

# Aplikace matematiky

---

Pavel Galajda

Nomogramy s rovnoběžnými a kolmými indexami analytických funkcí prvej nomografickej triedy a druhého nomografickeho rodu

*Aplikace matematiky*, Vol. 11 (1966), No. 1, 45–49,50–51,52–62

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102999>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



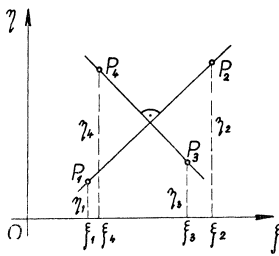
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NOMOGRAMY S ROVNOBEŽNÝMI A KOLMÝMI INDEXAMI  
ANALYTICKÝCH FUNKCIÍ PRVEJ NOMOGRAFICKEJ TRIEDY  
A DRUHÉHO NOMOGRAFICKÉHO RODU

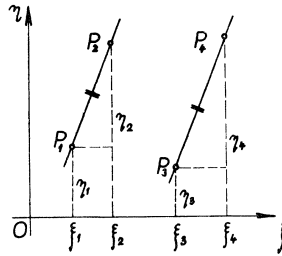
PAVEL GALAJDA

(Došlo dňa 31. marca 1964.)

V prácach [13], [14] a [15] som sa zaoberal zobrazením normálnych tvarov (2.1), (3.1) a (4.1) pomocou spojnicových nomogramov. V tomto článku teóriu spojnicových nomogramov rozširujem aj na zostrojenie nomogramov funkcií komplexnej premennej pomocou rovnobežných a kolmých indexov.



Obr. 1.



Obr. 2.

Skôr, ako prikróčime k vlastnej práci, pripomeňme si základný princíp tejto metódy u funkcií reálnej premennej.

1. Zo známej analytickej podmienky kolmosti spojnic bodov  $P_1P_2 \perp P_3P_4$  o súradniciach  $P_i = (\xi_i, \eta_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (obr. 1), podmienka kolmosti je

$$(1.1) \quad \frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = - \frac{\xi_3 - \xi_4}{\eta_3 - \eta_4} \quad (\xi_1 \neq \xi_2, \eta_3 \neq \eta_4).$$

Vzťahu (1.1) možno použiť na zobrazenie funkcie tvaru

$$(1.2) \quad \frac{f_1(x) + f_2(y)}{g_1(x) + g_2(y)} = - \frac{f_3(z) + f_4(u)}{g_3(z) + g_4(u)}.$$

Ak  $\alpha, \beta, \delta$  vezmemem za zobrazovacie moduly, potom zobrazovacie rovnice vzťahu (1.2) sú

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta g_1, & \eta_1 &= \alpha f_1, \\ \xi_2 &= -\beta g_2, & \eta_2 &= -\alpha f_2, \\ \xi_3 &= \alpha \delta f_3, & \eta_3 &= \beta \delta g_3, \\ \xi_4 &= -\alpha \delta f_4, & \eta_4 &= -\beta \delta g_4. \end{aligned}$$

Analogicky pre rovnobežné indexy uvažujme v rovine štyri body  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), ( $P_1 \neq P_2, P_3 \neq P_4$ ) so súradnicami  $(\xi_i, \eta_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) tak položené, že spojnica  $P_1P_2 \parallel P_3P_4$ , pričom tieto úsečky nie sú rovnobežné s osou ( $\eta$ ) (obr. 2).

Potom súradnice bodov  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) splňujú podmienku

$$(1.4) \quad \frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\eta_3 - \eta_4}{\xi_3 - \xi_4} \quad (\xi_1 \neq \xi_2, \xi_3 \neq \xi_4).$$

Rovnice (1.4) využijeme na zostrojenie funkcie tvaru

$$(1.5) \quad \frac{f_1(x) + f_2(y)}{g_1(x) + g_2(y)} = \frac{f_3(z) + f_4(u)}{g_3(z) + g_4(u)}.$$

Základný tvar (1.5) sa neporuší, ak čitateľov obidvoch strán rovnice (1.5) násobíme  $\alpha$ , menovateľov  $\beta$ , a okrem toho pravú stranu rozšírime  $\delta$ , kde  $\alpha, \beta, \delta$  sú zobrazovacie moduly, potom zobrazovacie rovnice vzťahu (1.5) sú

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta g_1, & \eta_1 &= \alpha f_1, \\ \xi_2 &= -\beta g_2, & \eta_2 &= -\alpha f_2, \\ \xi_3 &= \beta \delta g_3, & \eta_3 &= \alpha \delta f_3, \\ \xi_4 &= -\beta \delta g_4, & \eta_4 &= -\alpha \delta f_4. \end{aligned}$$

Uvedené metódy pre funkcie reálnej premennej môžeme použiť aj na funkcie komplexnej premennej kanonického tvaru

$$(1.7) \quad \begin{aligned} S(p) X(a) + G(p) Y(b) + H(p) &= 0, \\ T(q) X(a) + K(q) Y(b) + R(q) &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice (1.7) upravíme na kanonický tvar

$$(1.8) \quad \frac{X(a) - 0}{1 - 0} = - \frac{Y(b) - \left(-\frac{H(p)}{G(p)}\right)}{0 - \left(-\frac{S(p)}{G(p)}\right)}, \quad \frac{X(a) - 0}{1 - 0} = - \frac{Y(b) - \left(-\frac{R(q)}{K(q)}\right)}{0 - \left(-\frac{T(q)}{K(q)}\right)},$$

odkiaľ na základe (1.3) plynú zobrazovacie rovnice

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta, & \eta_1 &= \alpha X(a), \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\ \xi_3 &= \alpha\delta Y(b), & \eta_3 &= 0, \\ \xi_4 &= -\alpha\delta \frac{H(p)}{G(p)}, & \eta_4 &= -\beta\delta \frac{S(p)}{G(p)}, \\ \xi_5 &= -\alpha\delta \frac{R(q)}{K(q)}, & \eta_5 &= \beta\delta \frac{T(q)}{K(q)}. \end{aligned}$$

Zo zobrazovacích rovníc (1.9) plynie, že nomogram pomocou kolmých indexov sa zobrazí o dvoch krivočiarych a dvoch priamočiarych stupniciach s pevným bodom v počiatku súradného systému.

Obdobne aj pre nomogramy s rovnoběžnými indexami.

