

# Aplikace matematiky

---

Pavel Galajda

Transformácie nomogramov analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu

*Aplikace matematiky*, Vol. 10 (1965), No. 6, 489–503

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102990>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

TRANSFORMÁCIE NOMOGRAMOV ANALYTICKÝCH FUNKCIÍ  
PRVEJ NOMOGRAFICKEJ TRIEDY A DRUHÉHO  
NOMOGRAFICKÉHO RODU

PAVEL GALAJDA

(Došlo dňa 20. marca 1964.)

V článku je riešená úloha, ktorú formuloval I. A. VIL'NER v práci [6], t.j. zostrojenie nomogramu pre normálny tvar (1.2) a (1.3) tak, aby ich dve stupnice splynuli.

Ďalej rovnice stupnic (2.13) sú transformované v rovnice (3.7) [analogicky (2.16) v (3.10)] na základe čoho hyperboly pre premenné ( $P$ ) a ( $Q$ ) sa transformovali v kružnice.

1. V prácach [12] a [13] pojednal som o normálnych tvaroch

$$(1.1) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} (w - w_0)^2,$$

$$(1.2) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} C[N(w - w_0)],$$

$$(1.3) \quad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \ln S[N(w - w_0)],$$

kde  $C$  znamená funkcie  $\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ ;  $S - \sin, \cos, \operatorname{sec}, \operatorname{csc}, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \operatorname{sch}, \operatorname{csch}$ ; ďalej  $N$  a  $\gamma$  ľubovoľné reálne alebo rýdzo imaginárne čísla,  $z_0 = a_0 + b_0 i$ ,  $w_0 = p_0 + q_0 i$  ľubovoľné komplexné čísla. Normálne tvary (1.1), (1.2), a (1.3) boli prevedené na kanonické tvary a skonštruované aj im príslušné nomogramy.

V tomto článku riešim úlohu, ktorú formuloval I. A. VIENER v práci [6]. Zavedením projektívnej transformácie (2.4) a (2.8) normálny tvar (1.2) transformujeme v normálny tvar (1.3) tak, aby dve stupnice premenných  $P$  a  $Q$  splynuli. Na základe uvedenej transformácie zostrojíme spojnicový nomogram o šiestich stupniciach, pomocou ktorého k dvom daným hodnotám čítame na jednej priamke zodpovedajúce ďalšie štyri hodnoty.

Normálnym tvarom (1.2) a (1.3) zodpovedajú nasledujúce kanonické tvary [12], [13]:<sup>1)</sup>

a) Pre prípad (1.2), keď  $\gamma$  je reálne číslo

$$(1.4) \quad \left(\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}\right)(a - a_0)^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}\right)(b - b_0)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}\right)(a - a_0)^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}\right)(b - b_0)^2 = 1.$$

b) Pre prípad (1.2), keď  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo

$$(1.5) \quad \left(-\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}\right)(b - b_0)^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}\right)(a - a_0)^2 = 1,$$

$$\left(-\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}\right)(b - b_0)^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}\right)(a - a_0)^2 = 1.$$

c) Pre prípad (1.3) keď  $\gamma$  je reálne číslo

$$(1.6) \quad \left(-\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\right)(e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (\cos 2P) = 0,$$

$$\left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\right)(e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (-\operatorname{ch} 2Q) = 0.$$

d) Pre prípad (1.3), keď  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo

$$(1.7) \quad \left(-\frac{\sin^2 2P}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\right)(-e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (-\cos 2P) = 0,$$

$$\left(\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2} e^{2\operatorname{Re}\gamma z_0}\right)(-e^{-2\operatorname{Re}\gamma z}) + (\cos 2B) + (\operatorname{ch} 2Q) = 0,$$

kde

$$P = \operatorname{Re} [N(w - w_0)], \quad Q = \operatorname{Im} [N(w - w_0)],$$

$$A = \operatorname{Re} [\gamma(z - z_0)] = \operatorname{Re} [\gamma z] - \operatorname{Re} [\gamma z_0],$$

$$B = \operatorname{Im} [\gamma(z - z_0)] = \operatorname{Im} [\gamma z] - \operatorname{Im} [\gamma z_0].$$

Vzťah medzi týmito premennými a premennými  $a, b, p, q$  je prevedený v práci [13].

