Oldřich Vašíček

Poznámka k čekací disciplíně v systémech hromadné obsluhy

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 5, 423–427

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102981

POZNÁMKA K ČEKACÍ DISCIPLÍNĚ V SYSTÉMECH HROMADNÉ OBSLUHY

OLDŘICH VAŠÍČEK

(Došlo dne 12. května 1964.)

V článku je dokázána platnost nerovnosti (7) pro obsluhovací systém typu M/M/c, v němž jsou zákazníci vybíráni do obsluhy s pravděpodobnostmi danými jejich pořadím ve frontě a délkou fronty.

Budiž dán obsluhovací systém S typu M/M/c, kde parametr vstupního Poissonova proudu je λ a parametr rozložení obsluhovací doby je μ, přičemž $\varrho \equiv (\lambda/c\mu) < 1$. Nechť v systému S je následující čekací disciplína: každý zákazník, který nenalezne při svém příchodu žádnou volnou obsluhovací linku, se zařadí na konec lineární čekací linky (fronty). V okamžiku uvolnění některé obsluhovací linky je pak vybrán do obsluhy s danou pravděpodobností určitý zákazník z fronty, přičemž tato pravděpodobnost závisí pouze na délce fronty v okamžiku výběru a na pořadí tohoto zákazníka ve frontě. Budiž r_{kn}, $1 \leqq k \leqq n$ pravděpodobnost, že z fronty délky n byl vybrán k-tý zákazník. Čísla r_{kn}, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$ nechť přitom splňují podmínky

$$\sum_{k=1}^{n} r_{kn} = 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Jako speciální případy lze uvést zejména řádný čekací režim (obsluha v pořadí příchodů) pro $r_{1n} = 1$, $r_{kn} = 0$ pro $1 < k \leqq n$, obsluhu v obráceném pořadí (inversní čekací režim) pro $r_{nn} = 1$, $r_{kn} = 0$ pro $1 \leqq k < n$ a náhodný výběr do obsluhy, je-li $r_{kn} = 1/n$, $1 \leqq k \leqq n$.

V systému S označme γ délku čekací doby. Nechť určitý zákazník stojí v okamžiku t_0 na k-tém místě fronty při délce fronty n; označme γ_{kn} jeho dobu čekání od tohoto okamžiku. Vzhledem k markovovské vlastnosti procesu nezávisí rozložení náhodné proměnné γ_{kn} na tom, jak dlouho čekal tento zákazník před okamžikem t_0. Buďtež

$$w(t) \;= \mathbf{P}\{\gamma \;< t\}\,,$$

$$w_{kn}(t) = \mathbf{P}\{\gamma_{kn} < t\}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \; n = 1, 2, \ldots$$

Vyšetřujeme-li změnu čekací doby během intervalu délky $\tau \to 0$, dospějeme po úpravách k rovnicím

$$(1)\qquad w'_{kn}(t) = w_{k-1\,n-1}(t)\,.\,c\mu \sum_{i=1}^{k-1} r_{in} + \in(t)\,.\,c\mu r_{kn} + w_{kn-1}(t)\,c\mu \sum_{i=k+1}^{n} r_{in} - \\ - w_{kn}(t)\,(c\mu + \lambda) + w_{kn+1}(t)\,.\,\lambda\,,$$

kde

$$\in(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t \leqq 0\,, \\ 1 & \text{pro} \quad t > 0\,, \end{cases}$$

a bereme

$$\sum_{i=d}^{d-1} r_{in} = 0\,.$$

Přitom pro distribuční funkci čekací doby γ můžeme psát

$$(2)\qquad w(t) = (1 - \Pi) \in(t) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1+c}\, w_{kk}(t)\,,$$

kde p_i, $i = 0, 1, \ldots$ je pravděpodobnost, že je v systému právě i zákazníků (čekajících nebo obsluhovaných), a $\Pi = p_c/(1 - \varrho)$ je pravděpodobnost čekání.

Užijeme-li na rovnice (1) a (2) Laplaceovu-Stieltjesovu transformaci, máme po úpravě

$$(3)\qquad -\psi_{k-1\,n-1}(s) \sum_{i=1}^{k-1} r_{in} + (1 + \varrho + s/c\mu)\,\psi_{kn}(s) - \psi_{kn-1}(s) \sum_{i=k+1}^{n} r_{in} - \\ - \varrho\psi_{kn+1}(s) = r_{kn}\,,$$

$$(4)\qquad \psi(s) = (1 - \Pi) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1+c}\, \psi_{kk}(s) = 1 - \Pi + p_c \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^{k-1}\, \psi_{kk}(s)\,,$$

kde

$$\psi_{kn}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, \mathrm{d}w_{kn}(t)\,, \quad \psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, \mathrm{d}w(t)\,.$$

Sečtěme rovnice (3) podle k od 1 do n. Dostaneme

$$-\sum_{k=1}^{n} \psi_{kn-1}(s) + \left(1 + \varrho + \frac{s}{c\mu}\right) \sum_{k=1}^{n} \psi_{kn}(s) - \varrho \sum_{k=1}^{n} \psi_{kn+1}(s) = 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Po vynásobení n-té rovnice ϱ^n a sečtení podle n je po úpravách

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n\, \psi_{nn}(s) = \frac{\varrho}{1 - \varrho} - \frac{s}{c\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \sum_{k=1}^{n} \psi_{kn}(s)\,.$$

Dosazení do vztahu (4) pak poskytne formuli

$$\psi(s) = 1 - \frac{s}{\lambda} \Pi(1 - \varrho) \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \sum_{k=1}^{n} \psi_{kn}(s) \,.$$