## 2. Uvažujme normálny tvar

$$(2.1) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} (w - w_0)^2,$$

kde

$$z = a + bi, \quad z_0 = a_0 + b_0i, \quad w = p + qi, \quad w_0 = p_0 + q_0i$$

a  $\gamma$  ľubovoľné reálne alebo rýdzo imaginárne číslo.

a) Tvaru (2.1) ak  $\gamma$  je reálne číslo zodpovedá kanonický tvar [13]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} a \left( \frac{4P^2}{\gamma} \right) + (b - b_0)^2 - \left( \frac{4P^2}{\gamma^2} + \frac{4a_0P^2}{\gamma} \right) &= 0, \\ a \left( -\frac{4Q^2}{\gamma} \right) + (b - b_0)^2 - \left( 4\frac{Q^2}{\gamma^2} - \frac{4a_0Q^2}{\gamma} \right) &= 0, \end{aligned}$$

kde

$$P = \operatorname{Re} [N(w - w_0)] \quad \text{a} \quad Q = \operatorname{Im} [N(w - w_0)]$$

a  $N$  ľubovoľné reálne alebo rýdzo imaginárne číslo.

Kanonický tvar (2.2) upravme na tvar (1.8)

$$(2.3) \quad \frac{a-0}{1-0} = - \frac{(b-b_0)^2 - \left( \frac{4P^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0P^2}{\gamma} \right)}{0 - \left( -\frac{4P^2}{\gamma} \right)},$$

$$\frac{a-0}{1-0} = - \frac{(b-b_0)^2 - \left( \frac{4Q^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0Q^2}{\gamma} \right)}{0 - \left( \frac{4Q^2}{\gamma} \right)}.$$

Porovnaním (2.3) s (1.8) na základe (1.9) dostávame zobrazovacie rovnice pre prípad (2.1), ktoré sú

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta, & \eta_1 &= \alpha a, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\ \xi_3 &= \alpha \delta (b - b_0), & \eta_3 &= 0, \\ \xi_4 &= \alpha \delta \left( \frac{4P^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0P^2}{\gamma} \right), & \eta_4 &= -\beta \delta \frac{4P^2}{\gamma}, \\ \xi_5 &= \alpha \delta \left( \frac{4Q^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0Q^2}{\gamma} \right), & \eta_5 &= \beta \delta \frac{4Q^2}{\gamma}. \end{aligned}$$

Z rovníc  $\xi_4$  a  $\eta_4$  vylúčením  $P$  a z rovníc  $\xi_5$  a  $\eta_5$  vylúčením  $Q$  dostaneme

$$(2.5) \quad 4\beta^2 \delta \xi_{(P,Q)} - \alpha \eta_{(P,Q)}^2 + 4a_0 \alpha \beta \delta \eta_{(P,Q)} = 0,$$

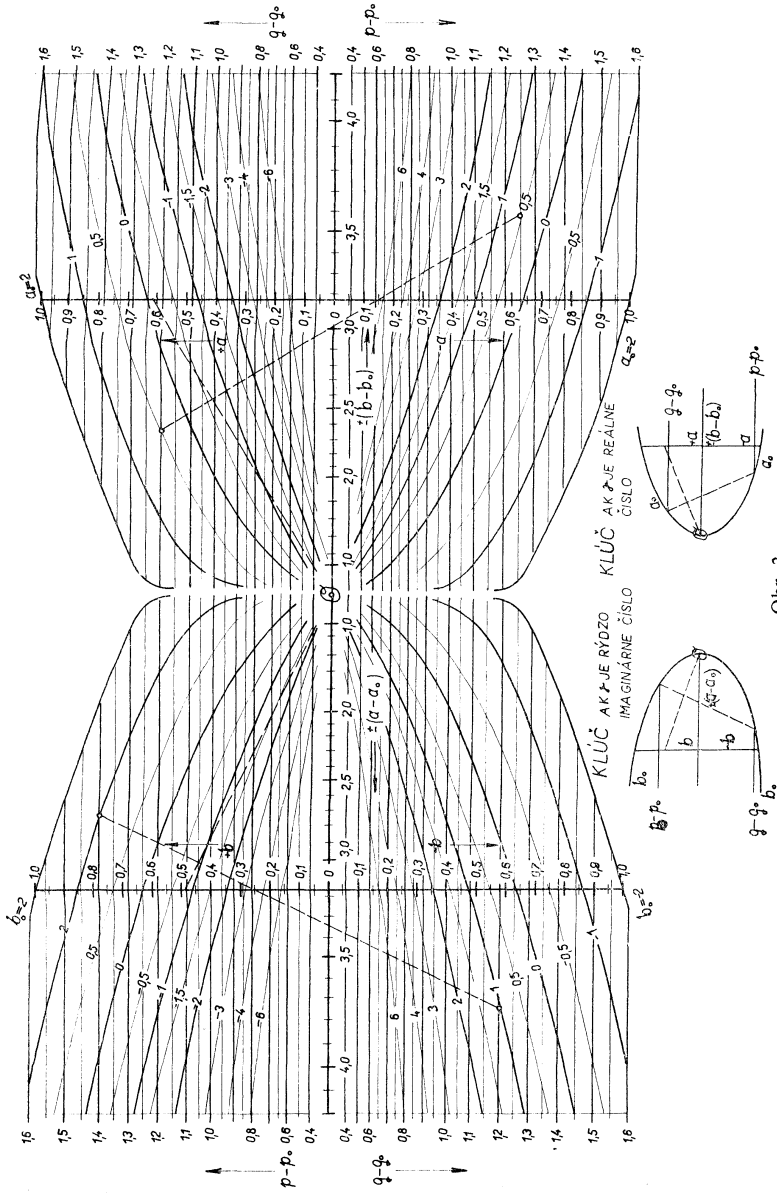
čiže nositeľkou stupníc  $P$  a  $Q$  sú paraboly o rovnici (2.5), kde  $a_0$  je parameter.

b) V prípade, že  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo, potom normálnemu tvaru (2.1) zodpovedá kanonický tvar [13]

$$(2.6) \quad (a - a_0)^2 - \frac{4iP^2}{\gamma} b + \left( \frac{4P^4}{\gamma^2} + \frac{4ib_0P^2}{\gamma} \right) = 0,$$

$$(a - a_0)^2 + \frac{4iQ^2}{\gamma} b + \left( \frac{4Q^4}{\gamma^2} - \frac{4ib_0Q^2}{\gamma} \right) = 0.$$

$$Z - Z_0 = \frac{1}{\rho} (W - W_0)^2$$



Obr. 3.

