Gurij Ivanovich Marchuk

Об автоматическом построении вычислительных алгоритмов

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 255–267

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102960`

ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ[1])

Г. И. МАРЧУК (G. I. MARČUK)

(к теме с)

1. В настоящее время математика становится все более мощным инструментом исследования во всех областях современной науки. Возникают новые методы математического описания процессов, которые принято называть математическим моделированием. Можно сказать, что математическое моделирование является одной из основных тенденций развития современной науки и техники. Особое значение математическое моделирование преобретает в настоящее время, когда открыты и успешно развиваются новые средства решения сложных математических задач, которыми являются электронно-вычислительные машины (ЭВМ).

2. Разработка новых вычислительных методов, а также способов программирования — одна из главных задач вычислительных центров. Поскольку вычислительная математика должна в первую очередь способствовать решению наиболее сложных новых проблем науки и техники, её связь с конкретными областями знаний должна быть тесной. Научные открытия в области вычислительной математики почти всегда начинались с решения конкретных задач. Лишь в дальнейшем, после глубокого анализа и обобщения достигнутых результатов, разработанные способы вычислений получали ,,чистое" математическое оформление и становились методами вычислительной математики.

3. Существенное место в развитии науки преобретает проблема эффективной связи человека с вычислительной машиной. Уже создано несколько систем автоматического программирования, которые дают возможность определить дальнейшие пути развития теории и методов программирования. Однако, это лишь первый этап в развитии методов эффективного использования вычислительных машин. Сейчас, когда ЭВМ становятся все более мощными и совер-

[1]) Ввиду того, что автор не мог по неожиданной причине принять участие в работе конференции, было на заседании прочитано только резюме его реферата, который публикуем полностью.

щенными, возникает новая крупная проблема автоматического построения самых вычислительных методов или алгоритмов.

4. Решение проблемы автоматического построения вычислительных алгоритмов с помощью ЭВМ становится возможным в настоящее время, когда открываются новые подходы к решению сложных задач математической физики. Эти подходы основаны на идеях расщепления сложных операторов задач на простейшие, на широком применении в расчетах быстросходящихся и хорошо обусловленных вычислительных схем с помощью проведений аналитических выкладок на ЭВМ.

5. Метод расщепления является наиболее мощным аппаратом вычислительной математики. Он является своеобразным обобщением релаксационных методов и их естественным расширением. В самом деле, в вычислительной математике обычно представляют интерес релаксационные процессы, сходящиеся к точному решению задачи, тогда как в методе расщепления мы имеем дело с релаксационными процессами вообще говоря не сходящимися к точному решению, но отличающимися от точного на бесконечно малые величины того или иного порядка.

Пуст требуется решить задачу

$$A\varphi = f, \tag{1}$$

где A — заданный линейный оператор, а f — известная функция, то классический релаксационный процесс определяется, например, формулой

$$\varphi^{n+1} = (E - \tau A)\,\varphi^n + \tau f, \tag{2}$$

где τ — параметр релаксации, а n — номер последовательного приближения.

Если A — сложный оператор, состоящий, например, из суммы двух простых $A = A_1 + A_2$, то уравнению (1) можно поставить в соответствие расщепленную систему

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)\varphi^{n+1} = \varphi^n + \tau f, \tag{3}$$

которая сводится к простейшим задачам

$$\begin{aligned} &\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)\varphi^{n+\frac{1}{2}} = \varphi^n + \tau f, \\ &\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)\varphi^{n+1} = \varphi^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Предполагается, что система уравнений (4) уже может быть решена простейшими методами. Если процессы последовательных приближений (2) и (3) сходятся, то в первом случае предельный элемент φ^∞ будет решением задачи

$$A\varphi^\infty = f,$$

а во втором случае

$$A\varphi^\infty = f - \frac{\tau}{4} A_1 A_2 \varphi^\infty .$$

Если τ мало, то вообще говоря, решение задачи (3) будет мало отличаться от решения задачи (1).

6. При $\tau \to 0$ решение задачи (3) может стремиться к точному решению задачи (1), однако, при этом возникает вычислительная α неустойчивость, которую открыл И. Бабушка и получение приближенного решения с заданной степенью точности возможно лишь при регуляризации вычислительного алгоритма.

Процесс регуляризации производится с помощью введения некоторого нового положительно определенного оператора сглаживания, который ,,не очень сильно" портит решение задачи при фиксированном τ.

