Aleksander Andreevich Samarskij

О разноснтых схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 2, 146–164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102943

О РАЗНОСНТЫХ СХЕМАХ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. А. САМАРСКИЙ (A. A. SAMARSKIJ)

§ 1. ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

1. В настоящее время в связи с применением вычислительных машин возникла потребность в создании вычислительных алгоритмов универсального характера, пригодных для решения по одним и тем же программам широкого класса задач, определяемого, например, заданием типа дифференциального уравнения и функционального пространства для коэффициентов. Требование единообразия или однородности вычислительной процедуры (алгоритма) естественно приводит к понятию однородных разностных схем (термин разностная схема трактуется здесь как закон написания разностных уравнений, аппроксимирующих данное дифференциальное уравнение).

Для теории важно указать исходное семейство схем. Такой способ задания схем указан в [1]. Так, например, в случае линейных уравнений коэффициенты однородной разностной схемы выражаются через коэффициенты исходного уравнения при помощи некоторых (шаблонных) функционалов, произвол в выборе которых ограничен требованиями аппроксимации, разрешимости и др. Семейство однородных схем данного типа будет задано, если указано семейство шаблонных функционалов. Целью теории однородных разностных схем является отыскание схем, пригодных для решения возможно более широкого класса задач (например, для уравнений с разрывными коэффициентами, для краевых условий общего вида, для произвольных областей — в случае нескольких переменных и т.д.), а также выделение „наилучших" схем. При сравнении различных разностных схем учитываются такие их свойства как устойчивость, сходимость и точность, простота и экономичность. Большой практический и научный интерес представляет класс уравнений с разрывными коэффициентами. Здесь возникает проблема выделения семейства однородных разностных схем „сквозного счёта", которые позволяли бы решать задачи по одним и тем же формулам как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов, не прибегая к явному выделению точек или линий разрыва коэффициентов (выяснение положения линий разрыва коэффициентов особенно сложно, если эти коэффициенты получаются в результате приближенного решения других уравнений) и к изменению схемы в окрестности разрывов с использованием условий на разрывах.

2. В работах А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [1]–[8] изучались однородные разностные схемы для уравнений второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов с одной и несколькими пространственными переменными. Основное внимание уделялось вопросу о сходимости и точности в классе разрывных коэффициентов, на неравномерных сетках, для случая произвольных областей, квазилинейных параболических уравнений и др.

Первый цикл работ по теории однородных разностных схем проводился для простейшего класса дифференциальных уравнений

$$(1)\qquad L^{(k,g,f)}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - g(x)\,u + f(x) = 0\,, \quad 0 < x < 1\,,$$

где $k(x)$, $g(x)$, $f(x)$ – кусочно-непрерывные коэффициенты. Пусть $\omega_h = \{x_i = ih \in [0, 1],\ i = 0, 1, \ldots, N\}$ – сетка, $y = y_i = y(x_i)$ – сеточная функция, определенная на ω_h. Исходное семейство однородных трёхточечных схем берется в виде

$$(2)\qquad L_h^{(k,g,f)}y = (by_x - ay_{\bar{x}})/h - dy + \varphi = 0\,, \quad y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h\,,$$
$$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h\,,$$

где a, b, d, φ – выражаются через k, g, f при помощи шаблонных функционалов $A[\bar{k}(s)]$, $B[\bar{k}(s)]$, $F[\bar{f}(s)]$, так что $a(x) = A[k(x + sh)]$, $b(x) = B[k(x + sh)]$, $\varphi(x) = F[f(x + sh)]$. Рассматриваются случаи гладких и разрывных коэффициентов k, g, f. Чтобы схема в классе достаточно гладких коэффициентов имела n-й порядок точности ($n = 1, 2$), необходимо и достаточно, чтобы она имела тот же порядок аппроксимации. Это утверждение теряет силу в случае разрывных коэффициентов. Схема для уравнения $L^{(k)}u = 0$ ($g = f = 0$), у которой

$$a_i = a(x_i) = k_i - \tfrac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1})\,, \quad b_i = k_i + \tfrac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1})\,,$$

имеет в классе гладких коэффициентов второй порядок точности и расходится в классе разрывных коэффициентов (см. [1]).