Kanonický tvar (2.6) upravme na tvar (1.8)

$$(2.7) \quad \frac{b - 0}{1 - 0} = - \frac{(a - a_0)^2 - \left[ - \left( \frac{4P^4}{\gamma^2} + \frac{4ib_0P^2}{\gamma} \right) \right]}{0 - \left( \frac{4iP^2}{\gamma} \right)},$$

$$\frac{b - 0}{1 - 0} = - \frac{(a - a_0)^2 - \left[ - \left( \frac{4Q^4}{\gamma^2} - \frac{4ib_0Q^2}{\gamma} \right) \right]}{0 - \left( - \frac{4iQ^2}{\gamma} \right)}.$$

Porovnaním (2.7) s (1.8) na základe (1.9) dostávame zobrazovacie rovnice pre prípad (2.1), ak  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo, ktoré sú

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta, & \eta_1 &= \alpha b, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\ \xi_3 &= \alpha\delta(a - a_0)^2, & \eta_3 &= 0, \\ \xi_4 &= -\alpha\delta \left( \frac{4P^4}{\gamma^2} + \frac{4ib_0P^2}{\gamma} \right), & \eta_4 &= \beta\delta \frac{4iP^2}{\gamma}, \\ \xi_5 &= -\alpha\delta \left( \frac{4Q^4}{\gamma^2} - \frac{4ib_0Q^2}{\gamma} \right), & \eta_5 &= -\beta\delta \frac{4iQ^2}{\gamma}. \end{aligned}$$

Z rovníc  $\xi_4$  a  $\eta_4$  vylúčením  $P$  a z rovníc  $\xi_5$  a  $\eta_5$  vylúčením  $Q$  dostaneme

$$(2.9) \quad 4\beta^2\delta\xi_{(P,Q)} - \alpha\eta_{(P,Q)}^2 + 4b_0\alpha\beta\delta\eta_{(P,Q)} = 0.$$

Teda premenné  $P$  a  $Q$  sa nám opäť zobrazia na parabole o rovnici (2.9), kde  $b_0$  je parametr.

Pomocou zobrazovacích rovníc (2.4) a (2.8) bol zostrojený nomogram (obr. 3) pre funkciu (2.1), pričom moduly boli volené  $\alpha = \beta = 10$ ,  $\delta = 0,1$ .

Z rovníc (2.4) resp. (2.8) vyplýva, že funkcia (2.1) pre  $\gamma$  reálne a  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo sa zobrazí nomogramom, ktorý pozostáva z dvoch priamočiarych stupníc  $(a - a_0)$ ,  $(b - b_0)$  (pri  $\gamma$  reálnom bolo volené  $b_0 - \text{const.}$  a  $a_0 - \text{parameter}$  a pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo  $a_0 - \text{const.}$  a  $b_0 - \text{parameter}$ ) a zo sústavy parabol prechádzajúcich cez pevný bod  $\theta$ , ktoré sú nositeľkami stupníc  $(p - p_0)$  a  $(q - q_0)$  a ich kôty ležia na priamkach rovnobežne s priamočiарou stupnicou  $(b - b_0)$  vychádzajúcou z pevného bodu  $\theta$ , ktorý je zároveň počiatok súradného systému. Druhá priamočiara stupnica  $(a)$  je kolmá na priamočiарu stupnicu  $(b - b_0)$  (obr. 3).

Na (obr. 3) je zostrojený nomogram ako pre  $\gamma$  reálne, tak aj pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo, ktoré sme zvolili  $\gamma = 1$  a  $\gamma = i$ .

Rozsah jednotlivých premenných bol volený takto:

Ak  $\gamma$  je reálne číslo

Ak  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo

$$\begin{array}{ll} a_0 \langle -2; 6 \rangle, & \langle -6; 2 \rangle, & b_0 \langle -2; 6 \rangle, & \langle -6; 2 \rangle, \\ |a| \langle 0; 1,0 \rangle, & & |b| \langle 0; 1,0 \rangle, & \\ |b - b_0| \langle 0; 4,2 \rangle, & & |a - a_0| \langle 0; 4,2 \rangle, & \\ (p - p_0) \langle 0,4; 1,6 \rangle, & & (p - p_0) \langle 0,4; 1,6 \rangle, & \\ (q - q_0) \langle 0,4; 1,6 \rangle. & & (q - q_0) \langle 0,4; 1,6 \rangle. & \end{array}$$

Pri čítaní treba postupovať podľa kľučov, ktoré sú znázornené na obrázku ako pre  $\gamma$  reálne tak aj pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo.

Príklad 1. Pre dané  $(p - p_0) = 1,25$ ,  $(q - q_0) = 1,2$ ,  $a_0 = 0,5$ , čítame podľa kľúča  $a \doteq 0,62$ ,  $\pm (b - b_0) \doteq 3,0$ .

Príklad 2. Pre dané  $(p - p_0) = 1,4$ ,  $(q - q_0) = 1,2$ ,  $b_0 = 1$ , čítame podľa kľúča  $\pm (a - a_0) \doteq 3,35$ ,  $b \doteq 0,49$ .

Príklad 1 bol volený pre  $\gamma$  reálne a príklad 2 pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo.

3. Nech je daný normálny tvar

$$(3.1) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} C[N(w - w_0)],$$

kde  $C$  sú funkcie sin, cos, sh, ch. Význam ďalších hodnôt, ako v §2.

Uvažujme normálny tvar (3.1) pre funkciu sinus

$$(3.2) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \sin [N(w - w_0)].$$

a) Tvar (3.2), ak  $\gamma$  je reálne číslo, zodpovedá kanonický tvar [13]

$$(3.3) \quad \left( \frac{\gamma^2}{\sin^2 P} \right) (a - a_0)^2 + \left( \frac{-\gamma^2}{\cos^2 P} \right) (b - b_0)^2 = 1,$$

$$\left( \frac{\gamma^2}{\text{ch}^2 Q} \right) (a - a_0)^2 + \left( \frac{\gamma^2}{\text{sh}^2 Q} \right) (b - b_0)^2 = 1.$$

Kanonický tvar (3.3) upravme na tvar (1.8)

$$(3.4) \quad \frac{(a - a_0)^2 - 0}{1 - 0} = - \frac{(b - b_0)^2 - (-\cos^2 P / \gamma^2)}{0 - (\text{ctg}^2 P)},$$

$$\frac{(a - a_0)^2 - 0}{1 - 0} = - \frac{(b - b_0)^2 - (\text{sh}^2 Q / \gamma^2)}{0 - (-\text{th}^2 Q)}.$$



Porovnaním (3.4) s (1.8) za predpokladu, že  $\gamma \neq 0$  na základe (1.9) dostávame zobrazovacie rovnice pre prípad (3.2), ktoré sú

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta, & \eta_1 &= \alpha(a - a_0)^2, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\ \xi_3 &= \alpha\delta(b - b_0)^2, & \eta_3 &= 0, \\ \xi_4 &= -\alpha\delta \frac{\cos^2 P}{\gamma^2}, & \eta_4 &= \beta\delta \operatorname{ctg}^2 P, \\ \xi_5 &= \alpha\delta \frac{\operatorname{sh}^2 Q}{\gamma^2}, & \eta_5 &= -\beta\delta \operatorname{th}^2 Q. \end{aligned}$$

Z rovníc  $\xi_4$  a  $\eta_4$  vylúčením  $P$  a z rovníc  $\xi_5$  a  $\eta_5$  vylúčením  $Q$  dostaneme

$$(3.6) \quad \alpha\delta\eta_{(P,Q)} + \gamma^2\xi_{(P,Q)}\eta_{(P,Q)} + \beta\delta\gamma^2\xi_{(P,Q)} = 0.$$

Teda nositeľkou stupnice  $P$  a  $Q$  sú hyperboly o rovnici (3.6), kde  $\gamma$  je parameter.

