Karel Čulík

Různé. O postavení matematiky. O aplikované matematice

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 6, 504–508

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102991`

RŮZNÉ

O POSTAVENÍ MATEMATIKY

O APLIKOVANÉ MATEMATICE*)

KAREL ČULÍK

Budu hovořit o vztahu mezi matematikou a jinými vědními či technickými obory, a to nejen z hlediska matematiky, ale především z hlediska těch nematematických oborů, které matematiku potřebují a které ji ovšem i podle použitelnosti hodnotí. Z potřeb a požadavků ostatních oborů na matematiku přirozeně vyplynou některé požadavky na výuku matematiků určených k práci mimo vlastní matematická pracoviště, např. v průmyslu, v resortních výzkumných ústavech, ve výpočtových střediscích atd.

1. Hodnocení matematiky. Měl jsem v posledních letech řadu příležitostí důvěrněji se seznámit s odborníky různých oborů, pro něž matematika je pomocnou disciplínou, Setkal jsem se při tom jak s krajně nepříznivým hodnocením současné matematiky i současných matematiků, tak i se zcela opačným přeceňováním možností matematiky.

Nepříznivé hodnocení, někdy skrývané, ale jindy otevřené a dobře zdůvodněné, se nikdy netýkalo matematiky vůbec. Konkrétní námitky týkající se jednotlivých matematických disciplín lze zahrnout pod jedinou zcela obecnou výtku:

V matematice nejsou rozřešeny ty problémy, před nimiž jednotlivé obory dnes stojí; při tom jde skutečně o problémy matematické a někdy je situace dokonce taková, že se na příslušných problémech v matematice vůbec nepracuje.

Stává se, že tato námitka je vznášena neoprávněně, totiž tehdy, když prostě nematematik není o současném stavu matematiky dostatečně informován. Tato výtka se vznáší nejčastěji ze strany exaktních věd a technických oborů, kde se matematiky využívá dávno. Naproti tomu s přeceňováním matematiky jsem se setkal jen ze strany humanitních oborů, v nichž se matematiky začíná využívat teprve v poslední době.

Uvedená výtka značně kontrastuje s míněním některých matematiků, kteří odhadují, že dnes se v matematice pracuje na problémech, jichž bude využito až za 20—50 let.

Nelze samozřejmě pochybovat o tom, že v matematice (ale i v jiných oborech) bylo nashromážděno nesmírné množství nových poznatků. Tím více však zaráží — když matematika má předstih — že mezi nimi nejsou většinou ty, které potřebují jiné obory. To je však zcela pochopitelné, protože matematika — ponechána sama sobě — si klade a řeší docela jiné problémy než jsou ty, které přicházejí od jiných oborů. Právo matematiky na autonomní vývoj a celou současnou matematiku zcela jasně zhodnotil J. v. Neumann takto:

„Rozvíjí-li se matematický obor příliš vzdálen od svého empirickeho pramene, nebo když ještě k tomu druhá i třetí generace je ovlivňována ideami pocházejícími ze skutečnosti pouze nepřímo, dostává se do vážného nebezpečí. Více a více estetizuje, stává se víc a více l'art pour l'artismem. To nemusí být zlé, pokud je tento obor obklopen věcmi majícími úzký vztah ke

*) Jde o upravenou přednášku, která byla proslovena na II. absolventském sjezdu Přírodovědecké fakulty J. E. Purkyně v Brně, konaném 26. a 27. ledna 1962 v Brně.

zkušenosti nebo pokud je pod vlivem lidí s mimořádně vyvinutým citem. Je však vždy veliké nebezpečí v tom, že se obor začne rozvíjet cestou nejmenšího odporu, že proud, příliš vzdálený od svého pramene, se rozdělí do množství bezvýznamných větví, a že celý obor se stane nesystematickou hromadou detailů a složitostí. Jinými slovy ve velké vzdálenosti od svého empirického pramene, nebo po mnohém abstraktním sebeoplodňování, je matematický obor v nebezpečí degenerace."

„Kdykoliv však bylo tohoto stadia dosaženo, zdá se mně, že jediným prostředkem ozdravění je návrat k prameni: nové více či méně přímé načerpání empirických idejí. Jsem přesvědčen, že toto vždy bylo nezbytnou podmínkou pro uchování svěžesti a životnosti a že to zůstane stejně platné i v budoucnosti."

