Zdislav Kovářík

Zrychlování konvergence lineárních iteračních procesů v Banachových prostorech

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 4, 266–270

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103028

ZRYCHLOVÁNÍ KONVERGENCE LINEÁRNÍCH ITERAČNÍCH PROCESŮ V BANACHOVÝCH PROSTORECH

ZDISLAV KOVÁŘÍK

(Došlo dne 5. července 1965.)

Při řešení rovnice $x = Ax + b$ iteracemi je možno využít znalostí rozkladu operátoru A k urychlení konvergence posloupnosti postupných aproximací. Zvláštní případy (v konečněrozměrném prostoru) níže popsaných metod jsou uvedeny v [1], str. 570 a v [2], str. 254. V této práci je věnována pozornost zobecnění Ljusternikovy metody. Tvrzení mají asi tento tvar: Známe-li několik co do absolutní hodnoty největších vlastních čísel operátoru A (lhostejno, jaké násobnosti) a je-li počáteční aproximace ještě dosti daleko od řešení rovnice, existuje vzorec, pomocí něhož lze po dostatečně mnoha iteracích získat aproximaci, bližší přesnému řešení než několik následujících iterací.

X značí Banachův prostor, 0 současně číslo nula, nulový vektor a nulový operátor, $\|.\|$ normu v X, I identický operátor. Ostatní označení, pokud nejsou všeobecně známá, budou vysvětlena na příslušném místě.

V celém článku A je lineární operátor, pro který platí $A = \sum_{i=1}^{k} \mu_i E_i + B$, kde $E_i^2 = E_i$, $E_i E_j = 0$ pro $i \neq j$, $AE_i = E_i A = \mu_i E_i$, $\mu_i \neq 1$, $r(B) < \min_i |\mu_i|$ $(i, j = 1, \ldots, k)$, přitom $r(B)$ značí spektrální poloměr operátoru B.

Předpokládáme, že B, E_i a $(I - A)^{-1}$ jsou omezené lineární operátory, μ_i obecně komplexní čísla.

Označme $x = (I - A)^{-1} b$, kde $b \in X$. Budiž dále $x_0 \in X$, $x_{n+1} = Ax_n + b$ pro $n = 0, 1, \ldots$ Budiž s přirozené číslo, $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i \lambda^i$ polynom stupně nejvýše s takový, že

$$P(\mu_i) = \frac{1}{1 - \mu_i} \quad (i = 1, \ldots, k) . \tag{1}$$

Věta 1. *Pro* $m = 0, 1, \ldots$ *položme* $\bar{x}_m = x_m + \alpha_0(x_{m+1} - x_m) + \ldots + \alpha_s(x_{m+s+1} - x_{m+s})$. *Nechť* $E_{i_0}(x_0 - x) \neq 0$ *aspoň pro jedno* i_0, $1 \leqq i_0 \leqq k$.

Pak ke každému přirozenému číslu p *existuje takové* $m_0(p) = O(p)$, *že pro všechna* $m \geqq m_0(p)$ *platí*

$$\|\bar{x}_m - x\| \leqq \|x_{m+p} - x\| . \tag{2}$$

Důkaz. Z předpokladů plyne, že $E_i B = BE_i = 0$. Pro $m \geqq 1$ platí

$$A^m = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^m E_i + B^m$$

$$P(A)\, A^m = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j \Big(\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{j+m} E_i + B^{j+m} \Big) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^m\, P(\mu_i)\, E_i + B^m\, P(B)\,.$$

Označme $\varepsilon_m = x_m - x$, $\bar{\varepsilon}_m = \bar{x}_m - x$. Je pak

$$\varepsilon_m = A^m \varepsilon_0 = \Big(\sum_{i=1}^{k} \mu_i^m E_i + B^m \Big)\, \varepsilon_0\,,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_m &= \varepsilon_m + \sum_{j=0}^{s} \alpha_j (\varepsilon_{m+j+1} - \varepsilon_{m+j}) = A^m \varepsilon_0 + \sum_{j=0}^{s} \alpha_j (A^{m+j+1} - A^{m+j})\, \varepsilon_0 = \\
&= (A^m - (I - A)\, P(A)\, A^m)\, \varepsilon_0 = \\
&= \Big[\sum_{i=1}^{k} \mu_i^m (1 - (1 - \mu_i)\, P(\mu_i))\, E_i + B^m (I - (I - B)\, P(B)) \Big]\, \varepsilon_0 = \\
&= B^m (I - (I - B)\, P(B))\, \varepsilon_0
\end{aligned}$$

vzhledem k (1).

