Josef Kolomý

Новые методы решения линейных функциональных уравнений

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 246–248

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102958`

НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЙОСЕФ КОЛОМЫ (JOSEF KOLOMÝ)

(к теме d)

1. В работах [1], [2] рассмотрены итерационные методы решения функционального уравнения

(1) $$Ax = f,$$

где A — линейный ограниченный оператор в действительном или комплексном гильбертовом пространстве H, $f \in H$. Идея этих методов заключается в том, что последовательные приближения вычисляются по формуле

(2) $$x_{n+1} = Pf + \beta_n(I - PA)\, x_n\,, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

где P — линейный ограниченный оператор в H такой, что A перестановочен с P. Коэффициенты β_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются так, чтобы выполнялось одно из следующих условий

(3) $$\|f - \beta_n A x_n\|^2 = \mathrm{Min}\,,$$

(4) $$\|f - Ax_{n+1}\|^2 = \mathrm{Min}\,.$$

Из (3), (4) вытекает соответственно

(5) $$\beta_n = \frac{\mathrm{Re}\,(f, Ax_n)}{\|Ax_n\|^2}\,,$$

(6) $$\beta_n = \frac{\mathrm{Re}\,(Lf, LAx_n)}{\|LAx_n\|^2}\,, \quad L = I - PA\,.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1 ([1], [2]). *Пусть A, P — линейные ограниченные перестановочные операторы в H, и P таков, что P^{-1} существует в H, и выполнено условие $\|I - PA\| = q < 1$. Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение x^* в H.*

Последовательности $\{x_n\}$, $\{\tilde{x}_n\}$, *определенные равенствами* (2), (5); (2), (6), *сходятся к* x^* *по норме* H, *и имеют место оценки*

$$\|x^* - x_n\| \leqq kq^n\|f - Ax_0\| ,$$
$$\|x^* - \tilde{x}_n\| \leqq kq^n\|f - A\tilde{x}_0\| ,$$
$$\|x^* - x_n\| \leqq kq\left\{\|f\|^2 - \frac{[\operatorname{Re}(f, Ax_{n-1})]^2}{\|Ax_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} ,$$
$$\|x^* - \tilde{x}_n\| \leqq kq\left\{\|Lf\|^2 - \frac{[\operatorname{Re}(Lf, LA\tilde{x}_{n-1})]^2}{\|LA\tilde{x}_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

где $k = \|A^{-1}\| \leqq \|P\|/(1 - q)$, $x_0, \tilde{x}_0 \in H$.

Пусть $A = I - \lambda K$, где K — линейный ограниченный оператор в H, λ — в общем, комплексный параметер.

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из следующих условий*:

1) $P = I$, $\|\lambda K\| < 1$.

2) $P = \vartheta I$, λ — *действительный параметр*, K — *симметрический*, $(\lambda Kx, x) \leqq 0$ *для всех* $x \in H$, $0 < \vartheta < 1/(1 + \|\lambda K\|)$.

3) $P = \vartheta I$, $\operatorname{Re}(Ax, x) \geqq m\|x\|^2$ *для всех* $x \in H$, $(m > o)$ *и* $0 < \vartheta < 2m/\|A\|^2$.

4) $P = \vartheta^2(I - \bar{\lambda}K^*)$, *где* $\bar{\lambda}$ — *сопряженное число с* λ, K^* — *сопряженный оператор с* K, K — *нормальный оператор*; $\|Ax\| \geqq k\|x\|$, $k > 0$, $0 < \vartheta < k\sqrt{2}/(1 + \|\lambda K\|)^2$.

5) $P = I + J$, *где* J — *линейный ограниченный оператор в* H, *перестановочный с* K *и такой, что* $\|\lambda G - J\| < 1/(1 + \|\lambda K\|)$, *где* G — *резольвентный оператор для оператора* K.

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение* x^* *в* H. *Последовательности* $\{x_n\}$, $\{\tilde{x}_n\}$, *определенные равенствами* (2), (5); (2), (6), *сходятся к* x^* *по норме* H *с быстротой геометрической прогрессии.*

Для практического вычисления надо знать оценку числа q. Число q можно заменить числом $q'(q \leqq q' < 1)$, так что в случаях: 1) $q' = \|\lambda K\|$, 2) $q' = 1 - \vartheta$, 3) если $\vartheta = m/\|A\|^2$ то $q' = \{1 - (m/\|A\|)^2\}^{\frac{1}{2}}$, 5) $q' = \|\lambda G - J\| . \|I - \lambda K\|$.

2. Пусть операторы A, P удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть, далее, A — симметрический оператор в H. Обозначим через x^* единственное в H решение уравнения (1). Действительные коэффициенты β_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определим так, чтобы выполнялось одно из следующих условий

$$\|x^* - \beta_n x_n\|^2 = \operatorname{Min} ,$$
$$\|x^* - x_{n+1}\|^2 = \operatorname{Min} .$$

Приравнивая нулю производные

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_n}\left\|x^* - \beta_n x_n\right\|^2, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_n}\left\|x^* - x_{n+1}\right\|^2,$$

находим соответственно

$$\beta_n = \frac{\operatorname{Re}(f, Px_n)}{\operatorname{Re}(x_n, PAx_n)}, \tag{7}$$

$$\beta_n = \frac{\operatorname{Re}(Lf, PLx_n)}{\operatorname{Re}(Lx_n, PLAx_n)}. \tag{8}$$

Формулы (2), (7); (2), (8) определяют итерационные процессы, обеспечивающие на каждом шаге наибольшее возможное уменьшение норм ошибок $\|x^* - x_n\|$, $\|x^* - x_{n+1}\|$. В случае симметрического оператора норма ошибки $\|x^* - x_n\|$ на каждом шаге при использовании формул (2), (7); (2), (8) меньше, чем норма ошибки $\|x^* - x_n\|$ при использовании формул (2), (5) или (2), (6). Если выбрать оператор P подходящим образом, то формулы (7), (8) более просты, чем (5), (6) соответственно. Методы, определенные формулами (2), (5); (2), (7) являются более простыми, чем методы типа наискорейшего спуска [3], [4], [5]. Вместе с методами (2), (6); (2), (8) дают, в сущности, ускорения метода последовательных приближений.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть A — симметрический оператор в H. Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение x^* в H. Последовательности $\{x_n\}$, $\{\tilde{x}_n\}$, определенные равенствами* (2), (7); (2), (8) *сходятся по норме H к решению x^* с быстротой геометрической прогрессии $\{q^n\}$.*

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2 для методов (2), (7); (2), (8). В случаях 1), 5) надо только дополнить предположение: K — симметрический, и в случае 3): A — симметрический оператор.

Литература

[1] *J. Kolomý:* O konvergenci k užití iteračních metod. Čas. pěst. mat. 86 (1961), 148—177.

[2] *J. Kolomý:* K metodě podobné iterace. Čas. pěst. mat. 86 (1961), 308—313.

[3] *Л. В. Канторович:* Функциональный анализ и прикладная математика. Усп. мат. наук 6 (1948), 89—185.

[4] *М. А. Красносельский-С. Г. Крейн:* Итерационный процесс с минимальными невязками. Мат. сб. 31 (1952), 315—334.

[5] *В. М. Фридман:* О сходимости методов типа наискорейшего спуска. Усп. мат. наук 17 (1962), 201—204.

Josef Kolomý, Matematický ústav university Karlovy, Sokolovská 83, Praha 8, ČSSR.