Aplikace matematiky

Petr Liebl; Jiří Sedláček

Umformung von Quadratmatrizen auf quasitrianguläre Form mit Mitteln der Graphentheorie

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 1, 1–9

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102996`

UMFORMUNG VON QUADRATMATRIZEN AUF QUASITRIANGULÄRE FORM MIT MITTELN DER GRAPHENTHEORIE

PETR LIEBL und JIŘÍ SEDLÁČEK

(Eingegangen am 30. Mai 1964.)

1. Einleitung. In ökonomischen Anwendungen kommt oft folgende Aufgabe vor: Gegeben ist eine Quadratmatrix und man finde eine passende gleichzeitige Permutation der Zeilen und Spalten, solcherart, daß die Matrix quasitriangulär[1]) wird, wo die diagonalen Blocks unzerlegbare Matrizen sind.[2]) Ordnen wir der Quadratmatrix (a_{ij}) n-ter Ordnung einen (gerichteten) Graphen $\mathcal{G} = [N, R]$ zu, wo $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und R eine binäre Relation ist, so definiert, daß iRj dann und nur dann gilt, wenn $a_{ij} \neq 0$. Die oben erwähnte Aufgabe über Matrizen kann man dann mit Hilfe der Mittel der Graphentheorie formulieren und lösen: Gegeben ist ein Graph, und man sucht seine Quasikomponenten (manchmal starke Komponenten genannt)[3]) und weiter eine solche Anordnung der Quasikomponenten, bei der keine Kante aus einer Quasikomponente mit höherer Ordnungszahl in eine mit niedrigerer Zahl führt.

Die Definition der Quasikomponente als des größten Teilgraphen, dessen transitiver Abschluß vollkommen ist, bietet jedoch keine Möglichkeit, die Konstruktion effektiv durchzuführen.[4]) In unserer Arbeit ist ein Algorithmus beschrieben, mit dem die Quasikomponenten (genauer die Punktmengen der Quasikomponenten) und der transitive Abschluß des reduzierten Graphen gebildet werden. Der Gedanke der Konstruktion ist induktiv: Unter der Voraussetzung, daß die Quasikomponenten und der transitive Abschluß des reduzierten Graphen für den partiellen, die ersten k Knotenpunkte enthaltenden Graphen gebildet sind, bildet man die Quasikomponenten und den transitiven Abschluß des reduzierten Graphen für den partiellen, die ersten $k + 1$ Knotenpunkte enthaltenden Graphen.

Die Methode ist zur Anwendung auf Rechenautomaten bestimmt. Es wird voraus-

[1]) s. [2], S. 43.

[2]) s. [2], S. 321.

[3]) Die Quasikomponente wird in nächsten Absatz definiert, welcher der Erklärung auch weiterer wichtiger Begriffe der Graphentheorie gewidmet ist.

[4]) F. HARARY befaßte sich in seiner Arbeit [3] nur mit Matrizen niedriger Ordnung, wo man die Quasikomponenten ohne Schwierigkeiten „mit der Hand“ auffinden kann.

gesetzt, daß die ganze gegebene Matrix im operativen Speicher nicht Platz findet, und darum ist die Methode so gewählt, daß es genügt, die ganze Matrix nur einmal „durchzulesen". Es ist jedoch notwendig, daß die von Null verschiedenen Elemente in bestimmter Reihenfolge stehen. Das Element a_{ij} muß vor a_{kl} stehen, sobald $\max(i, j) < \max(k, l)$ ist. Die Nullelemente brauchen nicht angeführt zu werden.

Die beschriebene Methode kann zur sogenannten Triangulierung ökonomischer Matrizen benutzt werden. Ebenso kommt sie zur Geltung, wo es nötig ist, eine Matrix hoher Ordnung mit genügend wenig von Null verschiedenen Elementen zu invertieren, bei der erwartet werden kann, daß so eine gleichzeitige Permutation der Zeilen und Spalten existiert, durch welche die Matrix in quasitrianguläre Form mit diagonalen Feldern wo möglich niedriger Ordnung übergeht, wodurch das Invertieren wesentlich erleichtert wird. Es ist allerdings nötig darauf hinzuweisen, daß zu diesem Zweck (vereinfachte Inversion großer Matrizen) unabhängige Permutationen der Zeilen und Spalten, die mittels der beschriebenen Methode nicht gefunden werden können, genauso wirksam sind.