**b)** V prípade, že  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo, potom normálnemu tvaru (3.2) zodpovedá kanonický tvar [13]

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \left(\frac{-\gamma^2}{\sin^2 P}\right)(b - b_0)^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\cos^2 P}\right)(a - a_0)^2 &= 1, \\ \left(\frac{-\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 Q}\right)(b - b_0)^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 Q}\right)(a - a_0)^2 &= 1. \end{aligned}$$

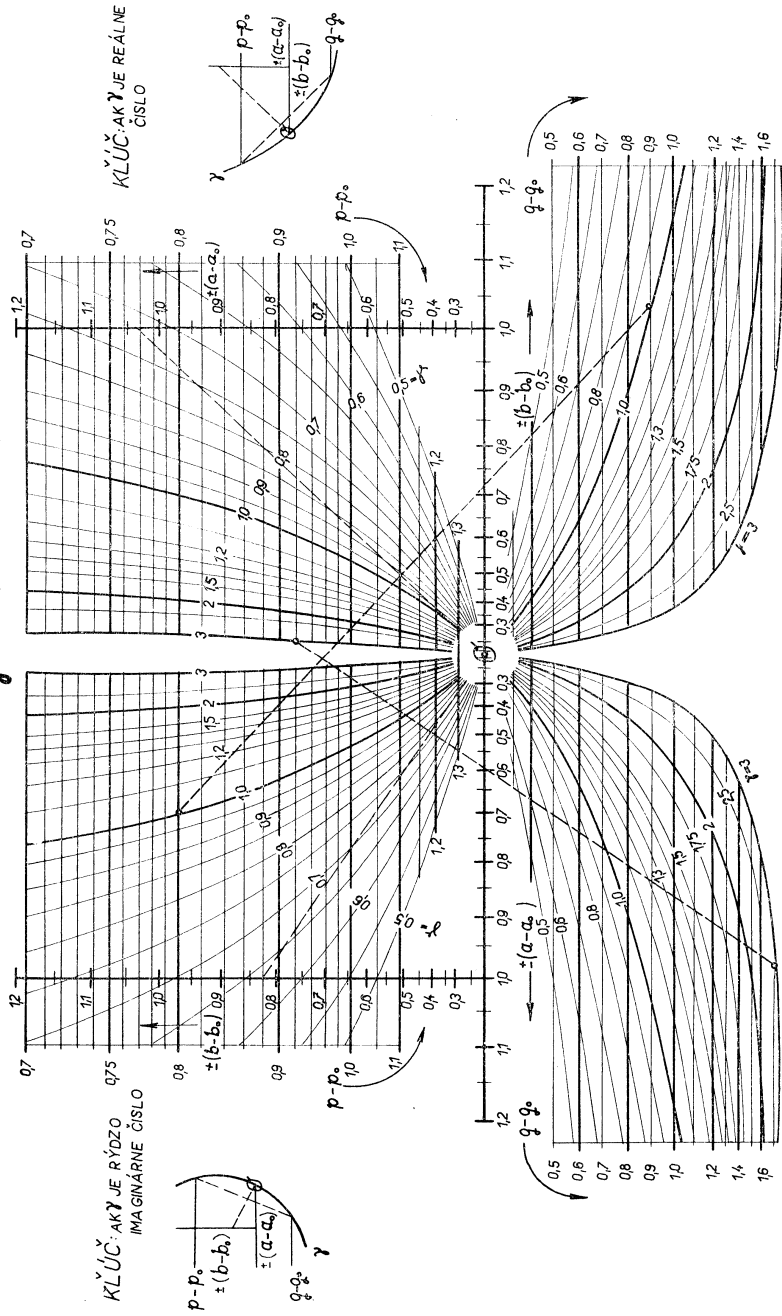
Kanonický tvar (3.7) upravme na tvar (1.8)

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{(b - b_0)^2 - 0}{1 - 0} &= -\frac{(a - a_0)^2 - (\cos^2 P/\gamma^2)}{0 - (\operatorname{ctg}^2 P)}, \\ \frac{(b - b_0)^2 - 0}{1 - 0} &= -\frac{(a - a_0)^2 - (-\operatorname{sh}^2 Q/\gamma^2)}{0 - (-\operatorname{th}^2 Q)}. \end{aligned}$$

Porovnaním (3.8) a (1.8) na základe (1.9) dostávame zobrazovacie rovnice pre prípad (3.2), ak  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo, ktoré sú

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta, & \eta_1 &= \alpha(b - b_0)^2, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\ \xi_3 &= \alpha\delta(a - a_0)^2, & \eta_3 &= 0, \\ \xi_4 &= \alpha\delta \frac{\cos^2 P}{\gamma^2}, & \eta_4 &= \beta\delta \operatorname{ctg}^2 P, \\ \xi_5 &= -\alpha\delta \frac{\operatorname{sh}^2 Q}{\gamma^2}, & \eta_5 &= -\beta\delta \operatorname{th}^2 Q. \end{aligned}$$

$$Z-Z_0 = \frac{1}{f} \sin [N(W-W_0)]$$



Obr. 4.

Z rovníc  $\xi_4$  a  $\eta_4$  vylúčením  $P$  a z rovníc  $\xi_5$  a  $\eta_5$  vylúčením  $Q$  dostaneme

$$(3.10) \quad \alpha\delta\eta_{(P,Q)} - \gamma^2\xi_{(P,Q)}\eta_{(P,Q)} - \beta\delta\gamma^2\xi_{(P,Q)} = 0.$$

Z rovníc (3.10) vidíme, že premenné  $P$  a  $Q$  opäť sa zobrazia na hyperbole.