2. Aplikace matematiky a aplikovaný výzkum. Shora uvedená výtka se vlastně týká aplikovaného výzkumu v matematice neboli — jak se někdy říká — aplikované matematiky, ale nikoli výzkumu základního neboli tzv. čisté matematiky. U nás se toho rozlišování mezi matematikou čistou a aplikovanou nevžilo a ono také nevystihuje skutečný stav věcí. Lze totiž zřejmě říci, že

$$\text{aplikovaná matematika} = \text{matematika} + \text{interpretace}$$

a to interpretace matematických (tj. abstraktních) symbolů, pojmů, podmínek i výsledků v nějakém modelu, jímž je pravidelně nějaký nematematický vědní či technický obor, v němž lze experimentálně ověřit matematické výsledky.

Jinými slovy lze říci, že čistá matematika se omezuje pouze na studium syntaxe matematického jazyka (tj. bez ohledu na jeho možné sémantiky, např. bez ohledu na to, jaký je fyzikální význam derivace či integrálu apod.), zatím co v aplikacích ke studiu syntaxe přistupuje ještě navíc určitá sémantika.

V každém případě v aplikacích matematiky se k samotné matematice přibírá cosi navíc, něco nematematického a matematickou přesností obvykle nezvládnutelného a nesouměřitelného. Proto je také aplikovaný výzkum (a to nejen v matematice, ale v každém jiném oboru) zásadně obtížnější než výzkum základní. S tím souvisí přirozeně i ta okolnost, že aplikovaný výzkum vždy předpokládá zvládnutí — i když ne zcela úplné a podrobné — alespoň dvou vědních či technických oborů a je tedy náročnější. S dalším rozvojem vědních a technických oborů, shromažďováním poznatků, budou zřejmě také nároky na aplikovaný výzkum stoupat.

Ostatně charakter aplikovaného výzkumu v matematice samé má řada matematických disciplín jako diferenciální geometrie nebo algebraická topologie apod., neboť jde vlastně o aplikovanou analýzu v geometrii nebo o aplikovanou algebru v topologii (v těchto matematických oborech odpadá všem experimentální ověřování). Takovýmto aplikovaným výzkumem se svazují a ovlivňují dva matematické obory a na jeho závažnost i nadějnost upozorňoval už H. Poincaré, když vybízel ke studiu styčných či hraničních oblastí dvou nebo více oborů.

K novým výsledkům v aplikovaném matematickém výzkumu lze dojít dvojí cestou.

Buď se nejdříve vybuduje matematika a teprve dodatečně a později se hledají interpretace, které ukazují, že matematické výsledky dávají řešení konkrétních úloh z jiného oboru, anebo naopak napřed jsou zadány konkrétní úlohy, z nich se abstrakcí formulují matematické úlohy a teprve pak se tyto úlohy řeší, tj. teprve dodatečně a jaksi na objednávku se buduje matematika. V prvním případě lze hovořit o aposteriorních aplikacích a ve druhém o aplikacích apriorních.

V druhém případě je nutno rozlišit dvě extrémní možnosti: totiž buď je řešení příslušné úlohy už známé, takže obtíže řešení daného problému tkvěly jenom v abstrakci a matematické formulaci problému a celé řešení není pro matematiku žádným přínosem, nebo řešení příslušné úlohy známé není, takže je třeba řešit nový matematický problém, a proto zde přistupují i potíže matematické a také sama matematika se obohacuje. Přitom je třeba znovu připomenout, že interpretovat abstraktní pojmy v daném oboru nebo naopak abstrahovat z daného oboru matematické pojmy může jen takový pracovník, který ovládá jak daný obor, tak matematiku.

Právě aposteriorní aplikovaný výzkum mají na mysli stoupenci názorů o předstihu v základním výzkumu, neboť základní výzkum jiné aplikace nepřipouští. Přitom se ovšem předpokládá, že v základním matematickém výzkumu se řeší pouze ty problémy, které si matematika a matematikové kladou sami sobě.

