Ivan Hlaváček

Sur quelques théorèmes variationnels dans la théorie du fluage linéaire

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 4, 283–295

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103031`

SVAZEK 11 (1966) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 4

SUR QUELQUES THÉORÈMES VARIATIONNELS DANS LA THÉORIE DU FLUAGE LINÉAIRE

IVAN HLAVÁČEK

(Reçu le 16 février 1965.)

1. INTRODUCTION

Les méthodes variationnelles, fondées sur les qualités extrémalles de certaines quantités scalaires, jouent un rôle important dans la physique et surtout dans la mécanique. C'est pourquoi même dans les domaines modernes de la mécanique des systèmes matériels continus, auxquels appartient la théorie du fluage linéaire, une tendence se manifeste de déduire les principes variationnels d'un carastère similaire comme dans la théorie classique d'élasticité. Ainci p.ex. Качанов [1], dans la théorie du viellissement des métaux, a formulé les principes analogues aux principes de Lagrange-Dirichlet resp. de Castigliano-Menabrea pour le champ des vitesses des déformations, resp. pour le champ des tensions. Шестериков [2] a désigné un principe extrémal pour le champ des tensions dans la théorie du durcissement par la déformation pour les métaux. BIOT [3] et FREUDENTHAL [4] déduisent des principes généraux de cette espèce pour les matériaux aux qualités combinées de la matière élastique et de la matière incompressible dissipesant l'énergie. ONAT [5] a formulé un principe extrémal pour le champ des vitesses des déformations dans un corps avec une loi intégrale de l'hérédité de type convolutif. GURTIN [6] a généralisé, outre les principes cités, encore les deux suivants théorèmes variationnels de la théorie d'élasticité sur les corps anisotropes avec une loi de l'hérédité de type convolutif.

Dans cet article-ci on établit deux théorèmes variationnels analogues aux principes de Lagrange-Dirichlet et de Castigliano-Menabrea par un procédé purement mathématique des problèmes aux limites formulés d'abord [8] sur le fond d'équivalence avec la théorie classique d'élasticité. Le premier théorème variationnel est presqu'une conséquence immédiate de notre définition de la solution faible des problèmes aux limites. On établit le second théorème variationnel par la méthode des projections orthogonales [9].

Enfin dans la section 4, on montre comment on peut exploiter les deux théorèmes simultanément pour les évaluations des erreurs des solutions obtenues par les méthodes variationnelles.

A la différence des travaux [1]–[6], on considère ici une loi de l'hérédité d'un type nonconvolutif.

Задоян [11] a déduit un principe extrémal pour le champ des déformations, un principe extrémal pour le champ des tensions et un principe analogue an principe de Reissner pour les corps de la matière non seulement avec une loi de l'hérédité mais aussi de l'âge, alors selon Арутюнян [7].

La théorie du fluage linéaire, exprimée par les opérateurs intégraux convolutifs ou par les opérateurs diférentiels, caractérise les phènomènes héréditaires.

Considérons la théorie de la viscoélasticité linéaire définie par les opérateurs intégraux nonconvolutifs [7], dans laquelle on tient compte non seulement des phénomènes héréditaires, mais aussi de l'âge des matériaux. Ainsi, si s_{ik} et e_{ik} sont respectivement les déviateurs du tenseur de tension σ_{ik} et du tenseur de déformation ε_{ik}, les équations rhéologiques d'état pour un corps homogène et isotrope sont données par

$$\tag{1} \tfrac{1}{2}s_{ik}(X, t) = G(t)\, e_{ik}(X, t) - \int_0^t e_{ik}(X, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathscr{G}(t, \tau)\, \mathrm{d}\tau \equiv G_t\, e_{ik}(X, t),$$

$$\tag{2} \tfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii}(X, t) = K(t) \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(X, t) - \int_0^t \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(X, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathscr{K}(t, \tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

où $\mathscr{G}(t, \tau)$, $\mathscr{K}(t, \tau)$ sont les fonctions de relaxation pour le cisaillement pur et pour la déformation volumétrique.

$$G(t) = \mathscr{G}(t, t), \quad K(t) = \mathscr{K}(t, t)$$

désignent respectivement les modules d'élasticité instantanée,

$$\tag{3} \mathscr{K}(t, \tau) = c_0\, G(t, \tau), \quad (c_0 \text{ constante positive}).$$

La relation (3), qui implique l'invariance par rapport au temps du coefficient de contraction latérale [7], rend possible l'emploi de l'analogue élastique pour construire les solutions des problèmes aux limites.