2. Begriffe aus der Graphentheorie. Da die Begriffe, die wir hier benützen, bei verschiedenen Autoren unter verschiedenen Namen erscheinen, und da auch die Symbolik nicht einheitlich ist, beginnen wir mit ein paar Definitionen und vereinbaren auch die entsprechende Symbolik.

Wenn in der endlichen nicht leeren Menge M eine binäre Relation R gegeben ist, ist von ihrem (*gerichteten*) *Graphen* $\mathcal{G} = [M, R]$ die Rede. Die Elemente der Menge M nennen wir *Knotenpunkte* dieses Graphen und die Paare (x, y), $x \in M$, $y \in M$, für die xRy ist, nennen wir *Kanten* des Graphen. Wenn xRx ist, heißt (x, x) *Schlinge*.

Wenn $\mathcal{G}_1 = [M_1, R_1]$ und $\mathcal{G}_2 = [M_2, R_2]$ zwei Graphen sind, schreiben wir $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$ dann und nur dann, wenn gleichzeitig $M_1 = M_2$, $R_1 = R_2$ ist.

Wenn der Graph $\mathcal{G} = [M, R]$ die Eigenschaft hat, daß für beliebige drei zu M gehörige Elemente x, y, z,

$$(xRy,\ yRz) \Rightarrow xRz$$

gilt, nennen wir ihn *transitiv*.

In der Theorie der gerichteten Graphen ist der Begriff der Verbindung zwischen zwei Knotenpunkten bekannt. Es seien a, b zwei Knotenpunkte des Graphen $\mathcal{G} = [M, R]$. Nehmen wir an, es existiert eine ganze nicht negative Zahl d und eine endliche Folge von Knotenpunkten des Graphen $\mathcal{G}$

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, x_d = b\,, \tag{1}$$

wobei x_0Rx_1, x_1Rx_2, $\ldots$, $x_{d-1}Rx_d$ gilt. Dann nennen wir die Folge (1) *Verbindung* zwischen den Knotenpunkten a, b und die Zahl d die *Länge* dieser Verbindung.

Sei $\mathcal{G} = [M, R]$ ein beliebiger Graph, und definieren wir den neuen Graphen $\bar{\mathcal{G}} = [M, \bar{R}]$ folgendermaßen: Für $x \in M$, $y \in M$ sei $x\bar{R}y$ dann und nur dann, wenn im Graphen $\mathcal{G}$ eine Verbindung zwischen x und y von positiver Länge existiert. Den

Graphen $\overline{\mathscr{G}}$ nennen wir den *transitiven Abschluß* des Graphen $\mathscr{G}$. *Azyklisch* nennen wir einen Graphen, dessen transitiver Abschluß keine Schlinge enthält. Es ist leicht einzusehen, daß der transitive Abschluß eines beliebigen Graphen transitiv ist und daß für jeden transitiven Graphen $\mathscr{G}$ stets $\overline{\mathscr{G}} = \mathscr{G}$ gilt.

Es sei der Graph $\mathscr{G} = [M, R]$ gegeben. Es sei $A \subset M$ eine nicht leere Menge von Knotenpunkten dieses Graphen. Bilden wir den Graphen $\mathscr{G}_A = [A, R']$ folgenderweise: Für $x \in A$, $y \in A$ nehmen wir $xR'y$ dann und nur dann, wenn xRy ist. Dann sagen wir, $\mathscr{G}_A$ sei der durch $\mathscr{G}$ auf A *induzierte* Graph.

