Aplikace matematiky

Karel Segeth

Сравнение точности некоторых формулировок краевых условий при использовании метода сеток

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 302–307

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102968

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

SVAZEK 10 (1965) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛИРОВОК КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА СЕТОК

КАРЕЛ СЕГЕТ (Karel Segeth)

(к теме с)

Мы будем заниматься краевыми задачами для уравнений в частных производных эллиптического типа.

Пусть имеется ограниченная область R и ее граница C. Для простоты мы ограничимся двухмерной (плоской) областью. На этой области будем решать уравнение Лапласа. Всегда на соответствующем месте мы обратим внимание на то, которые результаты, выведенные для уравнения Лапласа, имеют место и для общего эллиптического дифференциального уравнения.

Условия, заданные на границе C области R, мы обозначим следующим образом:

$$u = g \ldots \text{ условие Дирихле,}$$

$$u_n = j \ldots \text{ условие Неймана,}$$

$$u_n = -s(u - k) \ldots \text{ условие Ньютона,}$$

причем g, j, s, k — заданные функции, определенные на границе C, $s > 0$, u_n обозначает внешнюю нормальную производную. На разных частях границы C могут быть тоже заданы разные условия, тогда условие называют смещанным.

Решением краевой задачи мы разумеем функцию u, которая на области R удовлетворяет заданному уравнению и на границе C заданному краевому условию. Для простоты мы нигде не будем заниматься вопросами существования и однозначности решения и обратимся теперь прямо к решению заданной краевой задачи методом сеток.

Сущность метода сеток состоит в том, что мы в R и C выберем конечное множество точек (узлов сетки) и ищем значение сеточного решения U разностной задачи в этих точках. При этом мы заменим производные в заданном дифференциальном уравнении конечными разностями и краевое условие перенесем также в точки сетки.

Первая часть, замена производных разностями, решена для эллиптических уравнений вообще удовлетворительно.

Мы ограничимся квадратной и треугольной сетками. Сторону квадрата или треугольника этой сетки мы обозначим через h. Потом мы в точке P сетки составим хорошо известные разностные аппроксимации Δ_h оператора Лапласа для квадратной и треугольной сетки.

Качество аппроксимации дифференциального уравнения оценивают так, что ищут постоянную K (независящую от h) и целое положительное число n, удовлетворящие неравенству

$$\left|\Delta_h u - \Delta u\right| \leqq K h^n ;$$

затем говорят, что локальная погрешность имеет порядок $O(h^n)$.

В частности, локальная погрешность разностной аппроксимации Δ_h оператора Лапласа в квадратной сетке имеет порядок $O(h^2)$, в треугольной сетке порядок $O(h^4)$.

Равномерную погрешность, которая является решающим фактором для оценки качества аппроксимации, потом находят из неравенства

$$\max_P \left|u(P) - U(P)\right| \leqq K h^n ;$$

максимум берут по всем точкам сетки и погрешность обозначают $O(h^n)$. Эта равномерная погрешность, конечно, зависит не только от аппроксимации дифференциального уравнения, но и от переписи краевых условий.

Относительно простая и в общем удовлетворительно решенная — это перепись краевого условия Дирихле. Если граница C совпадает с линиями сетки — если мы, например, решим задачу на квадрате в удобно построенной квадратной сетке — то граничное условие можно формулировать точно.

Если граница C общая, и мы не хотим напрасно увеличивать погрешность, которую мы уже допустили при аппроксимации дифференциального уравнения, то мы должны формулировать краевое условие с соответствующей точностью.

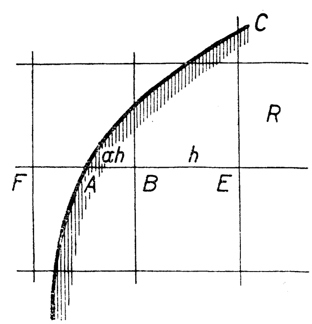

Рис. 1.

Вообще о задаче Дирихле и о любом эллиптическом уравнении можно сказать, что при локальной погрешности аппроксимации дифференциального уравнения порядка $O(h^2)$ достаточно произвести с краю линейную интерполяцию, чтобы получить равномерную погрешность тоже порядка $O(h^2)$.

В положении на рис. 1 мы по линейной интерполяции и по ряду Тейлора получим

$$u(B) = \frac{1}{\alpha + 1}\, u(A) + \frac{\alpha}{\alpha + 1}\, u(E) + O(h^2)$$

и напишем разностное уравнение

$$U(B) = \frac{1}{\alpha + 1} U(A) + \frac{\alpha}{\alpha + 1} U(E) .$$

Существуют тоже другие, более сложные обработки линейной интерполяции, которые имеют разные преимущества. Конечно, самой простой переписью краевого условия Дирихле является интерполяция нулевого порядка, т.е. один только перенос краевого условия с границы C в точку, которая находится от границы ближе всех.

