

Aplikace matematiky

Ondrej Gallo

Vlastnosti niektorých obalových skrutkových plôch

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 2, 147–153

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103009>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VLASTNOSTI NIEKTORÝCH OBALOVÝCH SKRUTKOVÝCH PLŔCH

ONDREJ GALLO

(Došlo dňa 1. septembra 1964.)

Uvažujme skrutkovú plochu Φ , ktorá vznikne ako obalová plocha pri skrutkovom pohybe rozvinuteľnej priamkovej plochy φ ak je daná os o , parameter v_0 a zmysel skrutkového pohybu. Rozvinuteľná priamková plocha φ (tvoriaca plocha) sa dotýka skrutkovej plochy Φ pozdĺž nejakej priestorovej čiary e – ktorú nazývame *charakteristikou* plochy. Charakteristika plochy má tú vlastnosť, že skrutkovým pohybom charakteristiky e , pri danom skrutkovom pohybe, vznikne tá istá skrutková plocha Φ ako pri skrutkovom pohybe tvoriacej priamkovej plochy φ . Stačí preto zostrojiť charakteristiku obalovej skrutkovej plochy a vieme, nielen zobrazíť plochu Φ , ale riešiť aj niektoré ďalšie úlohy.

Charakteristiku e môžeme obecné pokladať aj za prienikovú čiaru dvoch „súmedzných“ polôh skrutkujúcej rozvinuteľnej priamkovej plochy.

Prv, ako si povieme, ako zostrojíme body charakteristiky e , prevedieme nasledujúce úvahy. Každá tvoriaca priamka priamkovej plochy φ pri danom skrutkovom pohybe vytvorí nejakú skrutkovú priamkovú plochu ψ . Skrutková plocha Φ je potom obalovou plochou skrutkových plôch ψ . Podobne môžeme tvoriacu priamkovú plochu φ považovať za obalovú plochu jej dotykových rovín τ .

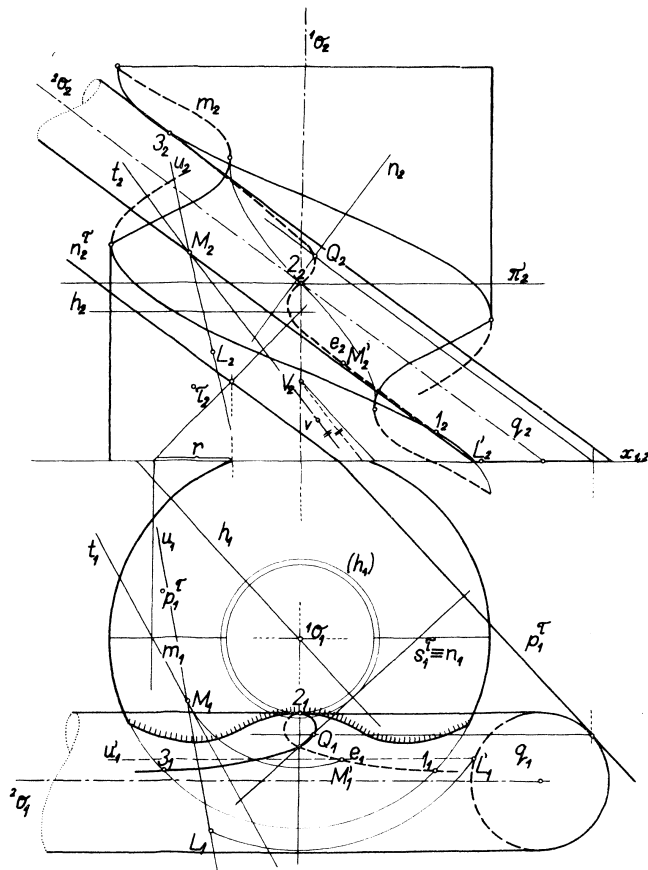
Skrutkovým pohybom týchto rovín vzniknú rozvinuteľné priamkové skrutkové plochy η (skrutkový torzus) a plocha Φ je zase obalovou plochou týchto rozvinuteľných skrutkových priamkových plôch.

Pre každú rozvinuteľnú priamkovú skrutkovú plochu η vieme určiť charakteristiku s , t.j. tú priamku roviny τ , skrutkovým pohybom ktorej vznikne ten istý skrutkový torzus, ako skrutkovým pohybom roviny τ . Toho využijeme pri konštrukcii bodov charakteristiky e obalovej skrutkovej plochy Φ .