Nomogram na obr. 4 bol zostrojený pre normálny tvar (3.1) a to pomocou zobrazovacích rovníc (3.5) a (3.9). Moduly boli volené takto:  $\alpha = \beta = 10$ ,  $\delta = 1$ .

Ako je vidieť z rovníc (3.5) a (3.9) funkcia (3.2) sa zobrazí nomogramom, ktorý pozostáva z dvoch priamočiarych stupníc  $(a - a_0)$ ,  $(b - b_0)$  a pri parametre  $\gamma$  zo sústavy hyperbol, ktoré sú nositeľkami stupníc  $(p - p_0)$ ,  $(q - q_0)$  prechádzajúce cez pevný bod  $\mathcal{O}$ , ktorých kóty ležia na priamkach rovnobežných s priamočiарou stupnicou  $(b - b_0)$  vychádzajúcou z pevného bodu  $\mathcal{O}$  a ktorý je zároveň počiatkom súradného systému. Druhá priamočiara stupnica  $(a - a_0)$  je kolmá na priamočiарou stupnicu  $(b - b_0)$  (obr. 4).

Na obr. 4 je zostrojený nomogram ako pre parameter  $\gamma$  ak tento je reálne číslo a zároveň ak  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo. Rozsah jednotlivých premenných bol volený takto:

Ak  $\gamma$  je reálne číslo

Ak  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo

$$\begin{aligned} \gamma \langle 0,5; 3 \rangle, & \quad \gamma \langle 0,5i; 3i \rangle, \\ |a - a_0| \langle 0,1; 1,2 \rangle, & \quad |a - a_0| \langle 0,1; 1,2 \rangle, \\ |b - b_0| \langle 0,1; 1,2 \rangle, & \quad |b - b_0| \langle 0,1; 1,2 \rangle, \\ (p - p_0) \langle 0,7; 1,30 \rangle, & \quad (p - p_0) \langle 0,7; 1,30 \rangle, \\ (q - q_0) \langle 0,30; 1,60 \rangle. & \quad (q - q_0) \langle 0,30; 1,60 \rangle. \end{aligned}$$

Príklad 1. Pre dané  $(p - p_0) = 0,8$ ,  $(q - q_0) = 0,9$ ,  $\gamma = 1,0$ , čítame podľa kľúča  $\pm(a - a_0) \doteq 1,03$ ,  $\pm(b - b_0) \doteq 0,72$ .

Príklad 2. Pre dané  $(p - p_0) = 0,92$ ,  $(q - q_0) = 1,80$ ,  $\gamma = 3i$ , čítame podľa kľúča  $\pm(a - a_0) \doteq 0,59$ ,  $\pm(b - b_0) \doteq 0,825$ .

#### 4. Uvažujme normálny tvar

$$(4.1) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln S[N(w - w_0)],$$

kde  $S$  sú funkcie  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sec$ ,  $\csc$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sch}$ ,  $\operatorname{csch}$ . Význam ďalších hodnôt je taký istý ako v § 2. Zobrazíme normálny tvar (4.1) pre funkciu sinus

$$(4.2) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \sin [N(w - w_0)].$$

a) Ak  $\gamma$  je reálne číslo, potom normálnemu tvaru zodpovedá kanonický tvar [14]

$$(4.3) \quad \left( -\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} \right) (e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (\cos 2P) = 0,$$

$$\left( \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} \right) (e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (-\operatorname{ch} 2Q) = 0.$$

Kanonický tvar (4.3) upravíme na kanonický tvar s rovnobežnými indexami

$$(4.4) \quad \frac{e^{-2\operatorname{Re}\gamma z} - 0}{1 - 0} = \frac{(-\cos 2B) - (\cos 2P)}{0 - [(\sin^2 2P/2) \cdot e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}]},$$

$$\frac{e^{-2\operatorname{Re}\gamma z} - 0}{1 - 0} = \frac{(-\cos 2B) - (-\operatorname{ch} 2Q)}{0 - [-(\operatorname{sh}^2 2Q/2) \cdot e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}]}.$$

Z kanonického tvaru (4.4) na základe (1.6) dostávame zobrazovacie rovnice pre prípad (4.2), ktoré sú

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta, & \eta_1 &= \alpha \cdot e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\ \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= -\alpha\delta \cos 2B, \\ \xi_4 &= \delta\beta \frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, & \eta_4 &= \alpha\delta \cos 2P, \\ \xi_5 &= -\delta\beta \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, & \eta_5 &= -\alpha\delta \operatorname{ch} 2Q. \end{aligned}$$

Z rovníc  $\xi_4$  a  $\eta_4$  vylúčením  $P$  a z rovníc  $\xi_5$  a  $\eta_5$  vylúčením  $Q$  dostaneme

$$(4.6) \quad 2\alpha^2\delta\xi_{(P,Q)} + \beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\eta_{(P,Q)}^2 - \alpha^2\beta\delta^2 e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} = 0.$$

Teda premenné  $P$  a  $Q$  sa zobrazia na parabole o rovnici (4.6), pritom ak za  $\gamma$  zvolíme pevné číslo, potom parametrom je  $a_0$ .

b) Uvažujme prípad, že  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo, potom normálnemu tvaru (4.2) zodpovedá kanonický tvar [14]

$$(4.7) \quad [(-\sin^2 2P/2) \cdot e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}] (-e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (-\cos 2P) = 0,$$

$$[(\operatorname{sh}^2 2Q/2) \cdot e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}] (-e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (\operatorname{ch} 2Q) = 0.$$

Kanonický tvar (4.7) upravme na kanonický tvar s rovnobežnými indexami

$$(4.8) \quad \frac{-e^{-2\operatorname{Re}\gamma z} - 0}{1 - 0} = \frac{(-\cos 2B) - (-\cos 2P)}{0 - [(\sin^2 2P/2) \cdot e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}]},$$

$$\frac{-e^{-2\operatorname{Re}\gamma z} - 0}{1 - 0} = \frac{(-\cos 2B) - (\operatorname{ch} 2Q)}{0 - [-(\operatorname{sh}^2 2Q/2) \cdot e^{2\operatorname{Re}\gamma z}]}$$

Z tvaru (4.8) na základe (1.6) plynú zobrazovacie rovnice

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \beta, & \eta_1 &= -\alpha e^{-2\kappa\epsilon\gamma z}, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 0, \\ \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= -\alpha\delta \cos 2B, \\ \xi_4 &= \delta\beta \frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, & \eta_4 &= -\alpha\delta \cos 2P, \\ \xi_5 &= -\delta\beta \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}, & \eta_5 &= \alpha\delta \operatorname{ch} 2Q. \end{aligned}$$

Z rovníc  $\xi_4$  a  $\eta_4$  vylúčením  $P$  a z rovníc  $\xi_5$  a  $\eta_5$  vylúčením  $Q$  dostávame

$$(4.10) \quad 2\alpha^2\delta\xi_{(P,Q)} + \beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\eta_{(P,Q)}^2 - \alpha^2\beta\delta^2 e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} = 0.$$

Premenné  $P$  a  $Q$  sa zobrazia na parabole o rovnici (4.10), kde  $a_0$  je opäť parameter.