<sup>1)</sup> Normálne tvary (1.2) a (1.3) sú v ďalšom uvažované pre funkciu *sinus*. Hodnoty ďalších jednotlivých funkcií  $C$  a  $S$  nájdeme tak, že ich vyjadríme funkciou zostrojenou na nomograme.

V prípade, že  $\gamma = i\gamma_1$  t. j. pri  $\gamma = i(-i\gamma)$ , potom

$$\operatorname{Re} [\gamma z_0] = \operatorname{Re} [i(-i\gamma) z_0], \quad \operatorname{Im} [\gamma z_0] = \operatorname{Im} [i(-i\gamma) z_0].$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\operatorname{Re} \gamma(z - z_0)}{\gamma} \right]^2 &= \left[ \frac{\operatorname{Re} i\gamma_1[(a - a_0) + i(b - b_0)]}{i\gamma_1} \right]^2 = \left[ -\frac{\gamma_1(b - b_0)}{i\gamma_1} \right]^2 = \\ &= [i(b - b_0)]^2 = -(b - b_0)^2, \\ \left[ \frac{\operatorname{Im} \gamma(z - z_0)}{\gamma} \right]^2 &= \left[ \frac{\operatorname{Im} i\gamma_1[(a - a_0) + i(b - b_0)]}{i\gamma_1} \right]^2 = \left[ \frac{\gamma_1(a - a_0)}{i\gamma_1} \right]^2 = \\ &= -i(a - a_0)]^2 = -(a - a_0)^2. \end{aligned}$$

Kanonické tvary (1.4), (1.5), (1.6) a (1.7) porovnáme zo základným tvarom

$$(1.8) \quad \begin{aligned} S(p) X(a) + Y(b) + H(p) &= 0, \\ T(q) X(a) + Y(b) + R(q) &= 0, \end{aligned}$$

pre ktorý platia zobrazovacie rovnice

$$(1.9) \quad \begin{aligned} x_a &= \frac{1}{X(a)}, & y_a &= 0, \\ x_b &= 0, & y_b &= \frac{1}{Y(b)}, \\ x_p &= -\frac{S(p)}{H(p)}, & y_p &= -\frac{1}{H(p)}, \\ x_q &= -\frac{T(q)}{R(q)}, & y_q &= -\frac{1}{R(q)}. \end{aligned}$$

Porovnaním rovníc (1.4), (1.5), (1.6), a (1.7) so základným kanonickým tvarom (1.8), pre ktorý platia zobrazovacie rovnice (1.9) dostaneme postupne zobrazovacie rovnice, ktoré pre jednotlivé prípady (1.4)–(1.7) sú:

**a)** V prípade (1.4):

$$(1.10) \quad \begin{aligned} x_a &= \frac{1}{(a - a_0)^2}, & y_a &= 0, \\ x_b &= 0, & y_b &= \frac{1}{(b - b_0)^2}, \\ x_p &= \frac{\gamma^2}{\sin^2 p}, & y_p &= -\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}, \\ x_q &= \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}, & y_q &= \frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}, \end{aligned}$$

**b)** V prípade (1.5):

$$(1.11) \quad \begin{aligned} x_a &= \frac{1}{(a - a_0)^2}, & y_a &= 0, \\ x_b &= 0, & y_b &= \frac{1}{(b - b_0)^2}, \\ x_p &= \frac{\gamma^2}{\cos^2 p}, & y_p &= -\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}, \\ x_q &= -\frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}, & y_q &= -\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}. \end{aligned}$$

**c)** V prípade (1.6):

$$(1.12) \quad \begin{aligned} x_A &= e^{2\operatorname{Re}[\gamma z]}, & y_A &= 0, \\ x_B &= 0, & y_B &= \frac{1}{\cos 2B}, \\ x_P &= \frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_P &= -\frac{1}{\cos 2P}, \\ x_Q &= \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_Q &= \frac{1}{\operatorname{ch} 2Q}. \end{aligned}$$

**d)** V prípade (1.7):

$$(1.13) \quad \begin{aligned} x_A &= -e^{2\operatorname{Re}[\gamma z]}, & y_A &= 0, \\ x_B &= 0, & y_B &= \frac{1}{\cos 2B}, \\ x_P &= -\frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_P &= \frac{1}{\cos 2P}, \\ x_Q &= -\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_Q &= -\frac{1}{\operatorname{ch} 2Q}. \end{aligned}$$

**2.** Zobrazovacie rovnice (1.10) a (1.11) pretransformujeme postupne v rovnice (1.12) a (1.13) tak, aby stupnice pre premenné  $p$  a  $q$  v (1.10) a v (1.11) splynuli so stupnicami pre premenné  $P$  a  $Q$  v (1.12) a (1.13).