Considérons le problème mixte aux limites formulé dans [8]. Alors on suppose, que le domaine Ω du corps satisfait aux conditions du second problème aux limites ([8]-II) et que sa frontière se compose de trois parties disjointes $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{I}} + \Gamma_{\mathrm{II}} + \Gamma_{\mathrm{III}}$, dont n'importe quelle peut manquer.

Soit donnée la fonction des forces massiques $\boldsymbol{F} \in \mathbf{L}_2(\Omega, J)$, la fonction de la charge de surface $p \in \mathbf{L}_2(\Gamma_{\mathrm{II}}, J)$ et la fonction des déplacements superficiels $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega, J)$ telle, que pour tous les $t \in J$ on ait $f_{(\nu)} = 0$ sur Γ_{III}.[1])

Par solution du problème mixte on comprendra la solution faible du problème

[1]) Les définitions des espaces utilisés ici se trouvent dans [8]. $f_{(\nu)}$ signifie la projection du vecteur f dans la normale à Γ.

aux limites équivalent de la théorie d'élasticité, c'est-à-dire la fonction des déplacements $\boldsymbol{u}(X, t) \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega, J)$ telle, que pour chaque $t \in J$ on ait

1° $u = f$ sur Γ_{I},

2° $u_{(\nu)} = 0$ sur Γ_{III},

3° pour chaque vecteur-fonction $\varphi(X)$, qui possède toutes les dérivées continues dans $\bar{\Omega}$, dont le support est disjoint avec Γ_{I} et $\varphi_{(\nu)} = 0$ sur Γ_{III}, fait

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik}(u) \, \mathrm{d}X = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_{\mathrm{II}}} \varphi_i p_i^* \, \mathrm{d}S - \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi_i \mathscr{F}_i^* \, \mathrm{d}X \,, \tag{4}$$

où

$$\hat{\sigma}_{ik}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ik}(c_0 - \tfrac{2}{3}) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \equiv G_t^{-1} \sigma_{ik} \,, \tag{5}$$

$$p_i^* = G_t^{-1} p_i \,, \quad \mathscr{F}_i^* = G_t^{-1} F_i \,,$$

G_t^{-1} étant l'opérateur inverse à l'opérateur G_t, défini par (1).

2. LE THÉORÈME EXTREMAL POUR LE CHAMP DES DÉPLACEMENTS

La définition de la solution faible sous la forme (4) correspond au principe des travaux virtuels de Lagrange pour l'instant $t \in J$ fixe, si on pose

$$\varphi_i = \delta u_i \,, \quad i = 1, 2, 3 \,.$$

La condition (4) exprime que l'état équilibré de déformations, étant caracterisé par la solution $\boldsymbol{u}_0$, donne une valeur minimale d'une certaine fonctionelle (de l'énergie potentielle totale du problème équivalent d'élasticité instantanée), comme on démontre dans le

Théorème 1. (Le principe du minimum d'énergie potentielle pour le problème équivalent d'élasticité instantanée.) *Soit t un instant, $t \in J$, fixe. Définissons dans l'espace $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ une fonctionelle quadratique*

$$\Phi_t(\boldsymbol{u}) \equiv \tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}^*(t)) + (\boldsymbol{u}, \mathscr{F}^*(t)) \,, \tag{6}$$

où

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \equiv \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}X,$$

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}^*(t)) \equiv \int_{\Gamma_{\mathrm{II}}} \sum_{i=1}^{3} u_i \, p_i^*(t) \, \mathrm{d}S \,,$$

$$(\boldsymbol{u}, \mathscr{F}^*(t)) \equiv \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} u_i \mathscr{F}_i^*(t) \, \mathrm{d}X \,,$$

$\hat{\sigma}_{ik}(u)$ *est la tension modifiée,* $p_i^*(t)$ *la charge de surface modifiée et* $-\mathscr{F}_i^*(t)$ *les forces volumiques modifiées (à voir* (5)), $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Après

$$\Phi_t(\mathbf{u}_0) < \Phi_t(\mathbf{u}) \quad pour \quad |\boldsymbol{u} - \mathbf{u}_0|_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} > 0\,, \quad \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \in H_M \tag{7}$$

où $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_0(t)$ *est la solution du problème mixte de la viscoélasticité pour le moment donné,* $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ *indique les déplacements sur une partie* Γ_{I} *de la frontière et les fonctions* $\mathbf{v} \in H_M$ *satisfont aux conditions géométriques* $v_{(v)} = 0$ *sur* Γ_{III} *et* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *sur* Γ_{I} *au sens des traces (à comparer* [8]-III).