Erwähnen wir die Definition der Quasikomponente eines gerichteten Graphen. Gegeben sei der Graph $\mathscr{G} = [M, R]$ und A sei eine nicht leere Menge $A \subset M$, die folgende Eigenschaften hat: 1. Für jedes $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$, gilt $x\overline{R}y$. 2. Es existiert keine Menge B, die A als echte Teilmenge enthält $(A \subset B \subset M)$ und die auch die Eigenschaft $(x \in B,\ y \in B,\ x \neq y) \Rightarrow x\overline{R}y$ hat. Dann nennen wir den durch $\mathscr{G}$ auf A induzierten Graphen *Quasikomponente* des Graphen $\mathscr{G}$. Wenn $\mathscr{G}_i = [A_i, R_i]$, $i = 1, 2, \ldots, s$ alle Quasikomponenten des Graphen $\mathscr{G} = [M, R]$ sind, ist $\{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$ offensichtlich eine Zerlegung der Menge M.[5] Bezeichnen wir diese Zerlegung N und definieren wir den neuen Graphen $\mathscr{G}^* = [N, R^*]$ folgenderweise: $A_i R^* A_j$ sei dann und nur dann, wenn $i \neq j$ ist und gleichzeitig solche x, y existieren, daß $x \in A_i$, $y \in A_j$, xRy gilt. Den Graphen $\mathscr{G}^*$ nennt man gewöhnlich den *reduzierten* zu $\mathscr{G}$ gehörigen Graphen.

3. Einige Hilfsbehauptungen. Wir führen fünf Hilfssätze an, deren Beweise einfach sind; der Leser, der den Inhalt des letzten Absatzes gut durchgedacht hat, kann sie selber durchführen.

Lemma 1. *Der Graph $[M, R]$ habe die Quasikomponenten $[A_i, R_i]$, $i = 1, 2, \ldots, u$ und der Graph $[M, \overline{R}]$ die Quasikomponenten $[B_i, S_i]$, $i = 1, 2, \ldots, v$. Dann ist $u = v$ und es gilt $\{A_1, A_2, \ldots, A_u\} = \{B_1, B_2, \ldots, B_v\}$.*

Lemma 2. *Der reduzierte, zu dem transitiven Abschluß von $\mathscr{G}$ gehörige Graph ist gleich dem transitiven Abschluß des reduzierten zu $\mathscr{G}$ gehörigen Graphen.*

Lemma 3. *M und M' seien endliche nicht leere Mengen $M = M' \cup \{a\}$, a non $\in M'$. Der Graph $\mathscr{G} = [M, R]$ habe die Eigenschaft, daß der auf M' induzierte Graph transitiv ist. Bilden wir $\mathscr{G}^{(1)} = [M, R^{(1)}]$ wie folgt: $\mathscr{G}^{(1)}_{M'} = \mathscr{G}_{M'}$, und für $x \in M$ ist*

$$xR^{(1)}a \Leftrightarrow xRa \quad \textit{oder} \quad xRy,\ yRa \quad \textit{für ein} \quad y \in M'\,.$$

$$aR^{(1)}x \Leftrightarrow aRx \quad \textit{oder} \quad aRy,\ yRx \quad \textit{für ein} \quad y \in M'\,.$$

[5]) D. h. für $1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq j \leqq s$, $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $\bigcup_{i=1}^{s} A_i = M$.

Bilden wir weiter $\mathscr{G}^{(2)} = [M, R^{(2)}]$ *so, daß für* $x \in M$, $y \in M$

$$xR^{(2)}y \Leftrightarrow xR^{(1)}y \quad \text{oder} \quad xR^{(1)}a,\, aR^{(1)}y \quad \text{ist.}$$

Dann gilt $\mathscr{G}^{(2)} = \overline{\mathscr{G}}$.

Lemma 4. *M, M', a seien wie in Lemma 3 gegeben. Der Graph* $\mathscr{G} = [M, R]$ *habe die Eigenschaft, daß der induzierte Graph* $\mathscr{G}_{M'}$ *azyklisch ist. Es sei B die Menge der* $x \in M$, *für die* $x\overline{R}x$ *ist. Es sei* $A = B \cup \{a\}$. *Die Quasikomponenten des Graphen* $\mathscr{G}$ *sind dann die folgenden: a)* $\mathscr{G}_A$; *b) die Mengen* $\{y\}$, *wo y diejenigen* $y \in M'$ *sind, für die nicht* $y\overline{R}y$ *gilt.*

