-skrutkovej plochy Φ.

Z uvedených úvah pre konštrukciu bodov charakteristiky e tejto skrutkovo-skrutkovej plochy Φ možno uplatniť

Vetu 3. *Body charakteristiky e obalovej skrutkovej plochy Φ o tvoriacom skrutkovom torzuse φ sú spoločné body dvoch priamok incidentných s jednotlivými dotykovými rovinami ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$, ... zvolenými zo sústavy $\sum\tau$ dotykových rovín, obalujúci skrutkový torzus φ a to priamky u, ktorá je povrchovou priamkou skrutkového torzusa φ o osi o', a priamky t ako povrchovéj priamky skrutkového torzusa τ' o osi o.*

Z vlastností charakteristiky e, vytvorenej plochy vyplývá, že jednotlivá rovina τ, ktorú sme použili na zostrojenie bodu B charakteristiky e je dotykovou rovinou i vytvorenej skrutkovo-skrutkovej plochy Φ.

Z obr. 4 je vidieť, že časťou charakteristiky e je i oblúk $\widehat{CD}$ na hrane dvojnej skrutkovice (c). Body tohoto oblúku krivky (c) strácajú uvádzané typické vlastnosti charakteristiky e.

Literatúra

[1] *M. Kuniak:* Grafické určovanie charakteristík obalových skrutkových plôch. Aplikace matematiky 9 (1964), 455—466.

Резюме

ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВИНТОВО-ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

МАТУШ КУНИАК (MATÚŠ KUNIAK)

Статья связана с работой [1]. В ней изложен графический способ определения характеристик данных двух типов винтово-винтовых поверхностей.

Если подвергается винтообразному движению спираль Архимеда, то точки характеристики e образованной винтово-винтовой поверхности Φ являются общими точками двух окружностей на отдельных шаровых поверхностях ${}^1\Psi$, ${}^2\Psi$, ${}^3\Psi$, ..., взятых из системы $\sum\Psi$ шаровых поверхностей, огибающих спираль φ главной окружонсти c, возникшей в результате сечения нормальной плоскости ϱ к винтовой линии (s') с центром S шаровой поверхности и второй главной окружности k шаровой поверхности, которая является разрезом нормальной плоскости $\varkappa$ относительно к винтовой линии (s).

Точки характеристики e огибающей кривой поверхности с возникшим винтовым торзусом φ являются общими точками двух прямых, находящихся в отдельных плоскостях соприкосновения ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$, ..., выбранных из системы $\sum\tau$ плоскостей соприкосновения, огибающих винтовой торзус φ, а именно прямой u, которая является поверхностной линией винтового торзуса φ с осью o', и прямой t, которая является поверхностной линией винтового торзуса τ' с осью o.

Summary

GRAPHICAL DETERMINATION OF THE CHARACTERISTICS OF HELICOID-HELICOIDAL SURFACES

MATÚŠ KUNIAK

This paper is a continuation of (1). It presents a graphical method of determining the characteristics of two types of helicoid-helicoidal surfaces.

If the Archimedean spiral φ undergoes a helicoidal movement, then the points of the characteristic e of the so formed helicoid-helicoidal surface Φ are the common points of two circles on the individual spherical surfaces ${}^1\Psi$, ${}^2\Psi$, ${}^3\Psi$, ... chosen from the system $\sum\Psi$ of the spherical surfaces enveloping the spiral φ, namely of the great circle c which is formed by the section of the normal plane ϱ to the helix (s') of the center S of the spherical surface and of the second great circle k of the spherical surface which is the section of the plane $\varkappa$ normal to the helix (s).

The points of the characteristic e of the enveloping helicoidal surface with the forming helicoidal torsion φ are the common points of two lines lying in the individual contact surfaces ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, ${}^3\tau$, ... chosen from the system $\sum \tau$ of the contact surfaces enveloping the helicoidal torsion φ, namely the plane u which is the surface line of the helicoidal torsion φ with axis o', and the line t as a surface line of the helicoidal torsion τ' with the axis o.

Adresa autora: Ing. *Matúš Kuniak*, Vysoká škola technická, Zbrojnícka 7, Košice.