Démonstration: On supprime le signe de la dépendance de t. En démontrant le théorème 4([8]-III) on a introduit l'espace hilbertien H_M comme une enveloppe complète du linéal M des fonctions $\varphi(X)$ possédant les qualités du point 3° dans la définition de la solution faible, dans une norme convenant au produit scalaire

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_{H_M} \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{w}) \, \mathrm{d}X\,; \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in M\,.$$

On a prouvé que l'espace H_M contient précisément un élément $\mathbf{w}_0$ tel, que $\mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{f}$ représente la solution faible de notre problème, c'est-à-dire pour chaque $\mathbf{v} \in H_M$ on a

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}_0]_{H_M} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{p}^*) - (\mathbf{v}, \mathscr{F}^*) - \langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle\,, \tag{8}$$

où

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{p}^*) \equiv \int_{\Gamma_{\text{II}}} \mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{p}^* \, \mathrm{d}S\,, \quad (\mathbf{v}, \mathscr{F}^*) \equiv \int_{\Omega} \mathbf{v} \,.\, \mathscr{F}^* \, \mathrm{d}X\,,$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{f}) \, \mathrm{d}X\,.$$

Pour $\mathbf{v} \in H_M$ on définit la fonctionelle

$$\Phi(\mathbf{v}) \equiv |\mathbf{v}|_{H_M}^2 - 2\{(\mathbf{v}, \boldsymbol{p}^*) - (\mathbf{v}, \mathscr{F}^*) - \langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle\}\,.$$

A l'aide de (8), on peut l'écrire dans la forme

$$\Phi(\mathbf{v}) = |\mathbf{v} - \mathbf{w}_0|_{H_M}^2 - |\mathbf{w}_0|_{H_M}^2\,, \tag{9}$$

de laquelle il est évident que

$$\Phi(\mathbf{w}_0) = -|\mathbf{w}_0|_{H_M}^2 < \Phi(\mathbf{v}) \tag{10}$$

pour

$$|\mathbf{v} - \mathbf{w}_0|_{H_M} > 0\,, \quad \mathbf{v} \in H_M\,. \tag{11}$$

Écrivons

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{v}\,, \quad \boldsymbol{v} \in H_M \subset \boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)\,,$$

alors

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{f} \oplus H_M \subset \boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)\,.$$

Supposons que la définition de la forme bilinéaire $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]_{H_M}$ soit élargie sur tout l'espace $\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)$ et qu'elle possède la forme pareille même pour les éléments de $\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega) \dot{-} H_M$. Indiquons la forme élargie

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, \hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{w})\, \mathrm{d}X\,, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)\,.$$

Nous avons alors

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]_{H_M} \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in H_M$$

et la fonctionelle $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f} \rangle$ introduite ci-dessus correspond à la forme élargie.

Ensuite on obtient par substitution $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}$ dans la fonctionelle $\Phi(\boldsymbol{v})$

$$\Phi(\boldsymbol{v}) = \Phi(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle -$$
$$- 2\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{p}^*) - (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \mathscr{F}^*) - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle\} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle -$$
$$- 2\{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}^*) - (\boldsymbol{u}, \mathscr{F}^*)\} + 2(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{p}^*) - 2(\boldsymbol{f}, \mathscr{F}^*) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle\,,$$

où les trois derniers membres ne dépendent plus de $\boldsymbol{u}$. Nous désignons leur somme par $\Phi_1(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{p}^*, \mathscr{F}^*)$.

De cela il résulte l'affirmation du théorème 1, si on substitute

$$\Phi(\boldsymbol{v}) = 2\Phi_t(\boldsymbol{u}) + \Phi_1(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{p}^*, \mathscr{F}^*)$$

dans (10) et les relations

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\,, \quad \boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{f}$$

dans (11) et si on emploie l'inégalité

$$0 < |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)} < c|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0|_{H_M}$$

(voir (45) dans [8]-III).

3. LE THÉORÈME EXTRÉMAL POUR LE CHAMP DES TENSIONS MODIFIÉES

Par la manière analogue à la méthode des projections orthogonales nous établissons maintenant le théorème dual, qui répond au principe de Castigliano dans la théorie classique d'élasticité.

Le moment t soit fixé de nouveau et en continuant on supprime le signe de la dépendance de t.