Uvažujme prípad, že  $\gamma$  je reálne číslo. (V prípade  $\gamma$  – rýdzo imaginárneho sa ukáže analogicky.)

Z rovníc (1.10) pre premennú  $p$  po úprave dostaneme

$$(2.1) \quad \frac{\sin^2 2p}{2 \cos 2p} = \frac{2\gamma^2}{x + y}.$$

Obdobne z rovníc (1.10) pre premennú  $q$  dostaneme

$$(2.2) \quad \frac{\operatorname{sh}^2 2q}{2 \operatorname{ch} 2q} = \frac{2\gamma^2}{x + y}.$$

Ak v rovniciach (1.12) súradnicu  $x$  pre premennú  $P$  a  $Q$  označíme  $x'$ , vtedy

$$(2.3) \quad x' = \frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}\{\gamma z_0\}}, \quad x' = \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}\{\gamma z_0\}}.$$

Použitím rovníc (2.1) a (2.2) z rovníc (2.3) vyplýva

$$(2.4) \quad x' = \frac{2\gamma^2}{x + y} e^{2\operatorname{Re}\{\gamma z_0\}}.$$

Z rovníc (1.10) pre premennú  $p$  opäť po úprave dostávame

$$(2.5) \quad \sin^2 2p = \frac{4\gamma^2}{x - y}.$$

Obdobne pre premennú  $q$  bude

$$(2.6) \quad \operatorname{sh}^2 2q = -\frac{4\gamma^2}{x - y}.$$

Z rovníc (2.1) a (2.2) použitím rovníc (2.5) a (2.6) dostaneme

$$(2.7) \quad \cos 2p = \frac{x + y}{x - y}, \quad \operatorname{ch} 2q = -\frac{x + y}{x - y},$$

Ak v rovniciach (1.12) súradnicu  $y$  pre premennú  $P$  a  $Q$  označíme  $y'$  a použitím rovníc (2.7) dostávame

$$(2.8) \quad y' = \frac{y - x}{x + y}.$$

Rovnice (2.4) a (2.8) sú transformačné rovnice, ktoré transformujú rovnice (1.10) a (1.11) tak, aby premenné  $p$  a  $q$  splynuli s premennými  $P$  a  $Q$  v rovniciach (1.12) a (1.13).

Ak do transformačných rovníc (2.4) a (2.8) zavedieme homogénne súradnice, potom

$$(2.9) \quad \begin{aligned} t' &= x + y, \\ x' &= 2\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]} \cdot t, \\ y' &= y - x, \end{aligned}$$

odkiaľ nám vyplýva determinant transformácie

$$(2.10) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0, 0, 2\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]} \\ -1, 1, 0 \\ 1, 1, 0 \end{vmatrix},$$

ktorého hodnota  $\Delta = -4\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]} \neq 0$ .

Násobme determinanty, prisluchajúce rovniciam (1.10)

$$(2.11) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{(a-a_0)^2}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{(b-b_0)^2}, & 1 \\ \frac{\gamma^2}{\sin^2 p}, & -\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{(a-a_0)^2}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{(b-b_0)^2}, & 1 \\ \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}, & \frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

determinantom (2.10).