7. Наряду с проблемой регуляризации возникает проблема экономичного счета при соответствующим образом выбранной последовательности значений $\tau_j \to 0$. Можно ожидать, что наиболее экономичные и быстросходящиеся вычислительные схемы расщепления будут связаны с методом наискорейшего спуска, аналогично тому, как это имеет место в некоторых классических релаксационных схемах.

8. Известны различные схемы расщепления, сходящиеся к точному решению задач. Это схема Писсмана, Дугласа, Рэкфорда и разновидности ее, не эквивалентные по реализации.

Например, рассмотрим схему

$$(5) \qquad \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)\varphi^{n+1} = \left(E - \frac{\tau}{2} A_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2} A_2\right)\varphi^n + \tau f,$$

реализация которой, аналогично случаю (3), сводится к расщепленной системе четырех простейших задач. Различные реализации этой схемы предложены Дугласом, Самарским, Марчуком, Яненко, Дьяконовым и др.

9. Поскольку для решения сложных задач методом расщепления появляется возможность конструкции разных схем реализации, особое значение приобретает проблема обоснования вычислительного алгоритма.

Для этой цели важно создать способы осуществления на ЭВМ аналитических доказательств сходимости методов. Необходимо, в частности, построить эффективные методы машинной оценки норм функций и операторов в соответствующих пространствах. С особой остротой встает вопрос об оценке собственных чисел операторов. Работы по применению ЭВМ для осуществления аналитических выкладок необходимо максимально развивать.

10. Автоматическое построение вычислительных алгоритмов может эффективно быть произведено на базе хорошо отработанных элементарных алгоритмов, так чтобы сложная математическая задача распадалась на последовательность простых задач эффективно реализуемых с помощью ЭВМ. Например, трехмерные задачи математической физики свелись бы к последовательному решению одномерных задач или задачи, связанные с решением кинетических уравнений Больцмана, свелись бы к решению задач только с дифференциальными и только с интегральными операторами и т.д. В этом случае элементарным алгоритмом можно было назвать реализацию одномерной задачи или интегрального уравнения соответственно. Хотя и в настоящее время решение задачи на ЭВМ связано с расчленением её на простейшие арифметические и логические операции, однако, при автоматизации построения вычислительных алгоритмов главное внимание будет уделено расчленению задачи на большие части, причем роль элементарных алгоритмов будут играть большие блоки.

11. Решение проблемы автоматического построения вычислительного метода безусловно окажет существенное влияние на структуру самых ЭВМ. Будущие вычислительные машины, по-видимому, будут все более специализироваться по отраслям науки и техники, и иметь средства наибыстрейшей реализации „стандартных" элементарных алгоритмов и более медленного осуществления универсальных операций, не предусмотренных набором стандартных алгоритмов.

12. Важная задача, которая сейчас стоит перед вычислительной математикой, по-видимому, состоит в построении такого логического языка, который бы, подобно современным трансляторам, позволил большие классы задач из отдельных научных направлений автоматически переводить в эффективные вычислительные алгоритмы. Эта проблема в недалеком будущем может быть решена, например, для задач линейной алгебры, для различных классов задач математической физики, теории переноса излучения, теории упругости, метеорологии и др., где математическая постановка задач уже определилась и накоплен большой практический опыт на основе хорошо разработанного метода конечных разностей. В дальнейшем сфера автоматизации построения вычислительных методов должна активно расширяться.

13. Высказанные соображения имеют применение при решении различных задач. В качестве примера отметим две задачи: Прогноз погоды и решение кинетического уравнения Больцмана.

Переходим к формулировке задачи о прогнозе полей метеорологических элементов, используя примитивные уравнения на плоской Земле. Сначала рассмотрим наиболее простую постановку задачи в рамках квази-статического приближения в системе координат (x, y, p, t). Если считать, что процесс адиабатический и турбулентный обмен отсутствует, то задача формулируется особенно просто

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y - lv = -H_x\,, \\
&v_t + uv_x + vv_y + lu = -H_y\,, \\
&T_t + uT_x + vT_y - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} RT \frac{\tau}{p} = 0\,, \\
&u_x + v_y + \tau_p = 0\,, \\
&T = -\frac{p}{R}\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где u, v, τ — компоненты вектора скорости по осям координат x, y, p — соответственно, p — давление, H — высота абсолютной топографии изобарических поверхностей $p = \text{const.}$, T — температура, $[(\gamma_a - \gamma)/g]\, RT$ — параметр стратификации атмосферы, предполагаемый известной функции.