Nomogram na (obr. 5) bol zostrojený pre normálny tvar (4.2) na základe zobrazovacích rovníc (4.5) a (4.9) (rovnice (4.9) pri zobrazení sú upravené tak, že druhý a tretí stĺpec je vynásobený s  $(-1)$ ). Moduly boli volené  $\alpha = \beta = 10$ ,  $\delta = 1$ .

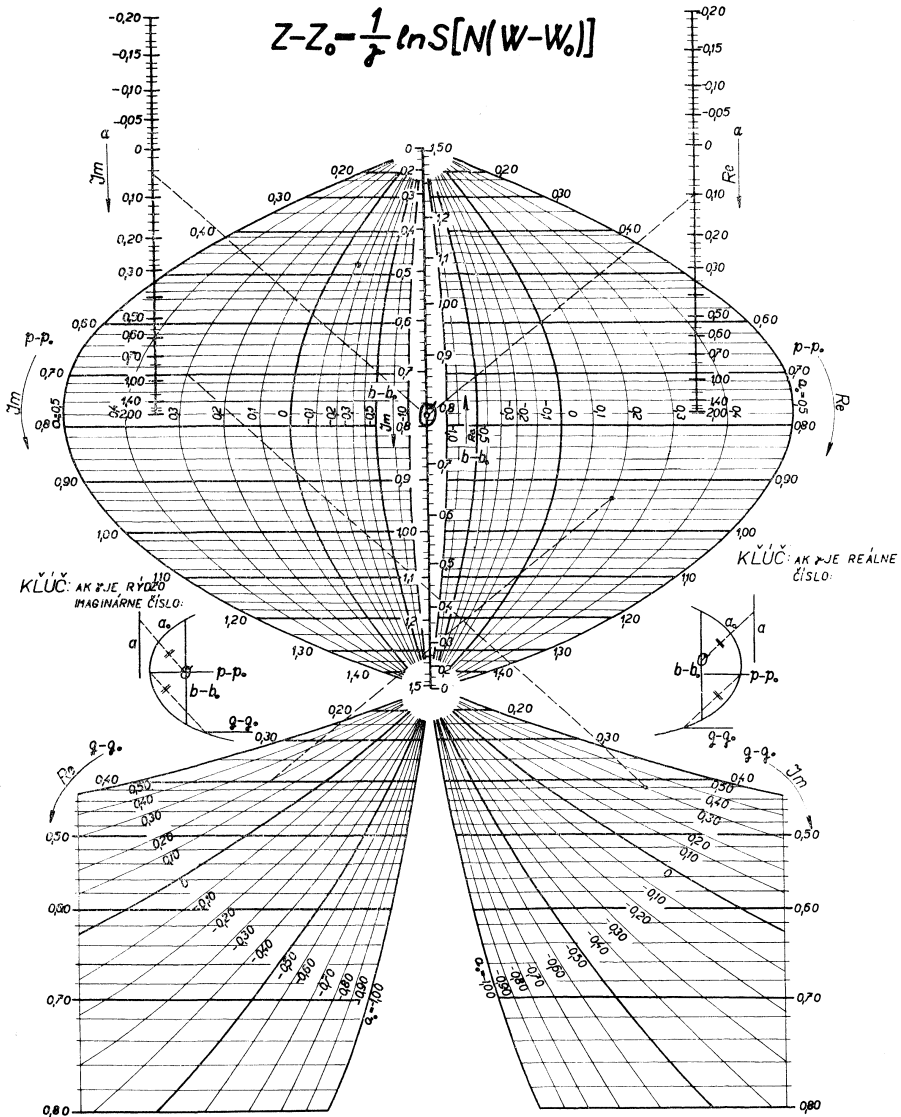
Z rovníc (4.5) resp. (4.9) vyplýva, že funkcia (4.2) pre  $\gamma$  reálne a rýdzo imaginárne číslo sa zobrazí pomocou rovnobežných indexov nomogramom, ktorý má dve priamočiare stupnice  $a$ ,  $(b - b_0)$  rovnobežné s osou ( $\eta$ ). Jedna z rovnobežných stupníc  $(b - b_0)$  prechádza cez pevný bod  $\mathcal{O}$ , ktorý je zároveň počiatok súradného systému. Premenné  $(p - p_0)$  a  $(q - q_0)$  sa zobrazia na sústave parabol, ktoré prechádzajú dvoma pevnými bodmi ležiacimi na priamočiarej stupnici  $(b - b_0)$  a ich kóty ležia na priamkach rovnobežných s osou ( $\xi$ ) (obr. 5).

Na obr. 5 je zostrojený nomogram pre  $\gamma$  reálne, aj pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo, ktoré bolo zvolené  $\gamma = 1$  a  $\gamma = i$ .

Pri čítaní treba postupovať podľa kľúčov, ktoré sú znázornené na obrázku ako pre  $\gamma$  reálne tak aj pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo.

Rozsah jednotlivých premenných pre  $\gamma$  reálne a rýdzo imaginárne bol vybraný takto:

$$\begin{aligned} a &\langle -0,20; 2,0 \rangle, \\ (b - b_0) &\langle 0; 1,50 \rangle, \\ (p - p_0) &\langle 0,20; 1,40 \rangle, \\ (q - q_0) &\langle 0,20; 0,80 \rangle. \end{aligned}$$



Príklad 1. Pre  $\gamma$  reálne a pre dané  $(p - p_0) \doteq 0,94$ ,  $(q - q_0) \doteq 0,48$ ,  $a_0 = 0,20$ , čítame podľa kľúča  $a = 0,20$ ,  $(b - b_0) = 0,28$ .

Príklad 2. Pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo, ak je dané  $(p - p_0) \doteq 0,70$ ,  $(q - q_0) \doteq 0,42$ ,  $a_0 = 0,30$ , čítame podľa kľúča  $a = 0,05$ ,  $(b - b_0) = 1,13$ .

5. V tejto časti prevedieme transformácie zobrazovacích rovníc (4.5) a (4.9) tak, aby premenné  $P$  a  $Q$  sa zobrazili na kružnici.

