Ivo Babuška

Über optimale Formeln zur numerischen Berechnung linearer Funktionale

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 5, 441–443

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102983

SVAZEK 10 (1965) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 5

PŘEDBĚŽNÁ SDĚLENÍ

ÜBER OPTIMALE FORMELN ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG LINEARER FUNKTIONALE

[VORBERICHT]

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 10. Mai 1965.)

1. Es sei ein Banach'scher Raum B, ein Funktional $F \in B^*$ und die Folge

$$f_k^{(j)} \in B^*\,, \quad k = 0, 1, \dots, j\,; \quad j = 1, 2, \dots$$

gegeben. Das grundlegende Problem der numerischen Analysis ist die Approximierung des gegebenen Funktionals F durch eine lineare Kombination der Funktionale $f_k^{(j)}$. (Vgl. [1].)

Ein spezieller und typischer Fall ist das Problem der numerischen Quadratur. Hier ist

$$F(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad f_k^{(j)}(\varphi) = \varphi\left(\frac{k}{j}\right)$$

und wir setzen

$$F \sim \sum_{k=0}^{j} a_k^{(j)} f_k^{(j)}(\varphi)\,.$$

Das Problem optimaler numerischer Formeln (z.B. Quadraturformeln) hängt mit der Wahl der Koeffizienten $a_k^{(j)}$, $k = 0, \dots, j$; $j = 1, 2, \dots$ zusammen, sodaß die Norm des Fehleroperator

$$F - \sum_{k=0}^{j} a_k^{(j)} f_k^{(j)}$$

minimalisiert wird.

Die Wahl der Koeffizienten $a_k^{(j)}$, welche die Norm des Fehleroperator minimalisieren, hängt eng mit dem Raum B zusammen. Die konkrete Wahl, aber, eines geeigneten Raumes B ist in der numerischen Praxis oft sehr unverläßlich. Das „Risiko" der Wahl eines konkreten B können wir jedoch oft auf folgende Weise herabsetzen. Wir wählen eine Menge $\mathfrak{M}$ von Räumen B so, daß $F \in B^*$ und $f_k^{(j)} \in B^*$, $k = 0, \dots, j; j = 1, \dots$ für alle $B \in \mathfrak{M}$.

Wir bezeichnen

$$\chi^{(B)}(j) = \inf_{a_k^{(j)}} \|F - \sum_{k=0}^{j} a_k^{(j)} f_k^{(j)}\|_{B^*},$$

und wählen die Koeffizienten $b_k^{(j)}$, $k = 0, \ldots, j$; $j = 1, \ldots$ und setzen

$$\beta_j^{(B)}(\alpha, \{b_k^{(j)}\}) = \frac{\|F - \sum_{k=0}^{j} b_k^{(j)} f_k^{(j)}\|_{B^*}}{\chi^{(B)}([j\alpha])}, \quad 0 < \alpha \leqq 1 .$$

Wenn die Koeffizienten $b_k^{(j)}$ die Eigenschaft haben werden, daß für jedes $B \in \mathfrak{M}$ die Folge $\beta_j^{(B)}(1, \{b_k^{(j)}\})$, $j = 1, 2, \ldots$, beschränkt sein wird, resp.

$$\lim_{j \to \infty} \beta_j^{(B)}(1, \{b_k^{(j)}\}) = 1,$$

so sagen wir, daß die Formel

$$\sum_{k=0}^{j} b_k^{(j)} f_k^{(j)}$$

universal größenordnungsmäßig resp. universal assymptotisch optimal ist.

Wenn die Folge

$$\beta_j^{(B)}(\alpha, \{b_k^{(j)}\}), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < 1$$

für jedes $B \in \mathfrak{M}$ beschränkt ist, so sprechen wir von einer universal fast größenordnungsmäßig optimalen Formel.

Vom Standpunkt der numerischen Praxis ist oft das „Risiko" der Wahl von $\mathfrak{M}$ kleiner als die Wahl des konkreten Raumes B.

2. Wir wollen einige Ergebnisse im Zusammenhang mit den Problemen der Quadraturformeln im Raum der periodischen Funktionen anführen.

Wir bezeichnen $\mathscr{H}$ den Raum aller reeller Folgen $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$, welche folgende Eigenschaften haben:

1. $\gamma_j \geqq 0$, $\gamma_0 > 0$, $j = 0, 1, \ldots$;
2. Es ex. $j_0 > 0$, so daß $\gamma_{j_0} > 0$;
3. $\lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{\gamma_j} = 0$.

Wir ordnen jedem $\gamma \in \mathscr{H}$ einen Banach'schen Raum B_γ aller total stetiger 2π-periodischer komplexer Funktionen φ mit der Norm

$$\|\varphi\|_{B_\gamma}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \int_0^{2\pi} |\varphi^{(j)}(x)|^2 \, dx$$

zu.

Die Menge $\mathfrak{M}$ mögen alle B_γ, $\gamma \in \mathscr{H}$ bilden. Es gilt nun folgender Satz.

Satz 1. *Es sei*

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipx} \varphi(x)\, dx\,; \quad f_k^{(j)}(\varphi) = \varphi\left(\frac{2\pi}{j} k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, j,\ j = 1, 2, \ldots$$

Dann ist die Formel

$$\frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} e^{ip(2\pi/j)k} f_k^{(j)}$$

universal assymptotisch optimal.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1 *sei* $\gamma \in \mathscr{H}$ *und* ${}^{(\gamma)}a_k^{(j)}$ *seien von der Art, daß*

$$\beta_j^{(B_\gamma)}(1, \{{}^{(\gamma)}a_k^{(j)}\}) = 1\,.$$

Dann existiert ein $\hat{\gamma} \in \mathscr{H}$ *derart, daß*

$$\beta_j^{(B_{\hat{\gamma}})}(1, \{{}^{(\gamma)}a_k^{(j)}\}) \to \infty$$

für $j \to \infty$ *ist.*

Satz 3. *Es sei*

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

eine 2π*-periodische quadratisch integrierbare komplexe Funktion. Es sei*

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, \varphi(x)\, dx\,, \quad f_k^{(j)}(\varphi) = \varphi\left(\frac{2\pi}{j} k\right).$$

Dann ist die Formel

$$\frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \sum_{n=-[j/2]}^{n=[j/2]} c_n e^{in(2\pi/j)k} f_k^{(j)}$$

universal fast größenordnungsmäßig optmal.

Auf Grund ähnlicher Schlußfolgerungen lassen sich in einer Reihe von Fallen nicht nur universale Approximierungen von Funktionalen, aber auch universale Approximierungen von Operatoren konstruieren.

Literatur

[1] *И. Бабушка, С. Л. Соболев:* Оптимизация численныя методдв. Aplikace Matematiky *10* (1965), 96–130.

Anschrift des Autoren: Ing. dr. *Ivo Babuška* Dr. Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.