Система уравнений (1) решается при условии

$$
\begin{aligned}
&\tau = \tau_0 \quad \text{при} \quad p = p_0\,, \\
&\tau = 0 \quad \text{при} \quad p = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Решение задачи (1)–(2) будем искать с помощью конечноразностного метода. С этой целью весь интервал времени разобьем на интервалы $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, и в пределах каждого из таких интервалов системы уравнений (1) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} + u^j u_x^j + v^j u_y^j - lv^{j+1} = -H_x^{j+1}\,, \\
&\frac{v^{j+1} - v^j}{\Delta t} + u^j v_x^j + v^j v_y^j + lu^{j+1} = -H_y^{j+1}\,, \\
&\frac{T^{j+1} - T^j}{\Delta t} + u^j T_x^j + v^j T_y^j - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} RT \frac{\tau^{j+1}}{p} = 0\,, \\
&u_x^{j+1} + v_y^{j+1} + \tau_p^{j+1} = 0\,, \\
&T^{j+1} = -\frac{p}{R} H_p^{j+1}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Очевидно, что система уравнений (3) аппроксимирует систему (1) с точностью до величин первого порядка малости по Δt.

Систему уравнений (3) вместо с граничными условиями можно решить следующим образом. Разрешим сначала два первых уравнения системы (3) относительно u^{j+1}, v^{j+1}. Тогда получим

$$(4)\qquad \begin{aligned} u^{j+1} &= -\frac{\Delta t}{1+\alpha^2}\left(H_x^{j+1} + \alpha H_y^{j+1}\right) + \frac{a^j}{1+\alpha^2}\,,\\ v^{j+1} &= -\frac{\Delta t}{1+\alpha^2}\left(H_y^{j+1} - \alpha H_x^{j+1}\right) + \frac{b^j}{1+\alpha^2}\,, \end{aligned}$$

где

$$(5)\qquad \begin{aligned} a^j &= (u - \Delta t\, A)^j + \alpha(v - \Delta t\, B)^j\,,\\ b^j &= (v - \Delta t\, B)^j - \alpha(u - \Delta t\, A)^j\,, \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} A^j &= u^j u_x^j + v^j u_y^j\,,\\ B^j &= u^j v_x^j + v^j v_y^j\,, \end{aligned}$$

$$(7)\qquad \alpha = l\,\Delta t\,.$$

Подставим выражение (4) в уравнение неразрывности, тогда будем иметь

$$(8)\qquad \tau_p^{j+1} = \frac{\Delta t}{1+\alpha^2}\left(H_{xx} + H_{yy} + \alpha_x H_y - \alpha_y H_x\right)^{j+1} - \frac{1}{1+\alpha^2}\left(a_x + l y\right)^j.$$

Переходим теперь к рассмотрению уравнения притока тепла. Разрешим это уравнение относительно τ^{j+1}, получим

$$(9)\qquad \begin{aligned} \tau^{j+1} &= \frac{pg}{(\gamma_a - \gamma)\,RT\Delta t}\left(T^{j+1} - T^j + \Delta t\, C^j\right),\\ C^j &= u^j T_x^j + v^j T_y^j\,, \end{aligned}$$

исключим из первого уравнения (9) функцию T^{j+1} с помощью уравнения статики и результат продифференцируем по p. Тогда будем иметь

$$(10)\qquad \tau_p = -\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2 g}{(\gamma_a - \gamma)\,R^2 T\Delta t}\,H_p^{j+1} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{pg}{(\gamma_a - \gamma)\,RT\Delta t}\left(T^j - \Delta t\, C^j\right).$$

Исключая из уравнения (8) и (9) τ_p^{j+1}, приходим к уравнению для H^{j+1}

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{m^2}\,H_p^{j+1} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\left(H_{xx} + H_{yy} + \alpha_x H_y - \alpha_y H_x\right)^{j+1} = -f^j\,,$$