В положении на рис. 1 мы по ряду Тейлора получим

$$u(B) = u(A) + O(h)$$

и напишем разностное уравнение

$$U(B) = U(A) .$$

Тогда можно показать, что равномерная погрешность аппроксимации есть порядка $O(h)$.

Интерполяцию нулевого порядка можно произвести еще одним способом — так, что мы к сетке присоединим точки, которые лежат вне R. По рис. 1 получим

$$u(F) = u(A) + O(h)$$

и напишем разностное уравнение

$$U(F) = U(A) .$$

Тогда можно тоже показать, что равномерная погрешность аппроксимации есть порядка $O(h)$.

Оба указанные способа интерполяции нулевого порядка можно, конечно, совершать при решении любого диференциального уравнения. Интересен вопрос, как связана выборка точек, в которые переносится краевое условие, по обеим сторонам границы, т.е. определенное ,,уравновешение“ границы линиями сетки, с точностью результатов.

На единичном круге мы решали задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{на} \quad R ,$$
$$u = \sin 4\vartheta \quad \text{на} \quad C$$

в квадратной сетке, шаг сетки $h = \frac{1}{11}$. Мы выбрали несколько разных множеств граничных точек для интерполяции нулевого порядка и для контроля мы ту же задачу решали при помощи самой простой линейной интерполяции на границе.

На рис. 2 имеются примеры множеств граничных точек. Граничные точки находятся или все внутри области R, или все вне области R, или по обеим сторонам границы C.

На рис. 3 построена в логарифмическом масштабе зависимость значения решения задачи, разделенного на $\sin 4\vartheta$, от расстояния точки сетки от центра единичного круга. Средняя линия – это точное решение дифференциальной задачи. Линия налево – это решение разностной задачи при построении первого множества граничных точек и линия направо при построении второго такого множества. Линии для остальных множеств граничных точек и для линейной интерполяции находятся между этими двумя линиями и их невозможно нарисовать сюда.

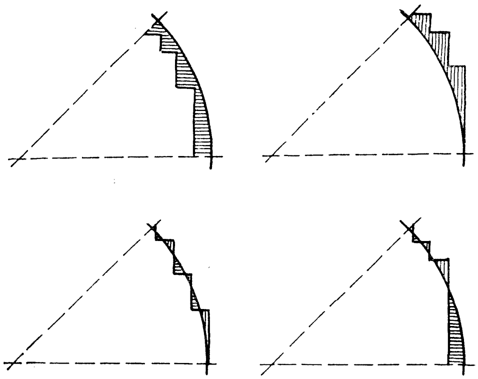

Рис. 2.

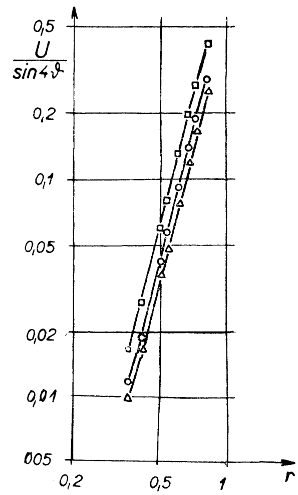

Рис. 3.

Можно сказать, что чем лучше нам удается „уравновесить“ границу C области, т.е. чем ближе граничные точки (в которых производится интерполяция нулевого порядка) к границе C (по обеим ее сторонам), тем точнее результаты. Притом погрешность в отдельной точке уменьшается пропорционально расстоянию этой точки от границы.

Более сложной является перепись краевых условий, в которых появляется нормальная производная решения. Об этой переписи тоже очень мало известно.

Даже в том случае, когда граница C совпадает с линиями сетки, нельзя точно формулировать краевое условие. Простым образом можно достигнуть равномерной погрешности аппроксимации порядка $O(h^2)$. Здесь, конечно, важно, что решаем краевую задачу для уравнения Лапласа.

Если граница C области общая, то положение значительно сложнее. Если идет речь о задаче для уравнения Лапласа с условием Неймана и если граница гладкая (т.е. имеет непрерывную касательную), то можно пользоваться относительно точными (погрешность $O(h^2)$), но весьма сложными формулами

Висванатхана. Обычно здесь удовлетворятся равномерной погрешностью $O(h)$. В таком случае построят нормаль, определят ее отклонение от линий сетки и при помощи линейной интерполяции получают формулы для условия Неймана и Ньютона. Перепись не зависит от того, какое уравнение задано внутри R. Но она, ввиду достигнутой погрешности $O(h)$, весьма сложная.