Pro střední hodnotu odtud máme

$$\mathbf{E}\gamma = -\psi'(0) = \frac{1}{\lambda} \Pi(1 - \varrho) \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \sum_{k=1}^{n} \psi_{kn}(0) = \frac{\Pi}{c\mu - \lambda}$$

(nezávisle na čekacím režimu) a pro druhý moment

$$\mathbf{E}\gamma^2 = \psi''(0) = \frac{2\Pi(1 - \varrho)}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\gamma_{kn} \,. \tag{5}$$

Odhadneme nyní velikost součtu

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\gamma_{kn} \,.$$

V dalším můžeme předpokládat, že systém S obsahuje pouze jedinou obsluhovací linku o parametru $c\mu$; jestliže jsou totiž v některém okamžiku všechny linky obsazeny, je pravděpodobnost, že se za čas t ani jediná z nich neuvolní,

$$\left(e^{-\mu t}\right)^c = e^{-c\mu t} \,.$$

Číslo A_n je součet středních hodnot doby čekání všech zákazníků, čekajících ve frontě délky n. Tento součet nezávisí zřejmě na pořadí, v němž je těchto n zákazníků obslouženo. Nechť tedy zmíněné pořadí je $k_1, k_2, \ldots, k_n$, kde $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ je nějaká permutace čísel $(1, 2, \ldots, n)$. Nechť během doby čekání $\gamma_{k_i n}$ k_i-tého zákazníka přijde d_i nových zákazníků. Pak je

$$\gamma_{k_i n} = T_0 + \sum_{j=1}^{i-1} T_{k_j} + \sum_{j=1}^{l_i} T'_j \,.$$

Zde T_0 je zbytková doba obsluhy zákazníka již v obsluze,

$T_{k_j}, j = 1, 2, \ldots, i - 1$ je doba obsluhy k_j-tého zákazníka,

l_i je počet nově přišlých zákazníků, kteří jsou obslouženi před k_i-tým zákazníkem, a

$T'_j, j = 1, 2, \ldots, l_i$ jsou jejich doby obsluhy.

Přejdeme-li k středním hodnotám, je

$$\mathbf{E}\gamma_{k_i n} = \frac{1}{c\mu} + \frac{1}{c\mu}(i - 1) + \frac{1}{c\mu} \mathbf{E}l_i \,.$$

Přitom l_i není větší než počet d_i vůbec přišlých zákazníků během doby $\gamma_{k_i n}$,

$$0 \leqq l_i \leqq d_i$$

a tudíž

$$0 \leqq \mathbf{E} l_i \leqq \mathbf{E} d_i .$$

Nabývá tedy $\mathbf{E}\gamma_{k_i n}$ své nejmenší hodnoty pro $l_i = 0$, což odpovídá případu obsluhy v pořadí příchodů (nikdo z nově přišlých není obsloužen dříve než již čekající) a největší hodnoty pro $l_i = d_i$, kdy mají všichni nově přišlí zákazníci přednost před již čekajícími (obsluha v obráceném pořadí). Označíme-li po řadě $\gamma'_{k_i n}$, $\gamma''_{k_i n}$ čekací dobu k_i-tého zákazníka při řádném resp. inversním čekacím režimu, je tedy

$$\mathbf{E}\gamma'_{k_i n} \leqq \mathbf{E}\gamma_{k_i n} \leqq \mathbf{E}\gamma''_{k_i n} , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \; n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

a tudíž

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\gamma'_{kn} \leqq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\gamma_{kn} \leqq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\gamma''_{kn} , \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Vzhledem ke vztahu (5) je pak

$$\mathbf{E}\gamma'^2 \leqq \mathbf{E}\gamma^2 \leqq \mathbf{E}\gamma''^2 ,$$

kde γ', γ'' jsou po řadě doby čekání při obou zmíněných čekacích disciplínách.

Ježto střední hodnota $\mathbf{E}\gamma$ nezávisí na pořadí obsluhy, je také

$$\mathbf{D}\gamma' \leqq \mathbf{D}\gamma \leqq \mathbf{D}\gamma'' . \tag{7}$$

Přitom rovnost na levé resp. pravé straně této formule platí pouze v případě, že způsob výběru do obsluhy přejde na řádnou resp. inversní disciplínu, neboť v opačném případě platí ostrá nerovnost ve vztahu (6) alespoň pro jednu hodnotu i, n.

Poznámka: V článku odvozená nerovnost (7) je dokázána obdobným způsobem pro systém s jinou čekací disciplínou v práci: Oldřich Vašíček, Jedna speciální čekací disciplína v systému hromadné obsluhy, Aplikace matematiky 10 (1965), č. 1, 59–71.

Резюме

К ДИСЦИПЛИНЕ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ОЛЬДРЖИХ ВАШИЧЕК (Oldřich Vašíček)

В статье сформулирована дисциплина ожидания в системе типа $M/M/c$, при которой будет обслужен определенный заказчик с вероятностью, зависящей от длины очереди и от порядка приходов. Доказано, что дисперция времени ожидания в такой системе достигает миниманольного, или же максимального, значения в том и только в том случае, когда обслуживание производится в порядке приходов, или же в обратном порядке.

Summary

A NOTE ON A QUEUEING DISCIPLINE

Oldřich Vašíček

The paper presents a queueing discipline in systems M/M/c such that the probability of a customer being taken into service depends on the length of the queue and on the order of his arrival. It is proved that, in such a system, the variance of the waiting time attains its maximum or minimum value if and only if the customers go into service according to the order of their arrivals or the inverse order, respectively.

Adresa autora: Oldřich Vašíček, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.