где

$$f^j = \frac{\partial}{\partial p}\frac{pR}{m^2}\left(T - \frac{\alpha}{l}C\right) - \frac{\alpha l}{1 + \alpha^2}(a_x + b_y), \tag{12}$$

$$m^2 = \frac{\gamma_a - \gamma}{gl^2}R^2T.$$

В качестве граничного условия при $p = p_0$ примем следующее

$$\frac{p}{m^2}H_p^{j+1} - \frac{l^2}{RT}H^{j+1} = -F^j, \tag{13}$$

где

$$F^j = \frac{l^2}{RT}H^j + \frac{R}{m^2}\left(T^j - \frac{\alpha}{l}C^j\right).$$

Условие (13) является следствием уравнений притока тепла при $p = p_0$ и равенства

$$\tau_0 = -\frac{p}{RT}H_t.$$

На верхней границе атмосферы, при $p = 0$ поставим условие

$$pH_p^{j+1} = -R\left(T^j - \frac{\alpha}{l}C^j\right). \tag{14}$$

Рассмотрим теперь задачу (3) с несколько иной точки зрения. Введем вспомогательные функции, которые будем отмечать индексами снизу — φ_k, причем

$$\varphi_0 = \varphi^j, \quad \varphi_1 = \varphi^{j+1}$$

и систему уравнений (3) запишем в виде следующих трех систем

$$\frac{u_1 - u^j}{\Delta t} + u^j u_x^j = 0, \tag{15}$$

$$\frac{v_1 - v^j}{\Delta t} + u^j v_x^j = 0,$$

$$\frac{T_1 - T^j}{\Delta t} + u^j T_x^j = 0,$$

$$(16)\qquad \frac{u_2 - u_1}{\Delta t} + v^j u_y^j = 0\,,$$

$$\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} + v^j v_y^j = 0\,,$$

$$\frac{T_2 - T_1}{\Delta t} + v^j T_y^j = 0\,,$$

$$(17)\qquad \frac{u^{j+1} - u_2}{\Delta t} - l v^{j+1} = -H_x^{j+1}\,,$$

$$\frac{v^{j+1} - v_2}{\Delta t} + l u^{j+1} = -H_y^{j+1}\,,$$

$$\frac{T^{j+1} - T_2}{\Delta t} - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} RT \frac{\tau^{j+1}}{p} = 0\,,$$

$$u_x^{j+1} + v_y^{j+1} + \tau_p^{j+1} = 0\,,$$

$$T^{j+1} = -\frac{p}{R} H_p^{j+1}\,.$$

Система уравнений (17) решается при условии (13), (14).

Нетрудно проверить с помощью непосредственного исключения вспомогательных функций φ_1, φ_2 из систем (15)–(17), что в результате мы приходим к задаче (3), (13), (14). Это значит, что совокупность систем уравнений (15)–(17) является лишь иной формой ранее сформулированной системы уравнений.

Таким образом, систему уравнений (3) удалось расщепить на три простейших системы (15), (16), (17).

Единственным недостатком полученной системы является то, что новые две системы (15), (16) оказываются явно разрешенными относительно неизвестных функций. Это значит, что представление этих систем в конечно-разностном виде по пространственным переменным приводит к системам устойчивым только при выполнении некоторых дополнительных требований. Так, если пространственные производные представить с помощью центральных разностей, то схемы будут неустойчивыми в счетном отношении, хотя порядок аппроксимации уравнений по пространственным переменным будет вторым; если же производные заменить односторонними разностями с учетом направления вектора скорости, то приходим к устойчивым схемам при соблюдении условий Куранта, хотя порядок аппроксимации будет первым. Таким образом, счетная устойчивост достигается существенной потерей точности. В связи с этим обстоятельством появляется стремление к построению абсолютно устойчивых расщепленных систем, имеющих второй порядок аппроксимации.

С целью построения абсолютно устойчивых разностных систем поступим следующим образом: систему уравнений (15)–(16) заменим неявнями системами вида

(15a)
$$\frac{u_1 - u^j}{\Delta t} + u^j u_{1x} = 0\,,$$
$$\frac{v_1 - v^j}{\Delta t} + u^j v_{1x} = 0\,,$$
$$\frac{T_1 - T^j}{\Delta t} + u^j T_{1x} = 0\,,$$

(16a)
$$\frac{u_2 - u_1}{\Delta t} + v^j u_{2y} = 0\,,$$
$$\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} + v^j v_{2y} = 0\,,$$
$$\frac{T_2 - T_1}{\Delta t} + v^j T_{2y} = 0\,.$$

В качестве замыкающей третьей системы снова примем систему (17). Нетрудно проверить, что система уравнений (15a), (16a), (17) уже не является точным аналогом системы (3), а будет аппроксимировать её с точностью до малых величин порядка Δt. Но поскольку сама система (3) аппроксимирует систему уравнений (1) с такой же точностью, то отсюда непосредственно следует, что в смысле порядка аппроксимации исходной системы (1) разностные системы (15), (16), (17), (15a), (16a), (17) оказываются эквивалентными. Однако, неявные разностные схемы всегда оказываются более предпочтительными по сравнению со схемами явными, поэтому они будут составлять основу для формирования совокупности элементарных алгоритмов.