Označme $\|x\|_1 = \sum_{j=0}^{k} \|E_j x\|$, kde $E_0 = I - \sum_{j=1}^{k} E_j$. Z $x = \sum_{j=0}^{k} E_j x$ plyne

$$\|x\| \leqq \|x\|_1 \leqq K \|x\|\,, \tag{3}$$

kde $K = \sum_{j=0}^{k} \|E_j\|$.

Odhadněme normy chyb:

$$\|\varepsilon_{m+p}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |\mu_i|^{m+p}\, \|E_i \varepsilon_0\|_1 + \|B^{m+p} \varepsilon_0\|_1 \geqq |\mu_{i_0}|^{m+p}\, \|E_{i_0} \varepsilon_0\|\,,$$

to jest

$$K^{-1} |\mu_{i_0}|^{m+p}\, \|E_{i_0} \varepsilon_0\| \leqq \|\varepsilon_{m+p}\|\,, \tag{4}$$

$$\|\bar{\varepsilon}_m\| \leqq \|B^m\| \,.\, \|I - (I - B)\, P(B)\| \,.\, \|\varepsilon_0\|\,. \tag{5}$$

Protože $r(B) < |\mu_{i_0}|$, je $\lim_m \|B^m\| / |\mu_{i_0}|^m = 0$. Vezmeme-li $m_0(p) \geqq 1$ tak velké, aby pro všechna $m \geqq m_0(p)$ platilo

$$\frac{\|B^m\|}{|\mu_{i_0}|^m} \leqq \frac{|\mu_{i_0}|^p\, \|E_{i_0} \varepsilon_0\|}{K \,.\, \|\varepsilon_0\| \,.\, \|I - (I - B)\, P(B)\|}\,,$$

bude podle (4), (5) vyhověno vztahu (2). Přitom můžeme zvolit $m_0(p) = O(p)$. QED.

Poznámka 1. Jestliže $S(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \ldots (\lambda - \mu_k)$, pak $P(\lambda) = (S(1) - S(\lambda)) : : ((1 - \lambda)\, S(1)) + Q(\lambda)\, S(\lambda)$, kde Q je vhodný (třeba nulový) polynom. Ke konstrukci P stačí tedy znát algebraickou rovnici, jíž vyhovují všechna μ_i, a není nutno ji řešit.

Poznámka 2. V početní praxi se nejčastěji setkáváme s případy $k = 1$, μ_1 reálné, nebo $k = 2$, $\mu_1 = \bar{\mu}_2$, resp. $\mu_1 = -\mu_2$. Polynomy P minimálního stupně pak mají koeficienty $\alpha_0 = 1/(1 - \mu_1)$ nebo $\alpha_0 = p/(1 + p + q)$, $\alpha_1 = 1/(1 + p + q)$, kde $-p = \mu_1 + \mu_2$, $q = \mu_1\mu_2$. Obvykle $|\mu_i| < 1$.

Poznámka 3. Z důkazu vidíme, že proces popsaný ve větě 1 dá přesné řešení po konečně mnoha krocích, je-li operátor B nilpotentní (to jest existuje r tak, že $B^r = 0$), například je-li AX konečněrozměrný a μ_i jsou všechna nenulová vlastní čísla operátoru A.

Poznámka 4. Případný vyšší polynomu P nám dává možnost zmenšit normu operátoru $I - (I - B)\,P(B)$, vystupujícího ve výrazu pro $\bar{\varepsilon}_m$. Pro $k = 0$, $s \geqq 1$ nese tato metoda jméno M. K. GAVURINA, pro $k = s + 1 = 1$ nebo 2 jméno L. A. LJUSTERNIKA (viz např. [2]).

Je-li μ_1 blízké číslu 1, je vhodný vzorec $\bar{x}_m = x_m + (1 - \mu_1^r)^{-1}\,(x_{m+r} - x_m)$ apod., odpovídající iteraci s operátorem A^r.

V následující větě ukážeme, že ke zrychlení konvergence stačí dostatečně dobrá přibližná znalost polynomu P.

Věta 2. *Nechť posloupnost $\{P_m\}$ polynomů stupně nejvýše s má tyto vlastnosti: Existuje okolí U_1 spektra operátoru B a okolí U_2 konečné množiny $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ tak, že posloupnost $\{P_m\}$ je stejnoměrně omezená na U_1 a*

$$|(P_m(\lambda) - P(\lambda)| = o((\min_i |\mu_i|/\max_i |\mu_i|)^m) \tag{6}$$

stejnoměrně na U_2.