Naproti tomu J. V. Neumann má na mysli apriorní aplikovaný výzkum, když hovoří o nezbytnosti empirických pramenů. Přitom jde samozřejmě o samotnou matematiku a to nikoli o to, jak se v matematice pracuje, ale o to, na čem se pracuje, které problémy se řeší a odkud se tyto problémy vzaly. A Neumann jasně a výslovně hovoří o degeneraci „matematiky pro matematiku".

Jestliže definujeme matematika jako člověka, který uveřejnil alespoň tři práce, které byly recensovány v Mathematical Reviews, pak lze u nás odhadnout, že asi 60% — a snad i více — matematiků se věnuje jenom základnímu matematickému výzkumu. To je také vysvětlení nesrovnalostí mezi uvedenou výtkou a předstihem.

Víra, že autonomním a na jiných oborech nezávislým vývojem vyřeší matematika zavčas a dokonce předem všechny matematické problémy, ke kterým povede rozvoj ostatních oborů, je jakousi Leibnizovou vírou v predestinovanou harmonii. Zkušenost shrnutá v uvedené výtce ukazuje, že tato víra je neoprávněná, že je iluzí. Proto je třeba matematiku rozvíjet nejen autonomně, ale také s ohledem na ostatní obory, a to podstatně více než tomu zatím je (o optimálních proporcích je zatím zbytečné hovořit, neboť dosáhnout jakékoliv změny ve prospěch apriorního aplikovaného výzkumu si vyžádá mnoha let; význačnější změny lze dosáhnout jen za cenu změn v koncepci výuky matematiky na universitách a za cenu změn v hodnocení výsledků).

3. Hodnocení matematických výsledků. Při hodnocení výsledků v základním matematickém výzkumu, tedy bez ohledu na jejich aplikace (rozumí se bez ohledu na mimomatematické aplikace), není mezi matematiky jednotnosti, která z kritérií obvykle užívaných jsou rozhodující. Jde obvykle o tato kritéria: a) původnost objevu, b) neočekávanost objevu, c) souvislost objevu se známými výsledky nebo se starými problémy, d) složitost a obtížnost objevu nebo jeho řešení a užitého formálního aparátu, e) jednoduchost a elegance objevu a příslušných podmínek platnosti, f) rozsah prací na celém objevu apod.

Matematikové jsou jednomyslní v tom, že objev musí být skutečně původním výsledkem, tj. novým a dosud nikde neuveřejněným, což se dnes v záplavě matematické literatury dá rozhodnout dosti obtížně. Velmi snadno se původnosti dosahuje na úkor neočekávanosti objevu. Ve většině výsledků základního matematického výzkumu totiž jde buď o zobecnění výsledků známých, nebo o vyšetření otázek či teorií, které dostaneme malou úpravou podmínek v otázkách či teoriích dobře známých. Je jasné, že neočekávanost je zde velice nepatrná. Daleko větší neočekávanost bývá spojena s objevem, kterým se uvádějí v souvislost hodně si vzdálené výsledky. To se nejčastěji stává u výzkumu, který má aplikovaný charakter uvnitř samotné matematiky. Tehdy se uvádí v souvislost výsledky z různých matematických oborů. Poslední tři kritéria mají trochu jiný charakter, neboť se týkají spíše technické a řemeslné stránky objevu či řešení. Jsou snadněji měřitelná, neboť se týkají pracnosti, a tedy jakési mechanizovatelné činnosti. Naproti tomu první tři kritéria se týkají spíše nápadu, nového hlediska či nové myšlenky. Zde se těžko co měří a srovnává.

Aplikovaný matematický výzkum se nedělá pro samotnou matematiku, nýbrž pro příslušný nematematický obor. Matematika je zde prostředkem a nikoli cílem. Plně hodnotné výsledky aplikovaného výzkumu jsou vlastními objevy v příslušném oboru a jako takové by měly být hodnoceny, tj. hlavním kritériem by mělo být jak dalece objev řeší původní nematematický problém daného oboru. To, je-li využito matematických výsledků, které jsou známé, nebo je-li využito nově vybudované matematické teorie, by mělo být zcela podružné. Toto je skutečné stanovisko odborníků v oboru, jehož se aplikace týkají. Je tedy zcela pochopitelné, že dochází k neshodám v hodnocení ze strany matematiků a nematematiků.