Bod charakteristiky e , na ľubovoľnej tvoriacej priamke q plochy φ , zostrojíme tak, že zostrojíme dotykovú rovinu τ , ktorá sa plochy φ dotýka pozdĺž zvolenej priamky q (u hranatých berieme za rovinu τ rovinu steny). Priesečník priamky s (charakteristika v rovine τ) a tvoriacej priamky q plochy φ je už bodom charakteristiky e . Predchádzajúce úvahy môžeme zhrnúť do nasledujúcej vety.

Veta 1. *Body charakteristiky e obalových skrutkových plôch, ktoré vzniknú skrutkovým pohybom rozvinuteľných priamkových plôch φ , sú priesečníkmi tvo-*

riacich priamok q plochy φ s charakteristikami s skrutkových torzov, vytvorených tým istým skrutkovým pohybom rovín τ , dotýkajúcich sa plochy φ pozdĺž tvoriacich priamok q , alebo rovín stien plochy φ .



Obr. 1.

Pretože rozvinuteľná priamková plocha φ sa dotýka obalovej skrutkovej plochy Φ pozdĺž charakteristiky e , vyplýva z toho, že v bodoch charakteristiky e majú obidve plochy tú istú dotykovú rovinu a normálu. Platí potom nasledujúca veta.

Veta 2. Dotyková rovina plochy Φ v bode Q charakteristiky e je dotyková rovina τ rozvinuteľnej priamkovej plochy φ pozdĺž tvoriacej priamky q , predchádzajúcej zvoleným bodom Q .

Normála n plochy Φ v bode Q je kolmica na dotykovú rovinu τ a je súčasne normálou rozvinuteľnej priamkovej plochy φ v bode Q .

V dotykovej rovine τ v bode Q plochy Φ ležia dotyčnice ku všetkým čiaram plochy Φ predchádzajúcim bodom Q , čiže aj ku skrutkovici bodu Q , k charakteristike e a pod. Toho využijeme pozdejšie na zostrojenie dotykovej roviny a normály v obecnom bode obalovej skrutekovej plochy.

V ďalšom si ukážeme praktické zostrojenie charakteristík, zobrazenie časti plôch, dotykovej roviny a špeciálne rezy obalových skrutekových plôch, ktoré vzniknú pri skrutekovom pohybe niektorých jednoduchých rozvinuteľných priamkových plôch.