Можно показать, что замена геометрических производных центральными разностными отношениями приведет к абсолютно устойчивым схемам при любом отношении шагов по времени к шагам по пространству. Если к этому добавить что получаемые трехточечные разностные схемы оказываются эффективно реализуемыми на вычислительных машинах с помощью метода факторизации, то преимущества указанного расщепления основной системы уравнений (1) на системы (15a) (16a), (17) будут безусловными.

Поскольку каждая из систем разностных уравнений, порожденных системами (15a), (16a), (17) является в счетном отношении устойчивой, можно показать в предположении постоянства коэффициентов u^j, v^j на каждом шаге и во всей области изменения пространственных переменных, что совокупность счетных алгоритмов, определенных разностным аналогом систем (15a), (16a), (17) также будет устойчивой.

Таким образом, в рассматриваемом случае нам удалось общий вычислительный алгоритм представить в виде совокупности элементарных алгоритмов.

Переходим теперь к рассмотрению более сложной задачи, а именно, вместо системы уравнений (1) рассмотрим следующую:

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + \tau u_p - lv = - H_x + (\lambda p^2 u_p)_p\,, \\
&v_t + uv_x + vv_y + \tau v_p + lu = - H_y + (\lambda p^2 v_p)_p\,, \\
&T_t + uT_x + vT_y - \frac{\gamma_a - \gamma}{RT}\frac{\tau}{p} = \frac{\varepsilon}{C_p} + (\lambda_T p^2 T_p)_p\,, \\
&u_x + v_y + \tau_p = 0\,, \\
&T = - \frac{p}{R} H_p\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

В соответствии с изложенным выше на интервале $t_j \leqq t \leqq t_{j+1}$ систему уравнений (18) аппроксимируем следующей расщепленной системой

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_1 - u^j}{\Delta t} + u^j u_{1x} = 0\,, \\
&\frac{v_1 - v^j}{\Delta t} + u^j v_{1x} = 0\,, \\
&\frac{T_1 - T^j}{\Delta t} + u^j T_{1x} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_2 - u_1}{\Delta t} + v^j u_{2y} = 0\,, \\
&\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} + v^j v_{2y} = 0\,, \\
&\frac{T_2 - T_1}{\Delta t} + v^j T_{2y} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_3 - u_2}{\Delta t} + \tau^j u_{3p} = 0\,, \\
&\frac{v_3 - v_2}{\Delta t} + \tau^j v_{3p} = 0\,, \\
&T_3 = T_2\,,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

(22)
$$\frac{u_4 - u_3}{\Delta t} - (\lambda p^2 u_{4p})_p = 0\,,$$
$$\frac{v_4 - v_3}{\Delta t} - (\lambda p^2 v_{4p})_p = 0\,,$$
$$\frac{T_4 - T_3}{\Delta t} - (\lambda p^2 T_{4p})_p = 0\,,$$

(23)
$$\frac{u^{j+1} - u_4}{\Delta t} - lv^{j+1} = -H_x^{j+1}\,, \quad \frac{v^{j+1} - v_4}{\Delta t} + lu^{j+1} = H_y^{j+1}\,,$$
$$\frac{T^{j+1} - T_4}{\Delta t} - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} RT \frac{\tau^{j+1}}{p} = \frac{\varepsilon}{C_p}\,,$$
$$u_x^{j+1} + v_y^{j+1} + \tau_p^{j+1} = 0\,, \quad T^{j+1} = -\frac{p}{R} H_p^{j+1}\,.$$

Анализ систем уравнений (19)–(23) показывает, что по существу системы уравнений (19), (20) и (23) совпадают с соответствующими системами (15a), (16a), (17). Здесь в последнем случае лишь аддитивно добавляются две системы (20) и (22), которые при реализации сводятся к последовательности трехточечных разностных уравнений, абсолютно устойчивых в счетном отношении.