Vezmeme-li v úvahu ty obory, v nichž se matematiky teprve začíná užívat, pak se často stává, že v matematických aplikacích v takovém oboru je využito jednoduchých a známých matematických výsledků, takže po matematické stránce jde o triviality. A obvinění z triviálnosti je snad nejtěžším nařčením v matematickém cechu. Ze strachu před triviálností vzniklo u nás mnoho nestravitelného a nesrozumitelného. To však v našem případě znamená, že v některých oborech se nedosahuje přesných matematických výsledků, a obecněji, některé problémy v aplikovaném matematickém výzkumu se neřeší nikoliv proto, že by na to dosavadní stav matematiky nestačil, tj. proto, že by šlo o problémy mimořádně obtížné, nýbrž právě naopak proto, že by řešení mohlo vyjít triviální a matematicky ne dosti zajímavé.

Tato absurdní situace není vymyšlenou hříčkou slov. Stojí před ní nejeden matematik, ale zejména před ní stojí posluchači a mladí absolventi matematických směrů, s nimiž mám dosti příležitosti hovořit. Jako příklad vezměme matematickou logiku, do níž se zahrnují velmi abstraktní a složité disciplíny, jako je axiomatická teorie množin na jedné straně, ale také velice konkrétní otázky syntézy logických obvodů, s nimiž přicházejí konstruktéři počítačů, na straně druhé. Běžné matematické hodnocení je jednoznačně ve prospěch abstraktních a bohatě rozvinutých teorií, tomuto hodnocení mladí matematici samozřejmě podléhají, a proto si ti nejlepší vybírají základní výzkum a pro aplikovanou matematiku zbývají ti ostatní, kteří ještě k tomu všemu svoji práci podceňují.

Zdá se mně, že bez změny hodnocení a s ním spojeného oceňování aplikovaného výzkumu nelze očekávat zlepšení, které by časem výše uvedenou výtku vyloučilo. V aplikovaném výzkumu je třeba především hodnotit celý proces abstrakce, kterým se od nematematického problému dostaneme k jeho přesné matematické formulaci. Procesem abstrakce a opačným procesem interpretace se svazuje matematika s daným oborem a oba tyto procesy nejsou toho druhu, že by připouštěly nějaký obecný návod, či logicko-matematickou precizaci (ta je totiž jejich cílem nebo východiskem). Je myslitelný kompetenční spor, že proces abstrakce, který vychází od daného oboru a končí v matematice, nepatří ještě do matematiky a už do daného oboru. V každém případě však proces abstrakce patří do celku vědeckého poznání, je při poznání nezbytný, takže by měl být patřičně hodnocen.

4. Výuka aplikované matematice. Vzhledem k tomu, co bylo o apriorních matematických aplikacích řečeno, je třeba do přípravy pracovníků v tomto oboru zahrnout nejen výuku matematice, ale i výuku základních pojmů a výsledků jiných oborů.

Je třeba pamatovat přitom na to, aby studenti dovedli přejít od matematiky k příslušným oborům a naopak. Proti dosavadním zvyklostem výuky na universitách je zaměřeno několik návrhů:

1. Matematiku nedělit podle tradičních oborů (analýza, algebra, geometrie atd.), ale usilovat o matematiku, která je základním teoretickým prostředkem našeho poznání. Výuku matematice členit podle hlavních problémů ostatních oborů. Vědomě volit speciální přednášky tak, aby se tradiční rozdíly mezi jednotlivými matematickými disciplínami co nejvíce stíraly. Tím také některé speciální matematické disciplíny odpadnou nebo z nich zůstanou jen některé jejich konkrétní části.
2. Při různých příležitostech a zejména při zavádění nových matematických pojmů podávat jejich interpretace v jiných vědních oborech. Všechny hlavní matematické pojmy opírat také o výklad těchto pojmů v jiných oborech (derivace jako zrychlení atd.).
3. Ve speciálních seminářích vyučovat matematické pojmotvorbě, tvoření přesných formulací, matematickému formulování nematematických úloh z nejrůznějších vědních oborů a tím na příkladech ukázat a naučit posluchače procesu abstrakce. V příslušných cvičeních zadávat k řešení „slovní", tj. nematematicky formulované úlohy (např. praktickou úlohu dopravního problému apod.).
4. Ve speciálních přednáškách a seminářích vyučovat matematickým konstrukcím, důkazovým obratům a prostředkům, zavádění matematických formalismů a tím na příkladech ukázat a naučit posluchače metodám důkazů. V příslušných cvičeních zadávat úlohy na zobecnění známých výsledků, na jednoduché úpravy a kombinace známých výsledků (využít Pólyaova pravděpodobného usuzování aj.).