При помощи усиленного требования сходимости – требования устойчивости схемы (2) относительно возмущения коэффициентов – выделено из (2) семейство схем, сходящихся в классе кусочно-непрерывных коэффициентов

$$(3)\qquad L_h^{(k,g,f)}y = (ay_{\bar{x}})_x - dy + \varphi = 0\,.$$

Это – консервативные или самосопряженные схемы. Для их получения можно пользоваться методом баланса или интегроинтерполяционным методом, формулированным в [1], а также вариационным методом.

Найдена схема, имеющая второй порядок точности в классе кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых коэффициентов

$$a_i = \left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\mathrm{d}x}{k(x)}\right]^{-1}, \quad d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$x_{i\pm 0,5} = x_i \pm 0{,}5h\,.$$

Схемы (3) естственно обобщаются на случай произвольных неравномерных сеток [2], [5]. Отметим два важных факта. Несмотря на понижение локального порядка аппроксимации, эти схемы 1) в классе гладких коэффициентов имеют на произвольных неравномерных сетках тот же порядок точности, что и на равномерных сетках, 2) в классе разрывных коэффициентов достигают того же порядка точности, что и для гладких коэффициентов, если выбрать специальную последовательность неравномерных сеток $\omega_h(k)$, помещая узлы сетки в точки разрыва $k(x)$, $g(x)$, $f(x)$.

Для уравнения (1) также построена точная схема и схемы, имеющие любой заданный порядок точности в классе кусочно-непрерывных коэффициентов. Эти схемы позволили построить для задачи Штурма-Лиувилля

$$L^{(k,g)}u + \lambda r u = (k(x)\,u')' - g(x)\,u + \lambda r u = 0\,, \quad u(0) = u(1) = 0$$

схемы 4-го и более высокого порядка точности в классе разрывных коэффициентов.

3. Однородные разностные схемы (2) для одномерного уравнения (1) были использованы для построения однородных разностных схем параболических и гиперболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L^{(k,g,f)}u\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L^{(k,g,f)}u$$

а также для многомерных уравнений всех трёх типов.

Остановимся лишь на однородных схемах для квазилинейного уравнения теплопроводности

$$(4) \qquad c(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\,,$$
$$k(x,t,u) \geqq m_1 > 0\,, \quad c(x,t,u) \geqq m_2 > 0\,, \quad m_\alpha = \mathrm{const}\,, \quad \alpha = 1, 2\,.$$

Пусть $\omega_\tau = \{t_j = j\tau \in [0, T]\}$ сетка на отрезке $0 \leqq t \leqq T$,

$$(5) \qquad y = y_1^{j+1} = y(x_i, t_{j+1})\,, \quad y^\vee = y^j\,, \quad y_{\bar t} = (y - y^\vee)/\tau\,, \quad t = t_{j+1}\,,$$
$$\Lambda y = (a(x,t,y^*)\,y_{\bar x})_x\,, \quad y^* = 0{,}5(y_{i-1} + y_i)\,, \quad a \geqq m_1 > 0\,,$$

Λ — схема, имеющая второй порядок аппроксимации.

Рассмотрим неявную разностную схему

$$\varrho(x, t, y^{\vee})\, y_{\bar{t}} = \Lambda y + \varphi\,, \tag{6}$$

где ϱ и φ аппроксимируют c и f с точностью до $O(h^2)$. Эта схема *абсолютно устойчива и сходится равномерно со скоростью* $O(h^2 + \tau)$.

До сих пор в литературе рассматривались лишь схемы для частного случая $c = c_1(x, t)\, c_2(u)$, $k = k_1(x, t)\, k_2(u)$.