Совершенно аналогично можно в основных уравнениях динамики учесть горизонтальный макротурбулентный обмен. В этом случае, к системе расщепленных уравнений (19)–(23) следовало бы добавить две системы вида (22), где производные по координате p следовало бы заменить на производные по x и y.

Остановимся теперь на наиболее трудном вопросе – решении уравнения для функции H

(24)
$$\left(\frac{p^2}{m^2} H_p^{j+1}\right)_p + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} (H_{xx} + H_{yy} + \alpha_x H_y - \alpha_y H_x)^{j+1} = -f^{j+1}\,,$$

где

(25)
$$f^{j+1} = \left(R \frac{p}{m^2} T\right)_p - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} [(u + \alpha v)_x + (v - \alpha u)_y]\,,$$

при условии

(26)
$$pH_p^{j+1} - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} RH^{j+1} = C^j\,, \quad p = p_0\,,$$
$$pH_p^{j+1} = 0\,, \qquad p = 0\,.$$

Здесь C^j известная функция координат (x, y, t_j).

Для решения задачи (24), (26) сформулируем следующий экономичный релаксационный метод, основанный на методе расщепления. Введем в рассмотрение новую переменную ξ и уравнение (24) преобразуем в следующее

$$H_\xi = \left(\frac{p^2}{m^2} H_p\right)_p + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\left(H_{xx} + H_{yy} + \alpha_x H_y - \alpha_y H_x\right) + f, \tag{27}$$

где

$$H = H(x, y, p, \xi), \quad H^{j+1} = H(x, y, p, \infty).$$

Выберем произвольный интервал $\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n$, в пределах которого проведем расщепление уравнения (27)

$$\frac{H_{n+\frac{1}{3}} - H_n}{\Delta\xi} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\left(H_{xx} - \alpha_y H_x\right)_{n+\frac{1}{3}}, \tag{28}$$

$$\frac{H_{n+\frac{2}{3}} - H_{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\xi} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\left(H_{yy} + \alpha_x H_y\right)_{n+\frac{2}{3}},$$

$$\frac{H_{n+1} - H_{n+\frac{2}{3}}}{\Delta\xi} = \left(\frac{p^2}{m^2} H_p\right)_p^{n+1} + f.$$

Уравнения (28) вместе с соответствующими граничными условиями записываются в конечно-разностном виде по переменным (x, y, p) подобно тому, как было указано выше. Трехточечные разностные уравнения решаются с помощью метода факторизации.

Особое внимание заслуживает вопрос о выборе параметра релаксации $1/\Delta\xi$. В связи со спецификой задачи удается сформулировать быстро сходящийся процесс.

Если, далее, в качестве нулевого приближения принять экстраполированные значения H_0, т.е.

$$H_0 = H^j + \Delta H^j,$$

где $\Delta H^j = H^j - H^{j-1}$, то практически необходимая для расчетов точность достигается после нескольких первых итераций.

II. РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Рассмотрим кинетическое уравнение Больцмана для одномерной геометрии

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sigma\varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha' \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu' \varphi\gamma(\mu_0) + f \tag{1}$$

при условии

$$\varphi\big|_{x=0} = 0\,, \quad \mu > 0\,, \tag{2}$$
$$\varphi\big|_{x=H} = 0\,, \quad \mu < 0\,.$$

Уравнение (1) расщепляется на два уравнения

$$\frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j}{\Delta\tau} + \mu\frac{\partial\varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \sigma\varphi^{j+\frac{1}{2}} = 0\,, \tag{3}$$
$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau} = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha' \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu'\varphi^{j+1}\gamma(\mu_0) + f\,,$$

где $\tau = vt$.

Стандартным приемом можно показать, что разность между точным и приближенным решением удовлетворяет следующим неравенствам

$$\|\varphi^j - \varphi(x, \tau_j)\| \leqq M\,\Delta\tau\,.$$

Аналогично соотношению (5) (пункт 8) можно построить схему второго порядка точности по $\Delta\tau$.

Таким образом, приходим в выводу о возможности полного расщепления основных уравнений прогноза погоды и кинетического уравнения Больцмана на последовательность простейших задач, описываемых стандартными алгоритмами. Представляется, что такой метод в настоящее время окажестя эффективным при математическом моделировании все более усложняющих уравнений.

Г. И. Марчук, Вычислительный центр Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск 72, СССР.