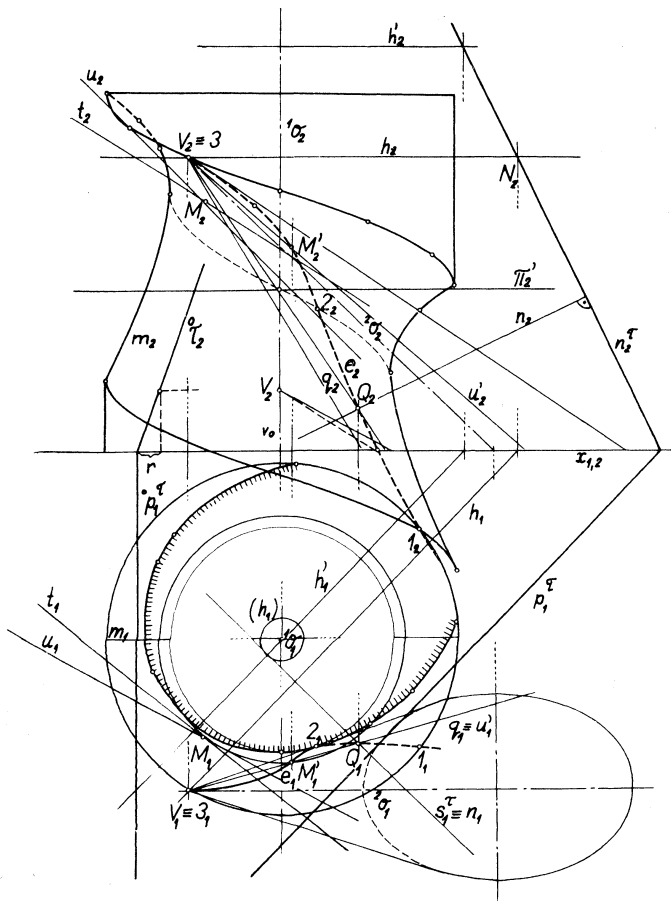
Zvoľme si napr. kruhovú valcovú plochu s osou 2o , os skrutekového pohybu 1o , parameter v_0 a zmysel skrutekového pohybu (obr. 1). Body charakteristiky e , obalovej skrutekovej plochy, ktorá vznikne skrutekovým pohybom zvolenej kruhovej valcovej plochy, budeme zostrojovať na jej jednotlivých tvoriacich priamkach pomocou dotykových rovín τ , ktoré obaľujú zvolenú valcovú plochu. Napríklad na povrchu q bod charakteristiky e zostrojíme pomocou dotykovej roviny τ , ktorej pôdorysnú a nárysú stopu vieme zostrojiť. V rovine τ zostrojíme charakteristiku s (tvoriacu priamku) skrutekového torza, ktorý vznikne skrutekovým pohybom roviny τ pri danom skrutekovom pohybe. Pre určenie charakteristiky s musíme si určiť polomer r hrdlovej skrutekovice (h) skrutekového torza. Tento polomer $r = v_0 \cotg \alpha$ (α je odchýlkou roviny τ od priemetne π). V obrázku 1 je polomer r zostrojený pomocou otočenia roviny τ do polohy kolmej na nárysnú. Pôdorysom hrdlovej skrutekovice je potom kružnica (h_1) a jedna z dotyčníc kolmých na p_1^r k tejto kružnici (voľba závisí od zmyslu skrutekového pohybu) je už pôdorysom charakteristiky s . Priesecník Q charakteristiky s a tvoriacej priamky q valcovej plochy je už bodom charakteristiky e . Na obrázku 1 máme zostrojenú iba časť charakteristiky e . Pôdorysom charakteristiky je krivka e_1 , ktorej asymptotou je 2o_1 . Nárysom je zase krivka, ktorá má za asymptoty obrysové povrchy kruhovej valcovej plochy. Na obrázku je zobrazená aj polovička závitú časti obalovej skrutekovej plochy a to tá, ktorá vznikne skrutekovým pohybom časti charakteristiky e medzi bodmi 1 a 3. Ďalej je zostrojený rez plochy a to rovinou $\pi' \perp ^1o$ a osový rez plochy – m , rovinou rovnobežnou s nárysnou.

Dotykovou rovinou plochy v bode Q charakteristiky e je, podľa vety 2, rovina τ , ktorá sa kruhovej valcovej plochy dotýka pozdĺž tvoriacej priamky q . Normála n plochy v bode Q je kolmica na dotykovú rovinu.

Zostrojme ešte dotykovú rovinu plochy v obecnom bode M . Bod M si zvolíme pôdorysom M_1 . Jeho nárys M_2 určíme pomocou skrutekovice bodu M , ktorej pôdorysom je kružnica so stredom v 1o_1 , prechádzajúca bodom M_1 . Pretože obalová skruteková plocha môže vzniknúť aj skrutekovým pohybom charakteristiky e , bod M leží na tej istej skrutekovici ako bod M' charakteristiky e . Využitím tejto vlastnosti už vieme zostrojiť nárys M_2 . V našom prípade je dvojaká možnosť voľby bodu M' na charakteristike e , čo je vyjadrením toho, že bod M môže ležať v dolnej alebo v hornej časti zobrazenej obalovej skrutekovej plochy.

Dotykovú rovinu skrutekovej plochy v bode M určíme tak, že zostrojíme dve rôznobežné priamky, ležiace v tejto dotykovej rovine. Prvou zo spomínaných priamok

je dotyčnica t k skrutkovici bodu M . Druhú zostrojíme na základe nasledujúcej úvahy. Tvoriacia priamka u' kruhovej valcovej plochy leží v dotykovej rovine skrutkovej plochy v bode M' . Body M a M' ležia na tej istej skrutkovici, preto pri danom skrutkovom pohybe ak sa bod M' dostane do bodu M priamka u' prejde do priamky u .