Po vynásobení a úpravou dostávame

$$(2.12) \quad \begin{vmatrix} 2\gamma^2(a-a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -1, & 1 \\ 2\gamma^2(b-b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & 1, & 1 \\ \frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -\frac{1}{\cos 2P}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2\gamma^2(a-a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -1, & 1 \\ 2\gamma^2(b-b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & 1, & 1 \\ \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & \frac{1}{\operatorname{ch} 2Q}, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Z determinantov (2.12) dostávame nasledujúce zobrazovacie rovnice:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} x_a &= 2\gamma^2 (a - a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_a &= -1, \\ x_b &= 2\gamma^2 (b - b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_b &= 1, \\ x_P &= \frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_P &= -\frac{1}{\cos 2P}, \\ x_Q &= \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_Q &= \frac{1}{\operatorname{ch} 2Q}. \end{aligned}$$

V prípade, že  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo, násobíme determinanty

$$(2.14) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{(a-a_0)^2}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{(b-b_0)^2}, & 1 \\ \frac{\gamma^2}{\cos^2 p}, & -\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{(a-a_0)^2}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{(b-b_0)^2}, & 1 \\ -\frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}, & -\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

determinantom (2.10). Po vynásobení a prevedení menších úprav dostávame

$$(2.15) \quad \begin{vmatrix} 2\gamma^2(a-a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -1, & 1 \\ 2\gamma^2(b-b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & 1, & 1 \\ -\frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & \frac{1}{\cos 2P}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2\gamma^2(a-a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -1, & 1 \\ 2\gamma^2(b-b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & 1, & 1 \\ -\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 Q}, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Z determinantov (2.15) plynú tieto zobrazovacie rovnice:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} x_a &= 2\gamma^2(a-a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_a &= -1, \\ x_b &= 2\gamma^2(b-b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_b &= 1, \\ x_P &= -\frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_P &= \frac{1}{\cos 2P}, \\ x_Q &= -\frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & y_Q &= -\frac{1}{\operatorname{ch} 2Q}. \end{aligned}$$

Poznamenávame, že v prípade transformácie rovníc (1.12) a (1.13) v rovnice (1.10) a (1.11) (obrátenie predchádzajúceho postupu) aby premenné  $P$  a  $Q$  splynuli s premennými  $p$  a  $q$  sa ľahko ukáže, že

$$(2.17) \quad \sin^2 P = -\frac{x}{(y-1)e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}}, \quad \cos^2 P = -\frac{x}{(1+y)e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}}.$$

Obdobne pre premennú  $Q$ . Použitím rovníc (2.17) z rovníc (1.10) a (1.11) dostávame transformačné rovnice

$$(2.18) \quad x' = \frac{1-y}{x} \gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, \quad y' = \frac{1+y}{x} \gamma^2 e^{\operatorname{Re}[\gamma z_0]}.$$



Zavedením homogénnych súradníc

$$(2.19) \quad \begin{aligned} t' &= x, \\ x' &= -y\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]} + t\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, \\ y' &= y\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]} + t\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, \end{aligned}$$

z ktorých dostávame determinant transformácie

$$(2.20) \quad A' = \begin{vmatrix} 0, & -\gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & \gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]} \\ 0, & \gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & \gamma^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]} \\ 1, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Ďalšie úvahy sú analogické ako v predchádzajúcom prípade.

Porovnaním rovníc (2.13) s rovnicami (1.12) je vidieť, že stupnice pre premenné  $P$  a  $Q$  v rovniciach (2.13) splynuli s premennými  $P$  a  $Q$  v rovniciach (1.12). (Odobne pre rovnice (2.16) s rovnicami (1.13).)

3. V ďalšej časti zobrazovacie rovnice (2.13) a (2.16) transformujeme tak, aby nositeľky hyperboly pre premenné  $P$  a  $Q$  sa transformovali v kružnice. Za týmto účelom upravme determinanty prislúchajúce rovnicam (2.13)

$$(3.1) \quad \begin{vmatrix} 2\gamma^2(a-a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -1, & 1 \\ 2\gamma^2(b-b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & 1, & 1 \\ \frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -\frac{1}{\cos 2P}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2\gamma^2(a-a_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -1, & 1 \\ 2\gamma^2(b-b_0)^2 e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & 1, & 1 \\ \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & \frac{1}{\operatorname{sh} 2Q}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a rovnicam (1.12)

$$(3.2) \quad \begin{vmatrix} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z]}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{\cos 2B}, & 1 \\ \frac{\sin^2 2P}{2 \cos 2P} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & -\frac{1}{\cos 2P}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z]}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{\cos 2B}, & 1 \\ \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{2 \operatorname{ch} 2Q} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, & \frac{1}{\operatorname{ch} 2Q}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