Determinanty, prisluchajúce rovniciam (4.5) sú

$$(5.1) \quad \begin{vmatrix} 1, & \beta, & \alpha e^{-2\text{Re}\gamma z} \\ 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & -\alpha\delta \cos 2B \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1, & \beta, & \alpha e^{-2\text{Re}\gamma z} \\ 1, & 0, & 0 \\ 1, & \frac{\delta\beta}{2} e^{2\text{Re}\gamma z_0} \sin^2 2P, & \alpha\delta \cos 2P \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1, & \beta, & \alpha e^{-2\text{Re}\gamma z} \\ 1, & 0, & 0 \\ 1, & -\frac{\delta\beta}{2} e^{2\text{Re}\gamma z_0} \text{sh}^2 2Q, & -\alpha\delta \text{ch} 2Q \end{vmatrix} = 0.$$

Upravme determinanty (5.1) tak, že prvé stĺpce vynásobíme s  $\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0}$  a druhé s  $(-2)$  a pripočítame takto upravené stĺpce k druhým. Potom v takto upravených determinantoch vydělíme prvé stĺpce s  $\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0}$ , čím dostaneme

$$(5.2) \quad \begin{vmatrix} 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta, & \alpha e^{-2\text{Re}\gamma z} \\ 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0}, & 0 \\ 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0}, & -\alpha\delta \cos 2B \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta, & \alpha e^{-2\text{Re}\gamma z} \\ 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0}, & 0 \\ 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} \cos^2 2P, & \alpha\delta \cos 2P \end{vmatrix} = 0,$$

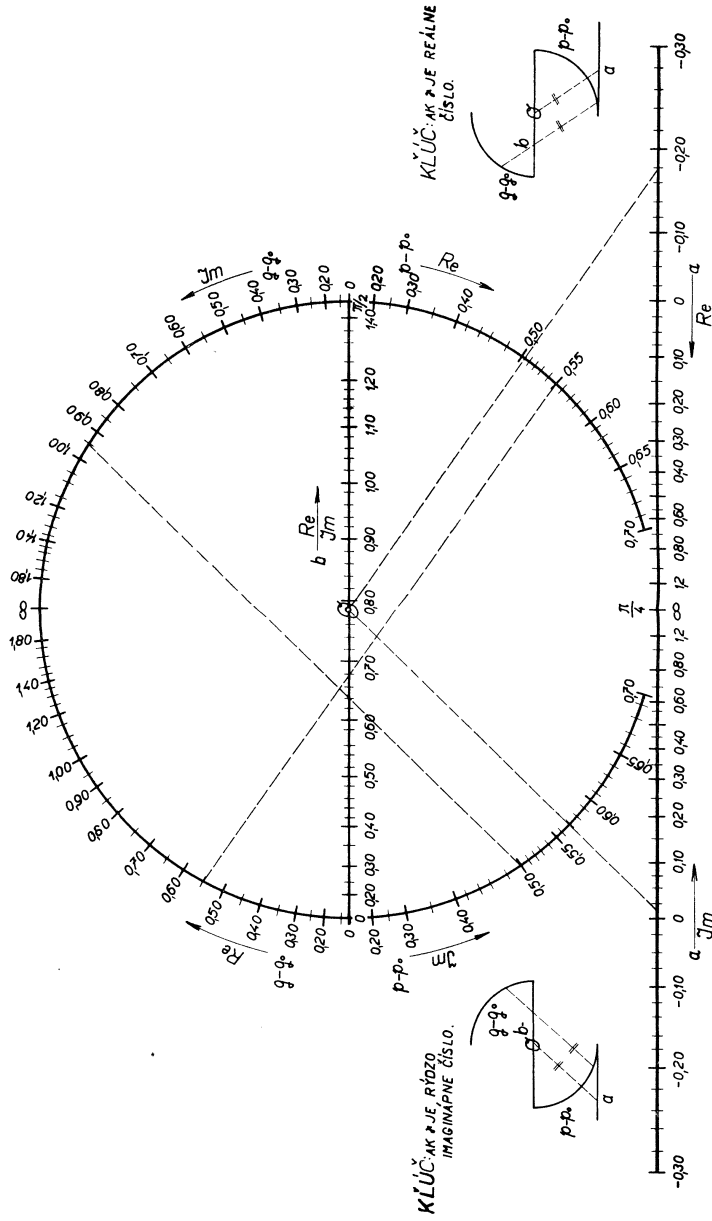
$$\begin{vmatrix} 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta, & \alpha e^{-2\text{Re}\gamma z} \\ 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0}, & 0 \\ 1, & \delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} \text{ch}^2 2Q, & -\alpha\delta \text{ch} 2Q \end{vmatrix} = 0.$$

Ďalšími úpravami dostaneme

$$(5.3) \quad \begin{vmatrix} 1, & \alpha\delta \frac{\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta}{2\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta}, & \frac{\alpha\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma(z_0-z)}}{2\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta} \\ 1, & \frac{\alpha\delta}{2}, & 0 \\ 1, & \frac{\alpha\delta}{2}, & -\frac{\alpha\delta}{2} \cos 2B \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha\delta \frac{\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta}{2\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta}, & \frac{\alpha\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma(z_0-z)}}{2\delta\beta e^{2\text{Re}\gamma z_0} - 2\beta} \\ 1, & \frac{\delta\beta}{2}, & 0 \\ 1, & \alpha\delta \frac{\cos^2 2P}{1 + \cos^2 2P}, & \alpha\delta \frac{\cos 2P}{1 + \cos^2 2P} \end{vmatrix} = 0,$$

$$Z - Z_0 = \frac{1}{j} \ln S [N/(W - W_0)]$$



Obr. 6.



$$\begin{vmatrix} 1, \alpha\delta \frac{\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}{2\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}, & \frac{\alpha\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma(z_0-z)}}{2\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta} \\ 1, \frac{\delta\beta}{2}, & 0 \\ 1, \alpha\delta \frac{\operatorname{ch}^2 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & -\alpha\delta \frac{\operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q} \end{vmatrix} = 0.$$

Z determinantov (5.3) dostávame zobrazovacie rovnice

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\alpha\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma(z_0-z)}}{2\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}, & \eta_1 &= \alpha\delta \frac{\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}{2\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= \frac{\alpha\delta}{2}, \\ \xi_3 &= -\frac{\alpha\delta}{2} \cos 2B, & \eta_3 &= \frac{\alpha\delta}{2}, \\ \xi_4 &= \alpha\delta \frac{\cos 2P}{1 + \cos^2 2P}, & \eta_4 &= \alpha\delta \frac{\cos^2 2P}{1 + \cos^2 2P}, \\ \xi_5 &= -\alpha\delta \frac{\operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & \eta_5 &= \alpha\delta \frac{\operatorname{ch}^2 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}. \end{aligned}$$

Z rovníc (5.4) pre  $\xi_4$  a  $\eta_4$  vylúčením  $P$  a s  $\xi_5$  a  $\eta_5$  vylúčením  $Q$  dostávame

$$(5.5) \quad \xi_{(P,Q)}^2 + \left( \eta_{(P,Q)} - \frac{\alpha\delta}{2} \right)^2 = \left( \frac{\alpha\delta}{2} \right)^2,$$

čo je rovnica kružnice o strede  $S(0; \alpha\delta/2)$  a polomere  $r = \alpha\delta/2$ .