Considérons l'espace de Banach $\mathscr{T}_2$ des tenseurs symétriques T avec les composantes

$$\hat{\sigma}_{ik}(X) \in L_2(\Omega)\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,,$$

$$\hat{\sigma}_{ik} = \hat{\sigma}_{ki}\,,$$

avec la norme

$$|T|^2_{\mathscr{T}_2} = \sum_{i,k=1}^{3} |\hat{\sigma}_{ik}|^2_{L2(\Omega)}$$

et l'espace $\mathscr{E}(\mathscr{T}_2)$ des tenseurs symétriques correspondants $\mathscr{E}(T)$ avec les composantes

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{ik} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9c_0}\right)\delta_{ik}\sum_{j=1}^{3}\hat{\sigma}_{jj}\,, \quad (i, k = 1, 2, 3)\,. \tag{12}$$

Remarque 1. Cette formule-ci résulte de la solution des équations (5), où

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

et répond à la loi de Hook généralisée avec les constantes de Lamé

$$\lambda = c_0 - \tfrac{2}{3}\,, \quad \mu = 1\,.$$

Nous formons l'espace hilbertien $\mathscr{H}$ de l'espace $\mathscr{T}_2$ comme une enveloppe complète de $\mathscr{T}_2$ employant la norme correspondante au produit scalaire

$$(T', T'') \equiv \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \hat{\sigma}_{ik}(T')\,\varepsilon_{ik}(T'')\,\mathrm{d}X\,. \tag{13}$$

En appliquant des formules (12) et (5) on vérifie facilement que la forme bilinéaire (13) possède toutes les qualités du produit scalaire dans $\mathscr{T}_2$.

Parce que

$$(T, T) = |T|^2_{\mathscr{H}} \geqq \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon^2_{ik}(T)\,\mathrm{d}X\,, \tag{14}$$

et $\hat{\sigma}_{ik}$ est d'apres (5) une combination linéaire des composantes ε_{ik}, on a $\mathscr{H} \subset \mathscr{T}_2$ et par conséquente, compte tenu des relations (12), l'immersion $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{T}_2$ et la transformation inverse sont des isomorfismes.

Désignons par $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$ l'ensemble des tenseurs T' pour lesquels il existe un vecteur $\mathbf{v}' \in H_M$ (dont il résulte

$\mathbf{v}' \;\; = 0$ sur Γ_{I} (au sens des traces),

$v'_{(\nu)} = 0$ sur Γ_{III} (au sens des traces) ([8]-III)),

tel, que $\hat{\sigma}_{ik}(T')$ vérifie la relation (5), où $\boldsymbol{u} = \mathbf{v}'$.

Autrement dit, pour T' les conditions de la compatibilité et les conditions homogènes géométriques aux limites sont accomplies.

Ensuite nous notons $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}$ l'ensemble des tenseurs T'', qui satisfont dans Ω au sens faible aux équations homogènes d'équilibre

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \hat{\sigma}''_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

et sur la frontière aux conditions homogènes statiques

$$\sum_{k=1}^{3} \nu_k \hat{\sigma}''_{ki} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathrm{II}},$$

$$\boldsymbol{q}''_{(s)} \equiv \boldsymbol{q}'' - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{q}'' \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathrm{III}},$$

c'est-à-dire que pour chaque $\varphi \in M$ on a

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}''_{ik} \, \mathrm{d}X = 0. \tag{15}$$

Lemma 1. *$\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont sous-espaces de $\mathscr{H}$.*

Démonstration: De la définition il est évident que tous les deux ensembles sont des espaces linéaires sur le corps des nombres réels. Nous montrons qu'ils sont fermés dans $\mathscr{H}$.

Que la suite des éléments $T_n \in \mathscr{H}_1$ converge dans $\mathscr{H}$ vers l'élément $T' \in \mathscr{H}$,

$$\lim_{n \to \infty} |T_n - T'|_{\mathscr{H}} = 0.$$

Alors ils existe pour chaque T_n, $T_m \in \mathscr{H}_1$ des éléments $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_m \in H_M$ tels que

$$|T_n - T_m|^2_{\mathscr{H}} = \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega [\varepsilon_{ik}(\mathbf{v}_n) - \varepsilon_{ik}(\mathbf{v}_m)] [\hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{v}_n) - \hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{v}_m)] \, \mathrm{d}X = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m|^2_{H_M}$$

et de la convergence des T_n dans $\mathscr{H}$ il résulte la convergence des $\mathbf{v}_n$ dans H_M.