Мы попробуем поступать и в случае условий с нормальной производной аналогично, как при условии Дирихле, т.е. „уравновесить" границу линиями сетки и воспользоваться потом указанными формулами для области, граница которой совпадает с линиями сетки. Погрешность, которую мы допустим при этой переписи краевых условий, возникает по двум причинам: прежде всего, мы не учитываем направление внешней нормали, далее, переносим значение функций, появляющихся в краевом условии, в точки сетки мимо границу. Теоретическое исследование этой переписи нам пока не дается. Поэтому мы сделали ряд экспериментов.

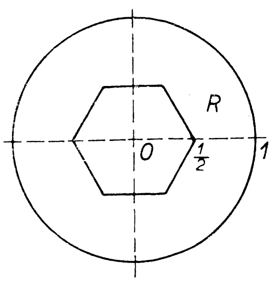

Рис. 4.

Мы решали смешанную задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{на } R, \\ u &= \left(r^3 + r^{-3}\right)\sin 3\vartheta \quad \text{на шестиугольнике}, \\ u_n &= 0 \quad \text{на окружности}, \end{aligned}$$

в треугольной сетке, область R изображена на рис. 4. Локальная погрешность аппроксимации уравнения Лапласа на области R имеет порядок $O(h^4)$, перепись условия Дирихле на шестиугольнике можно произвести точно (граница совпадает с линиями сетки, значит, в качестве равномерной погерешности выступает именно погрешность переписи условия Неймана.

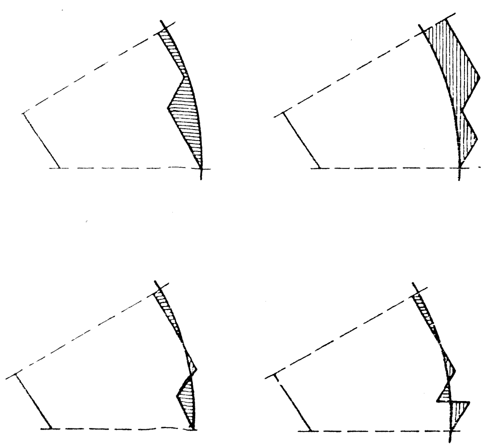

Рис. 5.

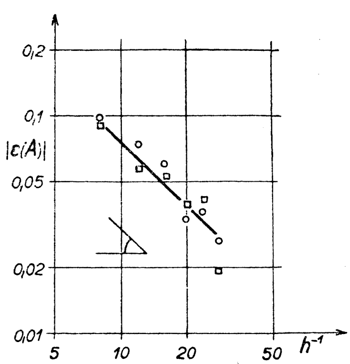

Рис. 6.

Мы построили всегда четыре типа ,,уравновешения" границы линиями сетки для каждого шага сетки $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{28}$. У типа I все граничные точки (в которых производилась перепись краевого условия) находятся внутри $R \cup C$, у типа II все граничные точки вне R, и типов III A, III B граничные точки по обеим сторонам границы C. На рис. 5 изображены множества граничных точек для шага сетки $h = \frac{1}{8}$. Задачу достаточно решать на $\frac{1}{12}$ области R, так как решение симметрично.

Чтобы взаимно сравнить результаты для отдельных шагов h, мы выберем точку A приблизительно в центре тяжести $\frac{1}{12}$ области R и как значение погрешности $\varepsilon(A)$ примем значение разности $u(P) - U(P)$ в той точке P сетки, которая находится по данному шагу h ближе всех к точке A. На рис. 6 мы получили в логарифмическом масштабе зависимость погрешности $|\varepsilon(A)|$ от шага h^{-1} на графике. Погрешность имеет приблизительно порядок $O(h)$. Подобные результаты мы получили тоже в четырех остальных контрольных точках.

Следовательно, можно для уравнения Лапласа и любого краевого условия построить описанным образом аппроксимацию, о специальном виде которой мы экспериментально показали, что она порядка $O(h)$. При этом способ построения очень простой, и составить разностные уравнения может без затруднений прямо вычислительная машина.

Библиография

[1] *I. Babuška, M. Práger, E. Vitásek:* Numerické řešení diferenciálních rovnic, SNTL, Praha 1964.

[2] *J. H. Bramble, B. E. Hubbard:* On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation, Num. Math. 4 (1962), 313—327.

[3] *K. Segeth:* Дипломная работа в Математико-физическом факультете Университета Карла, Praha, 1964.

[4] *R. V. Viswanathan:* Solution of Poisson's equation by relaxation method — normal gradient specified on curved boundaries, Math. Tables Aids Comput. 11 (1957), 67—78.

Karel Segeth, Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1, ČSSR.