Lemma 5. *Der Graph* $\mathscr{G} = [M, R]$ *sei transitiv und habe die Quasikomponenten* $[A_i, R_i]$, $i = 1, 2, \ldots, s$. *Wählen wir* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *so, daß* $x_i \in A_i$ *für* $i = 1, 2, \ldots, s$ *ist und setzen wir* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$. *Der induzierte Graph* $\mathscr{G}_X = [X, R_X]$ *und der reduzierte Graph* $\mathscr{G}^* = [N, R^*]$ *haben offensichtlich dieselbe Anzahl von Knotenpunkten. Es gilt*

$$x_i R_X x_j \Leftrightarrow A_i R^* A_j\,.$$

4. Der Hauptsatz. Kehren wir zu unserer ursprünglichen Aufgabe zurück. Der Algorithmus, dessen Zweck es ist, die Quasikomponenten und den transitiven Abschluß des reduzierten Graphen für einen gegebenen Graphen mit m Knotenpunkten aufzusuchen, besteht aus $m - 1$ Schritten. Im folgenden Satz beschreiben wir den k-ten Schritt; der Beweis des Satzes ergibt sich aus den im letzten Absatz angeführten Hilfssätzen.

Satz. *Es sei* $\mathscr{G} = [M, R]$, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. *Für* $1 \leqq n \leqq m$ *bezeichnen wir* $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ *und* $\mathscr{G}_n = [M_n, R']$ *den durch* $\mathscr{G}$ *auf* M_n *induzierten Graphen. Es seien* $1 \leqq k \leqq m - 1$ *und* A_i *die Punktmengen aller Quasikomponenten* $[A_i, R_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ *des Graphen* $\mathscr{G}_k$. *Das Element* x_i *sei so gewählt, daß* $x_i \in A_i$ *für* $i = 1, 2, \ldots, s$ *ist. Setzen wir* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ *und* $\mathscr{G}^{(0)}$ *sei der durch* $\overline{\mathscr{G}}_k$ *auf X induzierte Graph* $\overline{\mathscr{G}}_X$ *mit weggelassenen Schlingen. Setzen wir* $x_{s+1} = k + 1$ *und* $X' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}\}$.

1. *Bilden wir den Graphen* $\mathscr{G}^{(1)} = [X', R^{(1)}]$ *folgenderweise: a) für den induzierten Graphen* $\mathscr{G}_X^{(1)} = \mathscr{G}^{(0)}$; *b) für* $i = 1, 2, \ldots, s$ *setzen wir* $x_i R^{(1)} x_{s+1}$, *wenn ein solches* $y_i \in A_i$ *existiert, daß* $y_i R(k + 1)$ *gilt, und ähnlich* $x_{s+1} R^{(1)} x_i$, *wenn ein solches* $y_i \in A_i$ *existiert, daß* $(k + 1)\, R y_i$ *gilt.*

2. *Bilden wir* $\mathscr{G}^{(2)} = [X', R^{(2)}] = \overline{\mathscr{G}^{(1)}}$.

3. *Die Menge X' zerfällt in die zwei Mengen* $A = \{a \in X', aR^{(2)}a\}$ *und* $B = \{b \in X', b \text{ non } R^{(2)} b\}$.

α) *Wenn* $A = \emptyset$, *setzen wir* $B_i = A_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $B_{s+1} = \{k + 1\}$, $Y = X'$ *und* $\mathscr{G}^{(3)} = \mathscr{G}^{(2)}$.

β) Wenn $A \neq \emptyset$ ist, wählen wir ein $x_l \in A$. Setzen wir $Y = B \cup \{x_l\}$, und für diejenigen i, für die $x_i \in B$ ist, setzen wir $B_i = A_i$. Endlich sei $B_l = \{k+1\} \cup \bigcup A_i$, wo die Vereinigung über alle i genommen wird, für die $x_i \in A$ ist. $\mathscr{G}^{(3)}$ sei der Graph $\mathscr{G}_Y^{(2)}$ mit hinweggelassener Schlinge (x_l, x_l).