Alors il existe $\mathbf{v}' \in H_M$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'|_{H_M} = 0.$$

Si $T(\mathbf{v}')$ représente le tenseur correspondant à l'élément $\mathbf{v}'$ d'après (5), on a

$$\lim_{n\to\infty} |T_n - T(\mathbf{v}')|_{\mathscr{H}} = 0,$$

car

$$|T(\mathbf{v}_n) - T(\mathbf{v}')|^2_{\mathscr{H}} = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'|^2_{H_M}.$$

Comme la suite des éléments $T_n \equiv T(\mathbf{v}_n)$ converge vers $T(\mathbf{v}')$ dans $\mathscr{H}$, on doit avoir $T' = T(\mathbf{v}')$ et l'ensemble $\mathscr{H}_1$ est fermé dans $\mathscr{H}$.

Considérons maintenant la suite des éléments $T_n \in \mathscr{H}_2$ convergeant vers $T'' \in \mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$,

$$\lim_{n\to\infty} |T_n - T''|_{\mathscr{H}} = 0.$$

D'ici il résulte, en vertu de la continuité de l'immersion $\mathscr{H}$ dans T_2, que l'on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{\sigma}_{ik,n} - \hat{\sigma}''_{ik}|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

La relation (15), étant valable pour tout $\hat{\sigma}_{ik,n}$, nous obtenons par un passage à la limite, avec le $\varphi \in M$ arbitraire, la relation

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}''_{ik} \, \mathrm{d}X = 0,$$

c'est-à-dire $T'' \in \mathscr{H}_2$.

Lemma 2. *Les sous-espace $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont orthogonaux.*

Démonstration: Pour chaque $T' \in \mathscr{H}_1$ il existe $\mathbf{v}' \in H_M$ et à celui-ci de nouveau une suite des éléments $\varphi_n \in M$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \mathbf{v}'|_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} = 0, \tag{16}$$

en vertu de l'inégalité (45) dans [8]-III.

Suivant la définition de $\mathscr{H}_2$ pour tous les φ_n on a

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_{n,i}}{\partial x_k} \hat{\sigma}''_{ik} \, \mathrm{d}X = 0,$$

si T'' avec les composante $\hat{\sigma}''_{ik}$ appartient dans $\mathscr{H}_2$.

Comme d'après (16) toutes les dérivées de la fonction φ_n convergent dans $L_2(\Omega)$ vers les dérivées correspondantes (généralisées) de la fonction $\mathbf{v}'$, par le passage à la limite on obtient

$$(T', T'') = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}(\mathbf{v}') \hat{\sigma}''_{ik} \, \mathrm{d}X = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}''_{ik} \, \mathrm{d}X = 0.$$

Théorème 2. (Le principe de Castigliano pour les tensions modifiées.) *Soit l'instant $t \in J$ fixe. Définissons dans l'espace $\mathscr{T}_2$ des tenseurs T la fonctionelle quadratique*

$$\psi_t(T) \equiv \tfrac{1}{2}(T, T) - (T, T(\mathbf{f}(t))), \tag{17}$$

$$(T, T) \equiv \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \hat{\sigma}_{ik}\, \varepsilon_{ik}(\hat{\sigma}_{jl})\, \mathrm{d}X,$$

$$(T, T(\mathbf{f})) \equiv \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \hat{\sigma}_{ik}\, \varepsilon_{ik}(\mathbf{f}(t))\, \mathrm{d}X,$$

où $T \in \mathscr{T}_2$, $\varepsilon_{ik}(\hat{\sigma}_{jl})$ est défini par la formule (12),

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{f}(t)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i(t)}{\partial x_k} + \frac{\partial f_k(t)}{\partial x_i}\right)$$

et $\mathbf{f}(t) \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ est un vecteur donné des déplacements.

Alors on a

$$\psi_t(T_0) < \psi_t(T) \quad pour \quad |T - T_0|_{\mathscr{T}_2} > 0,$$

si T se conforme à la condition (4) et $T_0 \equiv T(\mathbf{u}_0(t))$ représente le tenseur des tensions modifiées correspondant à la solution $\mathbf{u}_0(t)$ du problème mixte pour l'instant donné d'après (5).

Démonstration: Dans la suite supprimons le signe de la dépendance de t. D'après le théorème 4 de [8]-III, il existe une solution $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ du problème mixte aux limites qui accomplit au sens de (4) les équations d'équilibre et les conditions aux limites statiques. Notons $T(\mathbf{u}_0)$ le tenseur correspondant des tensions modifiées $\hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{u}_0)$.