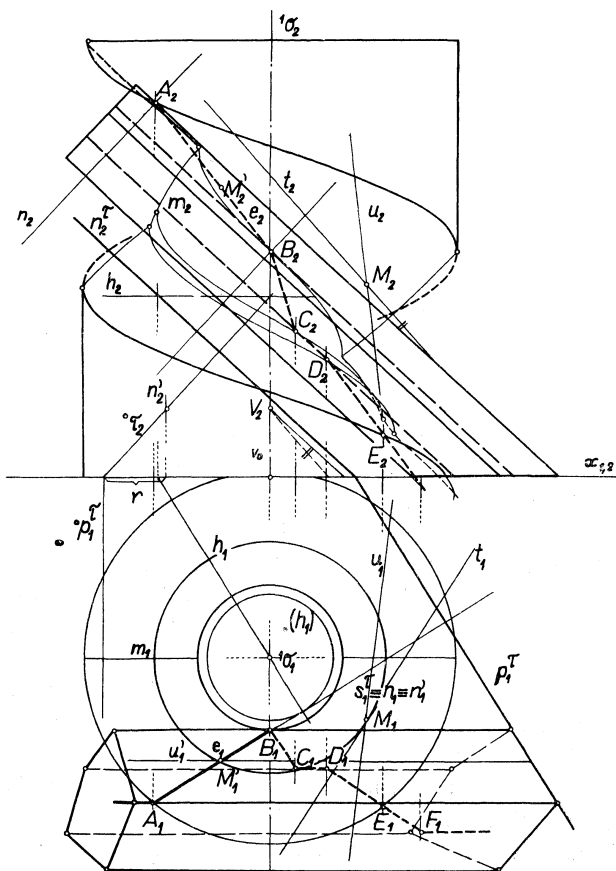
Obr. 2.

Z toho vyplýva, že priamka u musí ležať v dotykovej rovine skrutkovej plochy v bode M , pretože je iba jednou z obecných polôh tvoriacej priamky u' skrutkujúcej valcovej plochy. Dotyková rovina skrutkovej plochy v bode M je potom určená priamkami t , u . Z uvedeného vyplýva nasledujúca veta:

Veta 3. Dotyková rovina v obecnom bode M obalovej skrutkovej plochy, ktorej tvoriacou plochou je rozvinuteľná priamková plocha, je určená dotyčnicou t k stru-

kovici bodu M a priamkou u , ktorá je jednou z príslušných polôh povrchovej priamky u' , tvoriacej plochy φ , ktorá prechádza bodom M' charakteristiky e , ležiacom na tej istej skrutkovici ako bod M .

Podobne ako v predchádzajúcom prípade zostrojíme charakteristiku e aj pre obalovú skrutkovú plochu, ktorá vznikne skrutkovým pohybom rotačnej kužeľovej



Obr. 3.

plochy pri danej osi 1o , parametri v_0 a zmysle skrutkového pohybu (obr. 2). Na obrázku je zobrazená polovička závitú časti spomínanej skrutkovej plochy, zostrojený rez rovinou π' , osový rez, dotyková rovina a normála plochy v bode Q charakteristiky a priamky t, u určujúce dotykovú rovinu v obecnom bode M plochy.

Trocha odlišnou od predchádzajúcich je obalová skrutková plocha, ktorá vznikne pri skrutkovom pohybe hranolovej plochy (obr. 3). Charakteristikou e v tomto

prípade nie je krivka, ale priestorová lomená čiara. Pomocnými rovinami τ pre zostrojenie bodov charakteristiky e sú roviny stien hranolovej plochy. Na obrázku je pomocou roviny τ ukázaná konštrukcia časti charakteristiky e a to úsečka \overline{AB} . Podobne zostrojíme aj ďalšie časti charakteristiky ku ktorej patria aj časti hrán hranolovej plochy, na ktorých ležia body A a F .

Polovica závitú časti obalovej skrutkovej plochy, ktorá je zostrojená na obrázku 3 vznikne skrutkovým pohybom lomenej čiary $ABCDE$. Skrutkovaním úsečiek \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{DE} vzniknú časti rozvinuteľných skrutkových plôch a skrutkovaním úsečky \overline{CD} časť otvorenej klinogonálnej skrutkovej priamkovej plochy.

Osový rez plochy je zostrojený rovinou rovnobežnou s nárysňou. Odlišné od predchádzajúcich plôch je aj to, že použitá rovina τ je dotykovou rovinou vo všetkých bodoch úsečky AB charakteristiky e . Zostrojené priamky t , u určujú dotykovú rovinu v obecnom bode M skrutkovej plochy. Pri jej zostrojení taktiež ako v predchádzajúcich prípadoch, voľba bodu M' na charakteristike e nie je jednoznačná.