takto: Prvé stĺpce vynásobíme s  $e^{-2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}$  druhé s  $(\frac{1}{2})$  a pripočítame druhé stĺpce k prvým. V takto vzniklých determinantoch vynásobíme v prvom a v treťom determinante tretí riadok s  $(-2 \cos 2P)$  a v druhom a v štvrtom tretí riadok s  $(2 \operatorname{sh} 2Q)$  a pripočítame druhé stĺpce k prvým. Delením vo všetkých štyroch determinantoch

s takto upravenými prvkami prvého stĺpca dostaneme

$$(3.3) \quad \begin{vmatrix} 1, & -\frac{1}{2[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & \frac{1}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]} \\ 1, & \frac{1}{2[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & \frac{1}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]} \\ 1, & \frac{1}{1 + \cos^2 2P}, & -\frac{2 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P} \\ 1, & -\frac{1}{2[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & \frac{1}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]} \\ 1, & \frac{1}{2[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & \frac{1}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]} \\ 1, & \frac{1}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & \frac{2 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3.4) \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & e^{-2A} \\ 1, & \frac{1}{2}, & \cos 2B \\ 1, & \frac{1}{1 + \cos^2 2P}, & -\frac{2 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & e^{-2A} \\ 1, & \frac{1}{2}, & \cos 2B \\ 1, & \frac{1}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & \frac{2 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q} \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanty (3.3) a (3.4) upravme ešte takto: Druhé stĺpce vynásobíme s  $m$  a tretie s  $\frac{1}{2}n$ , kde  $m$  a  $n$  sú moduly, ktoré volíme  $m = n = 20$  čím dostaneme

$$(3.5) \quad \begin{vmatrix} 1, & -\frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & \frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]} \\ 1, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]} \\ 1, & \frac{20}{1 + \cos^2 2P}, & -\frac{20 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P} \\ 1, & -\frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & \frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]} \\ 1, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]} \\ 1, & \frac{20}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & \frac{20 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3.6) \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & 10e^{-2A} \\ 1, & 10, & 10 \cos 2B \\ 1, & \frac{20}{1 + \cos^2 2P}, & -\frac{20 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & 10e^{-2A} \\ 1, & 10, & 10 \cos 2B \\ 1, & \frac{20}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & \frac{20 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q} \end{vmatrix} = 0.$$

Z determinántov (3.5) a (3.6) v prípade, že  $\gamma$  je reálne číslo dostaneme zobrazovacie rovnice