Dann gilt:

I. *für jedes i, für das $x_i \in Y$ gilt, ist B_i die Punktmenge einer Quasikomponente des Graphen $\mathscr{G}_{k+1}$;*

II. *$x_i \in B_i$ für $x_i \in Y$;*

III. *$\mathscr{G}^{(3)}$ ist der durch $\overline{\mathscr{G}}_{k+1}$ auf Y induzierte Graph mit weggelassenen Schlingen.*

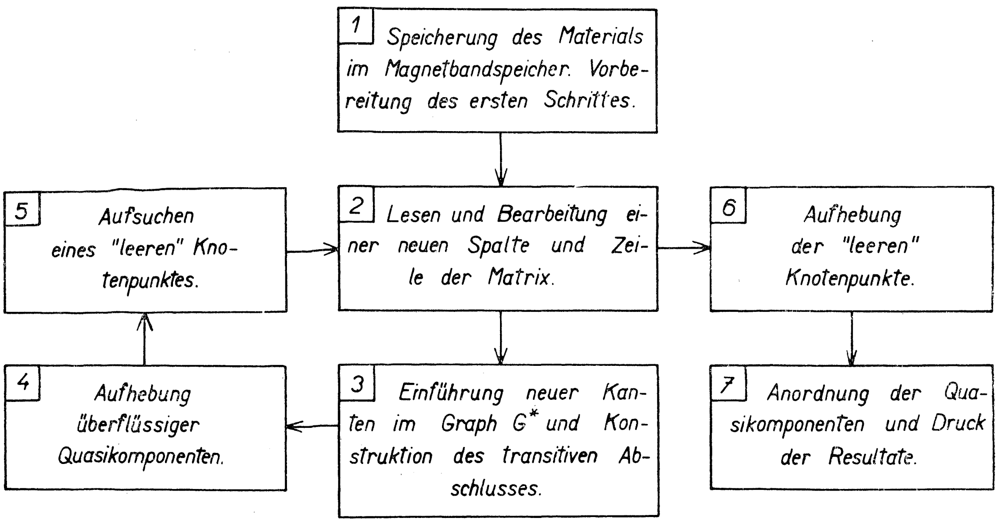

Abb. 1.

5. Beschreibung des Algorithmus. Der Algorithmus ist in groben Zügen im Schema (s. Abb. 1) beschrieben. Es ist zu sehen, daß er aus drei Teilen besteht: dem einleitenden Teil, dem Hauptzyklus und dem Schluß. In der Einleitung (Block 1) wird die Induktionsvoraussetzung für den Hauptzyklus vorbereitet. Der erste Knotenpunkt wird in die erste Quasikomponente eingereiht, als frei wird die zweite Quasikomponente bezeichnet. Der Induktionsschritt arbeitet folgenderweise: Wir nehmen an, die ersten k Knotenpunkte des Graphen sind in t Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_t$ verteilt, von denen wenigstens eine leer ist; die nicht leeren bilden die Punktmengen der Quasikomponenten des Graphen $\mathscr{G}_k$. Weiter wird die Kenntnis des Graphen $\mathscr{G}^*$ mit t Knotenpunkten $a_1, a_2, \ldots, a_t$ vorausgesetzt, der folgende Eigenschaft hat: Der durch $\mathscr{G}^*$ auf $\{a_i \mid A_i \neq \emptyset\}$ induzierte Graph ist der transitive Abschluß des reduzierten Graphen für Graphen $\mathscr{G}_k$.

Schließlich sei so ein Knotenpunkt a_r bekannt, daß $A_r = \emptyset$. 1) Zuerst (s. Block 2 und 3, Abb. 1) lassen wir alle aus, oder in den Knotenpunkt a_r führenden Kanten fort und fügen (auf Grund der Kenntnis der $(k + 1)$-ten Zeile und Spalte der ursprünglichen Matrix) die Kante (a_r, a_i) bzw. (a_j, a_r) dann und nur dann zu, wenn in A_i bzw. A_j ein Knotenpunkt existiert, aus dem bzw. in den im Graphen $\mathscr{G}$ eine Kante in den, bzw. aus dem $(k + 1)$-ten Knotenpunkt führt. 2) Dann schließen wir den entstandenen Graphen transitiv ab (Block 3). Da die Bedingungen des 3. Lemma erfüllt sind, kann das in Lemma 3 beschriebene Verfahren benützt werden. 3) Alle Mengen A_i, bei derer Knotenpunkt eine Schlinge entstanden ist, ziehen wir zusammen. Wir reihen also alle bisher in ihnen liegenden Knotenpunkte des Graphen $\mathscr{G}$ in die Menge A_r um. Zum Schluß beseitigen wir die Schlingen. Wenn sich keine Schlinge bildet, bildet der Knotenpunkt $(k + 1)$ allein die r-te Quasikomponente (Block 4). 4) Schließlich stellen wir die kleinste natürliche Zahl $i(1 \leqq i \leqq t)$ fest, für die $A_i = \emptyset$ ist, und bereiten für den nächsten Schritt $r = i$ vor. Wenn kein solcher „leerer" Index existiert, schaffen wir ihn dadurch, daß wir die Zahl der Knotenpunkte des Graphen $\mathscr{G}^*$ um Eins vergrößern und setzen $r = t + 1$ (Block 5).