$T \in \mathscr{H}$ soit un tenseur arbitraire satisfaisant aussi au sens (4) aux conditions d'équilibre à l'intérieur même sur la surface du corps. Alors il est évident, d'après la définition de $\mathscr{H}_2$, que

$$T^{(2)} \equiv T - T(\mathbf{u}_0) \in \mathscr{H}_2.$$

Si on pose $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f} + \mathbf{v}_0$, on peut décomposer $T(\mathbf{u}_0)$ en

$$T(\mathbf{u}_0) = T(\mathbf{f}) + T(\mathbf{v}_0).$$

Comme $\mathbf{v}_0 \in H_M$ satisfait aux conditions homogènes géométriques aux limites, nous avons $T(\mathbf{v}_0) \in \mathscr{H}_1$ et par conséquent

$$|T - T(\mathbf{f})|_{\mathscr{H}}^2 = |T(\mathbf{v}_0) + T^{(2)}|_{\mathscr{H}}^2 = |T(\mathbf{v}_0)|_{\mathscr{H}}^2 + |T^{(2)}|_{\mathscr{H}}^2 \geqq |T(\mathbf{v}_0)|_{\mathscr{H}}^2, \tag{18}$$

où le signe d'égalité vaut précisément quand

$$|T^{(2)}|_{\mathscr{H}} = |T - T(\mathbf{u}_0)|_{\mathscr{H}} = 0.$$

La relation $|T - T_0|_{\mathcal{T}_2} > 0$ est équivalente à la relation $|T - T_0|_{\mathcal{H}} > 0$, d'où il résulte le signe d'inégalité dans (18).

Nous avons ensuite

$$|T - T(\mathbf{f})|^2_{\mathcal{H}} = (T, T) - 2(T, T(\mathbf{f})) + (T(\mathbf{f}), T(\mathbf{f})) = 2\psi_t(T) + \\ + |T(\mathbf{f})|^2_{\mathcal{H}} > |T(\boldsymbol{u}_0) - T(\mathbf{f})|^2_{\mathcal{H}} = 2\psi_t(T(\boldsymbol{u}_0)) + |T(\mathbf{f})|^2_{\mathcal{H}}$$

et d'ici on obtient l'affirmation du théorème 2.

Remarque 2. Si $\hat{\sigma}_{ik}(x)$ représente la solution classique des équations d'équilibre qui satisfait aux conditions aux limites statiques du problème équivalent (c'est-à-dire possédant les dérivées premières continues dans $\bar{\Omega}$), alors on peut remplacer la fonctionelle $(T, T(\mathbf{f}))$ par une intégrale habituelle de surface, car

$$(T, T(\mathbf{f})) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik} \, \mathrm{d}X = \sum_{i,k=1}^{3} \left(\int_\Gamma f_i \nu_k \hat{\sigma}_{ik} \, \mathrm{d}S - \int_\Omega f_i \frac{\partial \hat{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} \, \mathrm{d}X \right) = \\ = \int_{\Gamma_{\mathrm{I}}} \sum_{i,k=1}^{3} f_i \nu_k \hat{\sigma}_{ik} \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{\mathrm{II}}} \sum_{i=1}^{3} f_i p_i^* \, \mathrm{d}S - \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega f_i \mathcal{F}_i^* \, \mathrm{d}X$$

où les deux derniers termes ne dépendent plus de $\hat{\sigma}_{ik}$ et on peut l'omettre.

Remarque 3. Il faut naturellement compter les tensions effectives σ_{ik} à l'aide des tensions modifiées d'après la formule (voir (5))

$$\sigma_{ik}(X, t) = G_t \, \hat{\sigma}_{ik}(X, \tau) \equiv G(t) \, \hat{\sigma}_{ik}(X, t) - \int_0^t \hat{\sigma}_{ik}(X, \tau) \, \frac{\partial}{\partial \tau} \, \mathcal{G}(t, \tau) \, \mathrm{d}\tau \,,$$

donc on doit connaître le cours des tensions modifiées dans tout l'intervalle précédent du temps. Dans cela consiste une différence importante entre les deux principes extremaux formulés dans les théorèmes 1 et 2, car du principe du théorème 1 on obtient directement le vecteur effectif des déplacements $\boldsymbol{u}_0(t)$, sans connaître l'histoire des déformations ou des tensions dans le corps. Par cela le théorème 1 diffère du principe analogue de [11].[2])

4. LES ÉVALUATIONS BILATÉRALES DES ERREURS DES SOLUTIONS APPROXIMATIVES OBTENUES PAR LES MÉTHODES VARIATIONNELLES

Dans les calculs pratiques, on peut exploiter les deux théorèmes 1 et 2 simultanément pour l'apprèciation de l'erreur de la solution approximative obtenue selon le théorème 1 par la méthode de Ritz ou selon le théorème 2 par la méthode (généralisée) de Trefftz (comparer [9]).