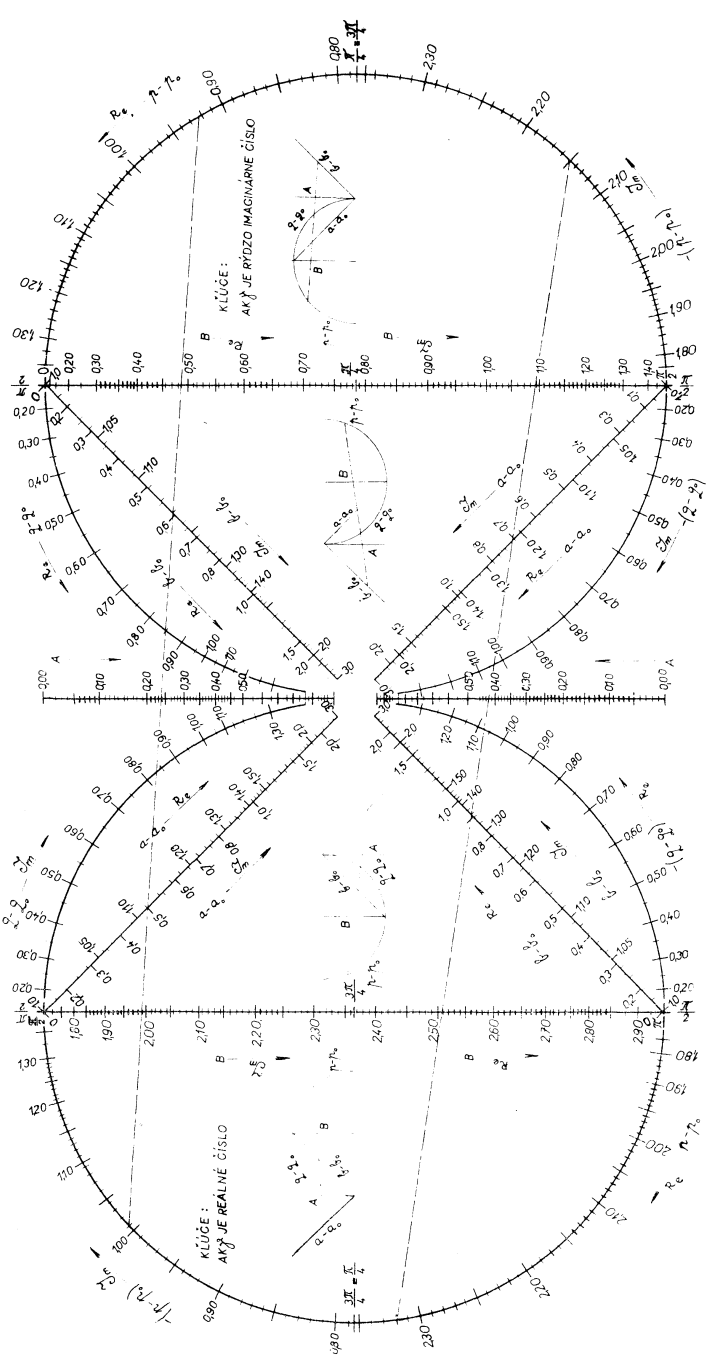
$$(3.7) \quad \begin{aligned} x_A &= 0, & y_A &= 10e^{-2A}, \\ x_B &= 10, & y_B &= 10 \cos 2B, \\ x_a &= -\frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & y_a &= \frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, \\ x_b &= \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & y_b &= \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, \\ x_P &= \frac{20}{1 + \cos^2 2P}, & y_P &= -\frac{20 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P}, \\ x_Q &= \frac{20}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & y_Q &= \frac{20 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}. \end{aligned}$$

V prípade, že  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo upravíme determinanty odpovedajúce rovniciam (2.16) a (1.13) obdobným spôsobom, čím dostaneme

$$(3.8) \quad \begin{vmatrix} 1, & -\frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & \frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]} \\ 1, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]} \\ 1, & \frac{20}{1 + \cos^2 2P}, & \frac{20 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P} \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} 1, & -\frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & \frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]} \\ 1, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]} \\ 1, & \frac{20}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & -\frac{20 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q} \end{vmatrix} = 0,$$

*Tomogram pre vztahy*  

$$z - z_0 = \frac{1}{\beta} \ln S[N(\omega - \omega_0)] \text{ a } z - z_0 = \frac{1}{\beta} C[N(\omega - \omega_0)]$$



Obr. 1.

$$(3.9) \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & -10e^{-2A} \\ 1, & 10, & 10 \cos 2B \\ 1, & \frac{20}{1 + \cos^2 2P}, & \frac{20 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & -10e^{-2A} \\ 1, & 10, & 10 \cos 2B \\ 1, & \frac{20}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & -\frac{20 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q} \end{vmatrix} = 0,$$

odkiaľ nám plynú zobrazovacie rovnice

$$(3.10) \quad \begin{aligned} x_A &= 0, & y_A &= -10e^{-2A}, \\ x_B &= 10, & y_B &= 10 \cos 2B, \\ x_a &= -\frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, & y_a &= \frac{10}{[-1 + 2\gamma^2(a - a_0)^2]}, \\ x_b &= \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, & y_b &= \frac{10}{[1 + 2\gamma^2(b - b_0)^2]}, \\ x_P &= \frac{20}{1 + \cos^2 2P}, & y_P &= \frac{20 \cos 2P}{1 + \cos^2 2P}, \\ x_Q &= \frac{20}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}, & y_Q &= -\frac{20 \operatorname{ch} 2Q}{1 + \operatorname{ch}^2 2Q}. \end{aligned}$$

Z posledných dvoch rovníc v (3.7) a v (3.10) elimináciou  $P$  a  $Q$  dostaneme

$$(3.11) \quad (x_{(P,Q)} - 10)^2 + y_{(P,Q)}^2 = (10)^2.$$

Teda nositeľka stupníc  $P$  a  $Q$  bude kružnica o strede  $S[10; 0]$  a polomere  $r = 10$ . Ďalšie štyri stupnice  $A$ ,  $B$ ,  $(a - a_0)$ ,  $(b - b_0)$  sú stupnice priamočiare. Zobrazovacie rovnice (3.7) a (3.10) pri zostrojení nomogramu boli upravené tak, aby na jednej nákrese bolo možné čítať ako pre  $\gamma$  reálne, tak aj pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne číslo (pre reálne sme volili  $\gamma = 1$  a pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne  $\gamma = i$ ). Tak isto  $N$  bolo volené rovné jednej.