Označme $P_m(\lambda) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{jm}\lambda^j$ a $\tilde{x}_m = x_m + \alpha_{0m}(x_{m+1} - x_m) + \ldots + \alpha_{sm}(x_{m+s+1} - - x_{m+s})$. Nechť $E_{i_0}(x_0 - x) \neq 0$ aspoň pro jedno i_0, $1 \leqq i_0 \leqq k$.

Pak ke každému p existuje $m_0(p)$ tak, že pro všechna $m \geqq m_0(p)$ platí

$$\|\tilde{x}_m - x\| \leqq \|x_{m+p} - x\|\,. \tag{7}$$

Důkaz. Pro $\tilde{\varepsilon}_m = \tilde{x}_m - x$ a pro $m \geqq 1$ platí

$$\tilde{\varepsilon}_m = \Big(\sum_{i=1}^{k} \mu_i^m(1 - (1 - \mu_i)\,P_m(\mu_i))\,E_i + B^m(I - B)\,P^m(B)\Big)\,\varepsilon_0\,.$$

Označme $K_1 = \min_i |\mu_i|$, K_2 libovolné číslo z intervalu $(r(B), K_1)$, $K_3 = \max_i |\mu_i|$, $K_4 = \sum_{i=1}^{k} |1 - \mu_i|\,\|E_i\|$, $K_5 = \sup_m \|I - (I - B)\,P_m(B)\|$, $\eta_m = \sup\{|P_m(\lambda) - P(\lambda)| : : \lambda \in U_2\}$.

Pak $\eta_m(K_3/K_1)^m = o(1)$, $K_5 < +\infty$. Existuje m_1 tak, že pro všechna $m \geqq m_1$ platí $\|B^m\| < K_2^m$ (plyne to z (6) a z [3], kap. VII) a tedy

$$\|\tilde{\varepsilon}_m\| \leqq (K_4K_3^m\eta_m + K_5K_2^m)\,\|\varepsilon_0\|\,, \tag{8}$$

$$\|\varepsilon_{m+p}\| \geqq K^{-1}K_1^{m+p}\|E_{i_0}\varepsilon_0\|\,. \tag{9}$$

Stačí zvolit $m_0(p) \geqq m_1$, $m_0(p) \geqq 1$, tak, aby pro všechna $m \geqq m_0(p)$ platilo

$$(K_4\eta_m(K_3/K_1)^m + K_5(K_2/K_1)^m)\,\|\varepsilon_0\| \leqq K^{-1}\|E_{i_0}\varepsilon_0\|\,K_1^p\,,$$

a pak vzhledem k (8), (9) bude platit (7), neboť limita levé strany poslední nerovnosti je nula. QED.

Poznámka 5. Známe-li posloupnosti $\{\mu_{1m}\}, \ldots, \{\mu_{km}\}$ $(\mu_{im} \neq 1)$ konvergující pořadě k $\mu_1, \ldots, \mu_k$, pak posloupnost $S_m(\lambda) = (\lambda - \mu_{1m}) \ldots (\lambda - \mu_{km})$ konverguje lokálně stejnoměrně k S z poznámky 1 a požadovanou posloupnost $P_m(\lambda)$ můžeme volit např. takto: $P_m(\lambda) = (S_m(1) - S_m(\lambda))/((1 - \lambda)\,S_m(1)) + Q(\lambda)\,S_m(\lambda)$.

Poznámka 6. Předpoklad „$E_{i_0}(x_0 - x) \neq 0$ aspoň pro jedno i_0, $1 \leqq i_0 \leqq k$“ se ověřuje nesnadno. Je-li splněn, pak zrychlení konvergence nastává z té příčiny, že $\|\tilde{\varepsilon}_m\| = o(K_1^m)$ (v označení důkazu věty 2). Není-li splněn, tj. $E_i(x_0 - x) = 0$ pro všechna i, pak ze vzorců $\varepsilon_m = B^m\varepsilon_0$, $\tilde{\varepsilon}_m = B^m(I - (I - B)\,P_m(B))\,\varepsilon_0 = (I - (I - B)\,P_m(B))\,\varepsilon_m$, $r(B) < K_1$ a konečně $\|I - (I - B)\,P_m(B)\| = O(1)$ vidíme, že chyba $\tilde{\varepsilon}_m$ není asymptoticky horší než ε_m (má totiž stejný řád $o(K_1^m)$).

V praxi vlivem různých chyb (zaokrouhlovacích nebo vzniklých náhradou funkce polynomem atd.) se obvykle aspoň jeden ze zmíněných průmětů počáteční chyby stane nenulovým a pak jeho podíl na celkové chybě roste s rostoucím m.