[2]) Le théorème 2 aussi diffère (par l'emploi des tensions modifiées) du principe analogue dans [11].

Soit

(19) $$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{f} + \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{f} + \mathbf{v}_n$$

l'approximation de Ritz minimalisant la fonctionelle $\Phi_t(\mathbf{u})$ du théorème 1 sur l'ensemble n-dimensionnel des éléments de $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ engendré par n éléments linéairement indépendants $\mathbf{v}^{(i)} \in H_M$ et la fonction donnée $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$, à l'aide des combinations linéaires de la forme (19).

Soit

(20) $$T^{(m)} = \tilde{T} + \sum_{j=1}^{m} a_j T_j$$

l'approximation de Trefftz minimalisant la fonctionelle $\psi_t(T)$ du théorème 2 sur l'ensemble m-dimensionnel de $\mathscr{T}_2$, qui obtenu à partir de m éléments linéairement indépendants $T_j \in \mathscr{H}_2$ et du tenseur $\tilde{T} \in \mathscr{T}_2$ satisfaisant à la condition (4), par les combinations linéaires de la forme (20).

Evaluons d'abord l'erreur $|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}_0|_{H_M}$ de l'approximation de Ritz, où $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_0(t)$ représente la solution exacte du problème aux limites. Si on emploie les relations $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f} + \mathbf{v}_0$ et (9) pour $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$, $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_0$, on a

$$|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}_0|^2_{H_M} = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0|^2_{H_M} = \Phi(\mathbf{v}_n) + |\mathbf{v}_0|^2_{H_M} .$$

Suivant les définitions des produits scalaires dans $\mathscr{H}$ et dans H_M, il résulte que

(21) $$|\mathbf{v}_0|^2_{H_M} = |T(\mathbf{v}_0)|^2_{\mathscr{H}}$$

et en employant l'inégalité (18) pour $T = T^{(m)}$ on obtient

(22) $$|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}_0|^2_{H_M} \leqq \Phi(\mathbf{v}_n) + |T^{(m)} - T(\mathbf{f})|^2_{\mathscr{H}}$$

Comme

$$\Phi(\mathbf{v}_n) = 2\Phi_t(\mathbf{u}^{(n)}) + 2(\mathbf{f}, \mathbf{p}^*) - 2(\mathbf{f}, \mathscr{F}^*) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$$

(voir la démonstration du théorème 1), et

$$|T_m - T(\mathbf{f})|^2_{\mathscr{H}} = 2\psi_t(T^{(m)}) + |T(\mathbf{f})|^2_{\mathscr{H}} , \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = |T(\mathbf{f})|^2_{\mathscr{H}} ,$$

on peut écrire l'inégalité dernière sous la forme

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}_0|^2_{H_M} &\leqq 2[\Phi_t(\mathbf{u}^{(n)}) + \psi_t(T_m) + (\mathbf{f}, \mathbf{p}^*) - (\mathbf{f}, \mathscr{F}^*)] = \\ &= \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{u}^{(n)}) + \hat{\sigma}_{ik}^{(m)} \varepsilon_{ik}(\hat{\sigma}_{jk}^{(m)}) - 2\hat{\sigma}_{ik}^{(m)} \varepsilon_{ik}(\mathbf{f}) \right) \mathrm{d}X + \\ &+ 2\sum_{i=1}^{3} \left(\int_\Omega (u_i^{(n)} - f_i) \mathscr{F}_i^* \,\mathrm{d}X - \int_{\Gamma_{11}} (u_i^{(n)} - f_i)\, p_i^* \,\mathrm{d}S \right). \end{aligned}$$

Nous obtenons la même évaluation aussi pour la norme $|T^{(m)} - T(\mathbf{u}_0)|_{\mathscr{H}}$, parce que, suivant (18), pour $T = T^{(m)}$, $T^{(2)} = T^{(m)} - T(\mathbf{u}_0)$ nous avons

$$|T^{(m)} - T(\mathbf{u}_0)|_{\mathscr{H}}^2 = |T^{(m)} - T(\mathbf{f})|_{\mathscr{H}}^2 - |T(\mathbf{v}_0)|_{\mathscr{H}}^2$$

et suivant (21) et (9)

$$-|T(\mathbf{v}_0)|_{\mathscr{H}}^2 = -|\mathbf{v}_0|_{H_M}^2 \leqq \Phi(\mathbf{v}_n),$$

donc

$$|T^{(m)} - T(\mathbf{u}_0)|_{\mathscr{H}}^2 \leqq \Phi(\mathbf{v}_n) + |T^{(m)} - T(\mathbf{f})|_{\mathscr{H}}^2$$

comme dans (22) et on peut décomposer le second membre de la manière déjà citée.