Aus dem Hauptsatz ergibt sich, daß nach der Durchführung dieses Induktionsschrittes alle Bedingungen der Induktionsvoraussetzung für den Graphen $\mathscr{G}_{k+1}$ erfüllt sind. Es its auch zu sehen, daß es gesichert ist, daß die Zahl der eingeführten Quasikomponenten nicht unnütz wächst. Wenn die ganze Matrix (alle ihre von Null verschiedenen Elemente) durchgelesen, und der letzte Induktionsschritt durchgeführt ist, sind bereits sowohl die Punktmengen der Quasikomponenten, als auch der transitive Abschluß des reduzierten, zu $\mathscr{G}$ zugeordneten Graphen, der aus dem Graphen $\mathscr{G}^*$ durch Entfernen der „leeren" Knotenpunkte entsteht (Block 6), vorhanden.

Jetzt suchen wir (Block 7) in diesem Graphen den Knotenpunkt, in den keine Kante führt (so einer existiert immer). Die zugehörige Quasikomponente bezeichnet man als die erste, darauf lassen wir alle aus diesem Knotenpunkt führenden Kanten fort. Dann findet man wieder einen Knotenpunkt, in den keine Kante führt, bezeichnet ihn als den zweiten, und dieses Verfahren wird fortgesetzt, solange nicht alle Quasikomponenten erschöpft sind.

So bekommen wir eine Anordnung der Quasikomponenten, die die ursprüngliche Aufgabe löst: Wenn wir die Knotenpunkte des ursprünglichen Graphen und gleichzeitig auch die Zeilen und Spalten der Ausgangsmatrix so numerieren, daß wir zuerst alle Knotenpunkte der ersten Quasikomponente, dann alle aus der zweiten usw., nehmen, wird die entstandene Matrix quasitriangulär mit unzerlegbaren Feldern auf der Hauptdiagonale.

6. Ein Beispiel. Das Programm wurde für den Rechenautomaten ELLIOTT 803 B ausgearbeitet. Wir wählten als Beispiel eine Matrix 14. Ordnung, in der wir uns bemühten, alle Möglichkeiten einzubauen, die Schwierigkeiten machen könnten (s. Abb. 2). Die Werte der von Null verschiedenen Elemente sind belanglos, und wurden daher gleich 2 gesetzt. Leere Stellen bezeichnen Nullen. Durch stärkere

Linien ist die Ordnung dargestellt, in der die Elemente auf dem Lochstreifen auftreten müssen. Der zugehörige Graph ist auf der Abb. 3. Der Lochstreifen, auf dem diese Matrix verschlüsselt ist, ist in Tab. 1. Die erste und die letzten sechs Zahlen sind nur von formaler Bedeutung.

Tab. 1.

1	3	2	2	4	2	2	4	3	2	2	4	2	1	6	2	7	1	2
5	7	2	9	6	2	6	9	2	10	8	2	8	10	2	6	10	2	
11	7	2	1	11	2	13	3	2	13	12	2	4	13	2	14	8		
2	1	14	2	2	14	2	15	15	0	0	0	0						

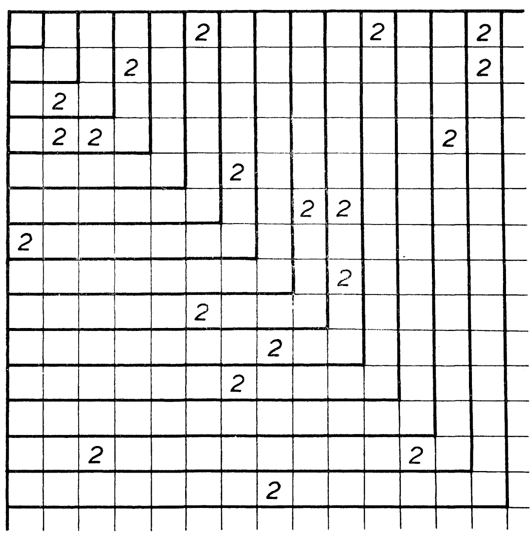

Abb. 2.