Analogickým spôsobom sa tiež prevedie transformácia zobrazovacích rovníc (4.9) tak, aby premenné  $P$  a  $Q$  sa zobrazili na kružnici a dospeli by sme k týmto zobrazovacím rovniciam

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\alpha\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma(z_0-z)}}{2\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}, & \eta_1 &= \alpha\delta \frac{\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}{2\delta\beta e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0} - 2\beta}, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= \frac{\alpha\delta}{2}, \\ \xi_3 &= -\frac{\alpha\delta}{2} \cos 2B, & \eta_3 &= \frac{\alpha\delta}{2}, \\ \xi_4 &= -\alpha\delta \frac{\cos 2P}{1 + \cos^2 2P}, & \eta_4 &= \alpha\delta \frac{\cos^2 2P}{1 + \cos^2 2P}, \\ \xi_5 &= \alpha\delta \frac{\operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & \eta_5 &= \alpha\delta \frac{\operatorname{ch}^2 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}. \end{aligned}$$

Pomocou zobrazovacích rovníc (5.4) a (5.6) bol zostrojený nomogram (obr. 6). Moduly boli volené takto:  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\gamma = 1$  a  $\gamma = i$  a konštanta  $z_0 = 0$ .

Rozsah jednotlivých premenných:

$$\begin{aligned} a &\langle -0,30; 120 \rangle, \\ b &\langle 0; 1,40 \rangle, \\ (p - p_0) &\langle 0; 0,70 \rangle, \\ (q - q_0) &\langle 0; 1,80 \rangle. \end{aligned}$$

Príklad 1. Pre dané  $(p - p_0) \doteq 0,55$ ,  $(q - q_0) \doteq 0,55$ , čítame podľa kľúča  $b = 0,68$ ,  $a = -0,18$ .

Príklad 2. Pre dané  $(p - p_0) \doteq 0,50$ ,  $(q - q_0) \doteq 0,95$ , čítame podľa kľúča  $b = 0,64$ ,  $a = 0,02$ .

Príklad 1 je pre  $\gamma$  reálne a príklad 2 pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo.

#### Literatúra

- [1] *И. А. Вильнер*: О номографировании эллиптических функций и интегралов в комплексной области. ДАН СССР, Т. 55, № 9 (1947).
- [2] *И. А. Вильнер*: Номограммы систем уравнений и аналитических функций. ДАН СССР, Т. 58, № 5 (1947).
- [3] *И. А. Вильнер*: Номографирование аналитических функций. ДАН СССР, Т. 63, № 2 (1948).
- [4] *И. А. Вильнер*: Проведение номографируемой аналитической зависимости к нормальной форме. ДАН СССР, Т. 69, № 1 (1949).
- [5] *И. А. Вильнер*: Аналитическая теория номографирования функций комплексного переменного первого класса. Математический сборник, 27, 69: 1 (1950).
- [6] *И. А. Вильнер*: Номографирование систем уравнений и аналитических функций. Номографический сборник (1951).
- [7] *И. А. Вильнер*: Номограммы для вычисления эллиптических функций и интегралов. УМН, 9 : 2 (60), (1954).
- [8] *И. А. Вильнер*: О номографической аппроксимации эллиптических функций и номограммы в комплексных проективных плоскостях. Сборник Вычислительная математика АН СССР, № 7 (1961).
- [9] *И. А. Вильнер и П. Галайда*: Неэлементарные соотношения уравнений третьего номографического порядка и их автоморфные преобразования. *Matematicko-fyzikálny časopis SAV*, 1 (1964), 6—43.
- [10] *И. Н. Денисюк*: О проектировном преобразовании номограмм. Номографический сборник работ научно-исследовательского семинара по номографии (1935).
- [11] *Pleskot, V.*: *Nomografie*. SNTL, Praha 1963.
- [12] *Jurga, F.*: *Nomografia a iné grafické metódy*. SVTL, Bratislava (1963).
- [13] *Galajda P.*: Niektoré nomogramy pre výpočet analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu v obore komplexnej premennej. *Aplikace matematiky*, 9 (1964), 2, 131—148.

- [14] *Galajda P.*: Nomogram pre funkcie prvej nomografickej triedy v obore komplexnej premennej. Acta facultatis rer. nat. univ. Comenianae IX., 2 — Mathematica, 1964.
- [15] *Galajda P.*: Transformácie nomogramov analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu. Aplikace matematiky 10 (1965), 6, 489—503.
- [16] *И. А. Вильнер*: Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраизация и стереоскопическая номография. Сборник статей ВЗПИ (1958), вып. 21, 98—118.

## Резюме

### НОМОГРАММЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И КРЕСТООБРАЗНЫМИ ИНДЕКСАМИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО КЛАССА И ВТОРОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ЖАНРА

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА (PAVEL GALAJDA)

В статье занимаемся преобразованием канонических представлений из выравненных точек в представления с параллельными и крестообразными индексами. Выведены формулы и уравнения для нормальных форм (2.1), (3.1) и (4.1), на основании которых построены номограммы с фиксированной точкой в начале координат.

Разработано тоже преобразование уравнений (4.5) и (4.9), где переменные ( $P$ ) и ( $Q$ ), изображенные на параболе, преобразовались в окружность.

## Summary

### NOMOGRAMS WITH PARALLEL AND PERPENDICULAR INDICES OF ANALYTIC FUNCTIONS OF THE FIRST NOMOGRAPHIC CLASS AND SECOND GENUS

PAVEL GALAJDA

The paper treats the transformation of canonic forms of nomograms into forms with parallel and perpendicular indices. Formulas are obtained for the normal forms (2.1), (3.1), (4.1), and thence nomograms are constructed with fixed point in the origin. There are also treated transformations of equations (4.5) and (4.9), where the variables ( $P$ ), ( $Q$ ) on a parabola are transformed into circles.

*Adresa autora: C.Sc. Pavel Galajda, Katedra matematiky SF VŠT, Nám. Februárového víťazstva 9, Košice.*