Na uvedených obalových skrutkových plochách môžeme uvažovať niekoľko sústav dôležitých čiar. Prvou sústavou sú skrutkovice, ktoré opíšu všetky body charakteristiky e pri danom skrutkovom pohybe. Ďalšou sústavou čiar sú jednotlivé polohy skrutkujúcej charakteristiky. Osové rezy plochy a rezy rovinami kolmými na os skrutkového pohybu tvoria ďalšie sústavy čiar na týchto skrutkových plochách. Treba si ešte uvedomiť, že skrutkovým pohybom osového rezu, alebo rezu rovinami kolmými na os skrutkového pohybu vznikne tá istá obalová skrutková plocha, ako skrutkovaním charakteristiky e .

Rezy rovinami kolmými na os skrutkového pohybu, na týchto obalových skrutkových plochách, môžu byť buď časti kruhových evolvent; v tom prípade, ak obalová plocha vznikne skrutkovým pohybom hranatej priamkovej plochy (ako na obr. 3), alebo obalové krivky kruhových evolvent u plôch, ktoré vzniknú pri skrutkovom pohybe oblých priamkových plôch. Vyplýva to z toho, že ako sme povedali v úvode článku, obalovú skrutkovú plochu Φ môžeme považovať aj za obalovú plochu priamkových skrutkových plôch Ψ , na ktorých rezmi rovinami kolmými na os skrutkového pohybu sú kruhové evolventy.

Záverom treba povedať, že účelom článku bolo pojednať o základných vlastnostiach obalových skrutkových plôch, vytvorených skrutkovým pohybom rozvinuteľných priamkových plôch a ukázať konštrukciu bodov charakteristiky skrutkovej plochy, dotykovej roviny a normály plochy, osového rezu a rezu rovinami kolmými na os skrutkového pohybu v konkrétnych prípadoch. Treba však tiež poznamenať, že ďalšie vlastnosti, ako druh charakteristiky plochy, druh osového rezu, alebo rezu rovinami kolmými na os skrutkového pohybu, závisia aj od ďalších činiteľov, ako je druh tvoriacej plochy φ , poloha vzhľadom k osi skrutkového pohybu, počítajúc do toho aj odchylku, ktorú zvierá os skrutkového pohybu s osou, alebo povrchovými priamkami tvoriacej plochy.

Uvedený článok môže byť teoretickým podkladom pre konštrukciu nových typov šnekových súkolesí.

Резюме

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ОГИБАЮЩИХ ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ОНДРЕЙ ГАЛЛО (ONDREJ GALLO)

В статье приводятся некоторые свойства огибающих винтовых поверхностей, образованных винтовым движением развёртывающихся линейчатых поверхностей. Точки характеристики e огибающей винтовой поверхности Φ на любой образующей прямой q движущейся линейчатой поверхности φ построены с помощью касательной плоскости τ поверхности φ , которая касается её вдоль образующей прямой q . Характеристику s развёртывающейся винтовой поверхности, которая возникнет развёртыванием плоскости τ , умеем построить, и в точке пересечения образующей прямой q и характеристики s находится точка Q характеристики e . Далее построены осевые пересечения, пересечения с плоскостями, перпендикулярными к оси винтового движения, и касательные плоскости в точках характеристики e и в общей точке некоторых огибающих винтовых поверхностей. Приведённая статья может служить теоретической основой для конструкции новых типов червячных деталей.

Summary

PROPERTIES OF SOME ENVELOPING HELICOIDAL SURFACES

ONDREJ GALLO

This article deals with some properties of the enveloping helicoidal surfaces formed by the helical motion of developpable ruled surfaces. The points of the characteristic e of the enveloping helicoidal surface Φ on an arbitrary ruling q of the helicoidal ruled surface φ are constructed by means of the contact plane τ of the surface φ touching it along the ruling q . The characteristic s of the developpable helicoidal surface formed by the helical motion of the plane τ can be constructed, and the point Q of the characteristic e is at the point of intersection of the ruling q with the characteristic s . Then there are axial sections, sections through planes perpendicular to the axis of helical motion and planes of contact in points of the characteristic e and in a general point of some enveloping helicoidal surfaces. This article may be used as a theoretical basis for the design of new types of worn parts.

Adresa autora: Ondrej Gallo, Katedra deskriptívnej geometrie SF VŠT, Nám. Februárového víťazstva 9, Košice.