5. V ostatních přednáškách dokazovat jen příležitostně a místo důkazů jenom přesvědčovat charakteristickými příklady. Důsledně objasňovat jen hlavní principy, a to napřed intuitivně a názorně, a tím co do rozmanitosti a rozsahu seznámit posluchače s daleko širším přehledem o matematice, než je tomu dnes.

6. Při vhodných příležitostech ve cvičeních vyžadovat úplná řešení úloh, tj. včetně jejich řešení numerického. Samozřejmou součástí studia je práce s počítačem, znalost programování a praktické sestavování algoritmů.

7. Posluchače nezatěžovat znalostmi algoritmického charakteru, jejichž obtížnost záleží jen ve správném a úplném zapamatování, tj. důsledně připustit při všech příležitostech užívání příruček a knih a jiných pomůcek (např. při derivování a integrování apod.).

8. Posluchače vést k naprosté samostatnosti a projevovat mu úplnou důvěru.

Podrobněji o těchto otázkách viz K. Čulík: O modernizaci vyučování matematice z hlediska ejich aplikací a jejího tvořivého osvojení, Matematika ve škole, XIV (1964), 530—537.

5. Matematika mezi ostatními obory. Zásadní rozdíl mezi základním a aplikovaným výzkumem v matematice je v tom, že v základním výzkumu je matematika cílem, zatím co v aplikovaném výzkumu je jenom prostředkem (cílem je obor, jehož se aplikace týkají). Podle toho lze rozdělit dnešní matematiky do dvou skupin: prvním jde o samotnou abstraktní matematiku, kdežto druhým jde o poznání skutečnosti (neboť to je cílem jednotlivých vědních oborů). Při tom první si problémy volí a upravují často tak, aby se daly řešit, před druhými stojí skutečnost, která žádné úpravy nedovoluje. První si zkušenosti a experimentu nemusí všímat, pro druhé jsou zkušenost a experiment poslední kritérium správnosti. V dějinách matematiky lze najít oba typy matematiků. Vezmeme-li však v úvahu evropský novověk nebo až renesanci, matematika v dnešním slova smyslu nenajdeme, tj. matematika bez znalostí jiného oboru. Všechny slavné postavy vědy Newton, Leibniz, Cauchy, Lagrange, Hamilton, Laplace, Green, Stokes, jejichž objevy zcela podstatně ovlivnili celý vývoj matematiky, stáli na stanovisku aplikovaného výzkumu. Newton si vybudoval infinitezimální počet pro potřeby fyziky apod. Nejdůležitější matematické pojmy vznikly při popisu důležitých vědeckých objevů, tj. mají svůj empirický pramen. Teprve matematika v posledních stoletích přestala čerpat z těchto empirických pramenů. Jak to, že převratným fyzikálním objevům týkající se atomového jádra neodpovídá žádný objev matematický?

Je jasné, že zde měla svoji úlohu specializace vědních oborů, způsobená nahromaděním velké spousty poznatků.

Je však třeba vědomě proti tendencím specializačním podporovat umělé tendence univerzalistické, tj. zaměřovat výuku vedle výuky specialistů také na výuku univerzalistů ovládajících dva nebo více oborů.

Ostatně lze říci, že i největší současní matematici, jako byl J. v. Neumann a N. Wiener nebo je C. E. Shannon či A. N. Kolmogorov, stojí na stanovisku aplikovaného výzkumu, neboť jejich nejvýznačnější myšlenky rovněž pocházejí z empirických pramenů.

Závěrem lze shrnout, že jsou dva důvody pro podporu a rozšiřování aplikovaného matematického výzkumu. První je mimomatematický a celospolečnenský, totiž ostatní obory tento výzkum potřebují. Druhý je matematický, totiž matematika takto a ne jinak může načerpat nové empirické ideje a ozdravit celou svoji problematiku.

Adresa autora: Dr. *Karel Čulík,* Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.