Pomocou nomogramu (obr. 1) môžeme k dvom daným hodnotám čítať na jednej priamke zodpovedajúce ďalšie štyri hodnoty a to ako pre  $\gamma$  reálne, tak aj pre  $\gamma$  rýdzo imaginárne. Pri čítaní treba postupovať podľa kľúčov, ktoré sú znázornené na obrázku.

Rozsah jednotlivých premenných bol volený takto:

1) Ak  $\gamma$  je reálne číslo, potom

$$\begin{aligned}0 &\leq A \leq 1,30, \\0 &\leq B \leq \frac{1}{4}\pi, \quad \frac{3}{4}\pi \leq B \leq \pi, \\1,0 &\leq (a - a_0) \leq 3,0, \\0 &\leq (b - b_0) \leq 2,0, \\ \frac{1}{4}\pi &\leq (p - p_0) \leq \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}\pi \leq (p - p_0) \leq \frac{3}{4}\pi, \\0,20 &\leq (q - q_0) \leq 1,30.\end{aligned}$$

2) V prípade, že  $\gamma$  je rýdzo imaginárne číslo

$$\begin{aligned}0 &\leq A \leq 1,30, \\ \frac{1}{4}\pi &\leq B \leq \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}\pi \leq B \leq \frac{3}{4}\pi, \\0 &\leq (a - a_0) \leq 2,0, \\1,0 &\leq (b - b_0) \leq 3,0, \\ \frac{1}{2}\pi &\leq (p - p_0) \leq \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{1}{4}\pi \leq (p - p_0) \leq \frac{1}{2}\pi, \\0,20 &\leq (q - q_0) \leq 1,30.\end{aligned}$$

Príklad 1. Pre dané  $(a - a_0) = 1,12$ ,  $(b - b_0) = 0,59$ ;  $\gamma$  – reálne čítame podľa kľúča  $(p - p_0) \doteq 0,923$ ,  $(q - q_0) \doteq 0,85$ ,  $A = 0,24$ ,  $B = 0,49$ . Na tejže priamke môžeme čítať aj pre  $\gamma$  – rýdzo imaginárne číslo zodpovedajúce hodnoty:

$$\begin{aligned}(a - a_0) &= 0,5, \quad (b - b_0) = 1,16, \quad (p - p_0) \doteq -1,01, \\(q - q_0) &\doteq 0,84, \quad A = 0,24, \quad B = 1,99.\end{aligned}$$

Príklad 2. Pre dané  $A = 0,42$ ,  $B = 1,09$ ;  $\gamma$  – rýdzo imaginárne čítame podľa kľúča  $(p - p_0) \doteq -2,15$ ,  $(q - q_0) \doteq -1,03$ ,  $(a - a_0) = 0,7$ ,  $(b - b_0) = 1,34$  a zároveň pre  $\gamma$  reálne  $A = 0,42$ ,  $B = 2,51$ ,  $(a - a_0) = 1,22$ ,  $(b - b_0) = 0,9$   $(p - p_0) \doteq -2,32$ ,  $(q - q_0) \doteq -1,07$ .

#### Literatúra

- [1] *И. А. Вильнер*: О номографировании эллиптических функций и интегралов в комплексной области. ДАН СССР, Т. 55, № 9 (1947).
- [2] *И. А. Вильнер*: Номограммы систем уравнений и аналитических функций ДАН СССР Т. 58, № 5 (1947).
- [3] *И. А. Вильнер*: Номографирование аналитических функций ДАН СССР, Т. 63, № 2 (1948).
- [4] *И. А. Вильнер*: Приведение номографируемой аналитической зависимости к нормальной форме. ДАН СССР, Т. 69, № 1 (1949).
- [5] *И. А. Вильнер*: Аналитическая теория номографирования функций комплексного переменного первого класса. Математический сборник, 27, (69) : 1 (1950).