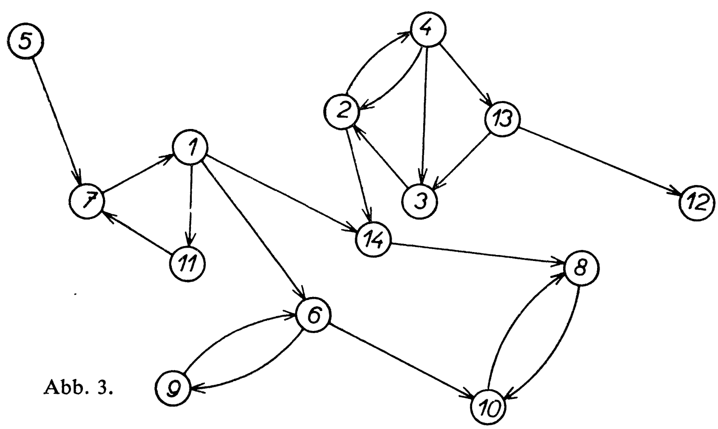

Abb. 3.

Das Ergebnis, in der vom Rechenautomaten ELLIOTT gedruckter Form, ist in Tab. 2. Außerdem berechneten wir einige praktisch wichtige Beispiele für das Ökonomische Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften.

Tab. 2.

1.	QUASIKOMPONENTE:	5 ,
2.	QUASIKOMPONENTE:	1 , 7 , 11 ,
3.	QUASIKOMPONENTE:	6 , 9 ,
4.	QUASIKOMPONENTE:	2 , 3 , 4 , 13 ,
5.	QUASIKOMPONENTE:	14 ,
6.	QUASIKOMPONENTE:	8 , 10 ,
7.	QUASIKOMPONENTE:	12 ,

Es zeigt sich auch die Möglichkeit der Anwendung unseres Algorithmus bei soziologischen Untersuchungen.

Literatur

[1] *A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn:* Two algorithms for bipartite graphs, Journal of SIAM, vol. 11, March 1963, No. 1, 183—194.

[2] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц, Москва, 1953.

[3] *F. Harary:* A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning, Numerische Mathematik 4, 128—135 (1962), 2. Heft.

Výtah

PŘEVEDENÍ ČTVERCOVÉ MATICE NA QUASITROJÚHELNÍKOVÝ TVAR POMOCÍ GRAFŮ

PETR LIEBL a JIŘÍ SEDLÁČEK

V článku je popsán algoritmus pro nalezení quasikomponent konečného orientovaného grafu a vhodné jejich uspořádání. Tato úloha se vyskytuje jako pomocná např. při řešení úloh z ekonomie a řízení a týká se tam nejvýhodnějšího současného přečíslování řádků a sloupců velkých matic. Na základě algoritmu byl sestaven program pro počítač ELLIOTT 803 B, přičemž byl kladen důraz na ekonomické využití vnější paměti. Program (v jazyce Elliott-Autocode 803 A 103) je k dispozici v Matematickém ústavu ČSAV, Praha 1, Žitná 25.

Резюме

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ К КВАЗИТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ ПОСРЕДСТВОМ ГРАФОВ

ПЕТР ЛИБЛ и ЙИРЖИ СЕДЛАЧЕК (PETR LIEBL, JIŘÍ SEDLÁČEK)

В статье приведен алгорифм для нахождения квазикомпонент (называемых тоже сильными компонентами) любого направленного графа. Этот вопрос возникает в связи с решением некоторых проблем экономического характера и касается в некотором смысле более выгодной перестановки строк и столбцов матриц высокого порядка.

На основе этого алгорифма была составлена программа для БЭСМ ELLIOTT 803 B, причем внимание уделялось экономии времени при использовании внешней памяти. Программу (написанную в автокоде ELLIOTT 803 A 103) можно получить в Математическом институте ЧСАН, Praha 1, Žitná 25, Чехословакия.

Anschrift der Autoren: Petr Liebl, Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1. — *Jiří Sedláček*, Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.