Poznámka 7. Nechť $X = E^n$. Uvědomme si, že $x_{m+1} - x_m = A^m(x_1 - x_0)$. V literatuře ([1], [2]) je uvedeno, jak lze tohoto faktu využít k přibližnému určení převládajícího vlastního čísla, resp. páru komplexně sdružených vlastních čísel. Řád aproximace, je aspoň takový, jaký vyžaduje předpoklad (6) věty 2.

Volíme-li $\mu_{1m}^{(j)} = (x_{m+2} - x_{m+1})^{(j)}/(x_{m+1} - x_m)^{(j)}$ (j značí pořadí složky vektoru z E^n), dostáváme (zde $s = 0$, $k = 1$) $\tilde{x}^{(j)} = (x_m^{(j)}x_{m+2}^{(j)} - (x_{m+1}^{(j)})^2)/(x_m^{(j)} + x_{m+2}^{(j)} - 2x_{m+1}^{(j)})$, tj. Aitkenův δ^2-proces. Zde je malá licence: každé složce vektoru x_m přiřazujeme jinou posloupnost polynomů $P_m^{(j)}(\lambda) = 1/(1 - \mu_{1m}^{(j)})$.

Závěr. Operátory připouštějící částečný rozklad dříve popsaný, se v aplikacích často vyskytují. Názorně řečeno, jde o existenci kruhu o středu v počátku, v jehož vnějšku leží jen izolované body spektra daného operátoru. Speciálně tam patří všechny kompaktní operátory, operátory tvaru $\alpha I + K$, kde K je kompaktní a $|\alpha|$ je dostatečně malá (podle [3], kap. VII), a ještě například konečné lineární kombinace navzájem komutujících omezených projektorů (pokud ovšem 1 nepatří do spektra uvažovaného operátoru a zmíněné body mají index 1).

Příkladem nekompaktního operátoru posledního typu je v prostoru $L^2(-\infty, +\infty)$ integrální operátor A s jádrem

$$K(x, t) = \frac{1 - \cos a(x - t)}{\pi(x - t)}\,(a > 0)\,.$$

Důkaz. Označme T operátor Fourierovy transformace, B operátor násobení funkcí $i\chi_{\langle -a,0\rangle}(x) - i\chi_{\langle 0,a\rangle}(x)$. Výpočtem se přesvědčíme, že $T^{-1}BT = A$, tj. A a B mají stejná spektra, a spektrum operátoru B je $\{0; i; -i\}$. Přitom projektor $E(-i)$

operátoru B promítá $L^2(-\infty, +\infty)$ na prostor izomorfní s $L^2(0, a)$, a ten má nekonečnou dimenzi, takže ani B ani A není kompaktní. QED.

Literatura

[1] *D. K. Faddějev, V. N. Fadděјevová:* Numerické metody lineární algebry; SNTL, Praha 1964 (překlad z ruštiny).
[2] *И. С. Березин, Н. П. Жидков:* Методы вычислений, т. II; ФИЗМАТГИЗ, Москва 1962.
[3] *Н. Данфорд, Дж. Шварц:* Линейные операторы (общая теория); ИИЛ, Москва 1962 (перевод с английского).

Резюме

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

ЗДИСЛАВ КОВАРЖИК (ZDISLAV KOVÁŘÍK)

В настоящей работе дается обобщение метода Л. А. Люстерника для ускорения сходимости итеративных процессов типа $x_{n+1} = Ax_n + b$, где x_n, b — элементы пространства Банаха, A — ограниченный линейный оператор, спектр которого не содержит 1. Если известна оркужность с центром в началае, вне которой лежат лишь известные нам изолированные точки спектра A, то определенная в работе линейная комбинация нескольких x_n дает асимптотически лучщую оценку точного решения уравнения $x = Ax + b$, чем обычные аппроксимации.

Summary

CONVERGENCE ACCELERATION OF LINEAR ITERATIVE PROCESSES IN BANACH SPACES

ZDISLAV KOVÁŘÍK

A generalization of Lusternik's method for accelerating the convergence of the iterative approximations $x_{n+1} = Ax_n + b$ to the solution x of $x = Ax + b$ is given. Here x, x_n, b are elements of a Banach space, A is a bounded linear operator from this space into itself such that $(I - A)^{-1}$ is bounded. If a finite set of isolated dominant eigenvalues of A is known, then for any fixed p and sufficiently large n there can be constructed a linear combination $\bar{x}_n$ of $x_n, \ldots, x_{n+s+1}$ which is, in general, nearer to x than x_{n+p}.

Adresa autora: Zdislav Kovářík, Katedra matematiky PF UPJŠ, Nám. Februárového víťazstva 9, Košice.