- [6] *И. А. Вильнер*: Номографирование систем уравнений и аналитических функций. Номографический сборник (1951).
- [7] *И. А. Вильнер*: Номограммы для вычисления эллиптических функций и интегралов. УМН, 9 : 2 (60) (1954).
- [8] *И. А. Вильнер*: О номографической аппроксимации эллиптических функций и номограммы в комплексных проективных плоскостях. Сборник Вычислительная математика АН СССР, № 7 (1961).
- [9] *И. А. Вильнер и П. Галайда*: Неэлементарные соотношения уравнений третьего номографического порядка и их автоморфные преобразования. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 1 (1964), 6—43.
- [10] *И. Н. Денисюк*: О проективном преобразовании номограмм. Номографический сборник работ научно-исследовательского семинара по номографии (1935).
- [11] *Pleskot V.*: Nomografie, SNTL, Praha (1963).
- [12] *Galajda P.*: Niektoré nomogramy pre výpočet analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu v obore komplexnej premennej. Aplikace matematiky 9 (1964), 131—148.
- [13] *Galajda P.*: Nomogram pre funkcie prvej nomografickej triedy v obore komplexnej premennej. Acta facultatis rer. nat. univ. Comenianae IX., 2. — Mathematica, (1964), 83—93.

## Резюме

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НОМОГРАММ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО КЛАССА И ВТОРОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ЖАНРА

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА (Pavel Galajda)

Настоящая статья занимается решением задачи И. А. Вильнера, поставленной в работе [6].

Подвергая номограмму пучка (1.10) проективному преобразованию

$$x' = \frac{2\gamma^2}{x+y} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, \quad y' = \frac{y-x}{x+y},$$

совместим шкалы  $(p)$ ,  $(q)$  (1.10) со шкалами  $(P)$ ,  $(Q)$  (1.12) (аналогично (1.11) с (1.13)), и в результате получаем шестишкальные конические номограммы второго жанра, дающие одним выравнинанием для любой из функций  $S$  или  $C$ , стоящих в правых частях (1.2) и (1.3).

После проективного преобразования (2.4) и (2.8) уравнения шкал (2.13) были преобразованы в управления (3.7) (аналогично (2.16) в (3.10)), на основании чего гиперболы для переменного  $(P)$  и  $(Q)$  преобразовались в окружность.

При помощи преобразованных уравнений была также построена общая номограмма для нормальных форм (1.12) и (1.13). Метод преобразования был выбран так, чтобы на одном чертеже была построена номограмма, когда  $\gamma$  принимает действительные и чисто мнимые значения.

## Summary

### TRANSFORMATIONS OF NOMOGRAMS OF ANALYTIC FUNCTIONS OF THE FIRST NOMOGRAPHIC CLASS AND SECOND GENUS

PAVEL GALAJDA

The paper is concerned with the solution of a problem proposed by I. A. Viĭner, [6]. By means of the projective transformation

$$x' = \frac{2\gamma^2}{x+y} e^{2\operatorname{Re}[\gamma z_0]}, \quad y' = \frac{y-x}{x+y},$$

the variables  $(p)$ ,  $(q)$ , in (1.10) are carried over into  $(P)$ ,  $(Q)$  in (1.12) and similarly for (1.11) and (1.13); there results a nomogram of the second genus with six variables. Using this, to any pair of values of either of the functions  $S$  or  $C$  appearing in (1.2), (1.3), one may read off four further values on a straight line.

The projective transformations (2.4) and (2.8) of equation (2.13) into (3.7) (and similarly, (2.16) into (3.10)) map the hyperbolas for  $(P)$ ,  $(Q)$  into circles.

A common nomogram for the normal forms (1.12) and (1.13) was also obtained using these transformations. The mapping process was so chosen that in one figure there appear nomograms for both  $\gamma$  real and  $\gamma$  pure imaginary.

*Adresa autora:* C.Sc. *Pavel Galajda*, Katedra matematiky SF VŠT, Nám. Februárového víťazstva 9, Košice.