Remarque 4. Dans les cas singuliers dont nous avons parlé à la fin de la démonstration du théorème 4 dans [8]-III, les théorèmes 1 et 2, les lemmes, définitions et remarques cités valent avec la différence que les fonctions $\varphi \in M$, la solution $\mathbf{u}_0$ et les forces extérieures satisfont aux conditions complétantes (voir [8]). En même temps, on peut poser $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$, car la partie Γ_1 de la frontière manque.

Remarque 5. Pour le problème premier, second ou contact (voir [8]-I-II-III) tous les théorèmes, lemmes, définitions et remarques cités ici sont valables avec la différence que nous remplaçons l'espace H_M par l'espace $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}(\Omega)$ dans le premier problème, par H_Q dans le second et par H_R dans le problème contact. Les conditions aux limites se réduisent naturellement au seul type correspondant.

Littérature

[1] *Л. М. Качанов:* Теория ползучести. Москва 1960.

[2] *С. А. Шестериков:* Об одном вариационном принципе в теории ползучести. Изв. АН СССР, о.т.н., 8 (1956).

[3] *M. A. Biot:* Variational and Lagrangian methods in visco-elasticity, Deformation and Flow of Solids. Springer 1955.

[4] *A. M. Freudenthal, H. Geiringer:* The mathematical theories of the inelastic continuum. Handbuch der Physik, VI. Springer 1958.

[5] *E. T. Onat:* On a variational principle in linear viscoelasticity. Journal de Mécanique, vol. 1, 2 (1962).

[6] *M. E. Gurtin:* Variational principles in the linear theory of viscoelasticity. Archive Rational Mech. Anal. 13, 3, 179 (1963).

[7] *Н. Х. Арутюнян:* Некоторые вопросы теории ползучести. Москва 1952.

[8] *I. Hlaváček, M. Predeleanu:* Sur l'existence et l'unicité de la solution dans la théorie du fluage linéaire. I. Premier problème aux limites. Aplikace matematiky 9 (1964), 321—327. II. Second problème aux limites. Aplikace matematiky 10 (1965), 391—398. III. Le problème contact et mixte, Aplikace matematiky 11 (1966), 199—210.

[9] *С. Г. Михлин:* Вариационные методы в математической физике. Москва 1957.

[10] *R. A. Schapery:* Irreversible thermodynamics and variational principles with applications to viscoelasticity. Aero. Research Labs., Wright-Patterson Air Force Base, ARL 62—418 (1962).

[11] *М. А. Задоян:* О вариационных уравнениях теории ползучести. ДАН Армянской ССР 26 (1958), 5, 263—268.

Výtah

O NĚKTERÝCH VARIAČNÍCH VĚTÁCH V TEORII LINEÁRNÍ REOLOGIE

IVAN HLAVÁČEK

V článku se odvozují ryze matematickou cestou z dříve formulovaných okrajových úloh (viz [8]) dvě variační věty, analogické minimálním principům Lagrangea a Castigliana v klasické teorii pružnosti.

Využívá se přitom ekvivalence úlohy reologie s úlohou teorie pružnosti pro pevný okamžik, která plyne z předpokladu (3) o neproměnnosti koeficientu příčné kontrakce v čase.

1. variační věta je téměř bezprostředním důsledkem dříve užívané definice slabého řešení okrajových úloh.

2. variační věta se dokazuje metodou ortogonálních projekcí (viz [9]). V posledním odstavci se ukazuje, jak lze obou vět zároven využít k odhadu chyb přibližných řešení, získaných variačními metodami.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ТЕОРЕМАХ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

ИВАН ГЛАВАЧЕК (IVAN HLAVÁČEK)

В статье выведены математическим путем на основании раньше сформулированных краевых задач (см. [8]) две вариационные теоремы, аналогичные минимальным принципам Лагранжа и Кастильяна в классической теории упругости.

При этом используется эквивалентность между задачей ползучести и задачей теории упругости, которая вытекает из предположения (3) о неизменяемости со временем коэффициента поперечного сжатия.

1-ая вариационная теорема является почти прямым следствием введенного раньше определения обобщенного решения краевой задачи. 2-ая теорема доказывется методом ортогональных проекций (см. [9]). В конце работы показано, каким образом можно одновременно пользоваться обеими теоремами для двусторонних оценок погрешностей приближенных решений, полученных вариационными методами.

Adresse de l'auteur: Inž. *Ivan Hlaváček* C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.