Особый интерес представляет случай $k(x, t, 0) = 0$, например, $k = u^\sigma$, $\sigma > 0$. Схема „сквозного счёта" пригодна и в этом случае [16].

§ 2. ЭКОНОМИЧНЫЕ СХЕМЫ

1. При решении методом сеток многомерных задач математической физики на первый план выступает требование экономичности сеточного метода, то-есть минимума арифметических действий, необходимых для решения задачи с заданной точностью. Критерий экономичности алгоритма позволяет, в частности, по-иному взглянуть на ряд известных вычислительных методов линейной алгебры и провести их дифференциацию в тех случаях, когда другие их показатели совпадают.

Рассмотрим, например, два варианта итерационного метода Некрасова-Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений

$Ax = f$, $A = (a_{ik})$ — матрица $n \times n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор:

$$\text{I.}\quad Dy^{s+1} + A^- y^{s+1} = Dy^s - A^+ y^s + f, \ (\text{„вниз"}), \tag{7}$$

$$\text{II.}\quad Dy^{s+1} + A^+ y^{s+1} = Dy^s - A^- y^s + f, \ (\text{„вверх"}), \tag{8}$$

где s — номер итерации, $D = (0{,}5a_{ik}\delta_{ik})$ — диагональная матрица, $A^- = (a_{ik}^-)$ и $A^+ = (a_{ik}^+)$ — левая и правая треугольные матрицы, $a_{ik}^- = a_{ik}$, $a_{ik}^+ = 0$ при $k < i$, $a_{ik}^- = 0$, $a_{ik}^+ = a_{ik}$ при $k > i$, $a_{ii}^- = a_{ii}^+ = 0{,}5a_{ii}$. Скорость сходимости (число итераций) для методов I, II и их комбинации одинаково. Однако, если при попеременном применении алгоритмов I (при нечётных s) и II (при чётных s) запоминать дополнительно известные векторы $A^+ y^{2s}$ и $A^- y^{2s-1}$ предыдущей итерации, то для определения вектора y^{s+1} вместо $Q = 2n^2 + 5n$ мы будем затрачивать лишь $Q = n^2 + 7n$ действий.

Таким образом алгоритм „вверх" — „вниз" с дополнительным запоминанием одного из известных векторов $A^- y$ или $A^+ y$ экономичнее любого из методов „вверх" или „вниз". Экономия в числе действий при вычислении одной итерации фактически эквивалентна почти двукратному уменьшению числа итераций.

Аналогично может быть получена экономичная схема для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [8]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + A(t)\,x = f(t)\,, \quad x(0) = x_0\,,$$

имеющая второй порядок точности и требующая меньшего числа действий на каждом слое по t по сравнению с обычной явной схемой первого порядка точности (для нее $Q = 2n^2 + 2n$).

2. С еще более интересными фактами мы встречаемся при сравнениии схем для многомерного уравнения теплопроводности. Для простоты рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами в цилиндре $\overline{Q}_T = (G_0 + \Gamma_0) \times \times [0 \leqq t \leqq T]$, где $G_0 = \{0 \leqq x_\alpha \leqq 1, \alpha = 1, \ldots, p\}$-куб, Γ_0 – его граница,

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\,, \quad (x, t) \in Q_T = G_0 \times [0 < t \leqq T]\,,$$

$$(10) \qquad u|_{\Gamma_0} = \mu(x, t)\,, \quad u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x = (x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p)\,.$$

Пусть $\overline{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$, $\omega_h = \{x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p) \in G_0\,,\ i_\alpha = 1, \ldots, N\}$ – равномерная сетка в G_0, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau\}$ сетка на отрезке $0 \leqq t \leqq T$. Введем обозначения $y = y(x_i, t_{j+1}) = y^{j+1}$, $y^\vee = y^j$, $y_{\bar{t}} = (y - y^\vee)/\tau$. Пусть Λ_α – обычный трехточечный оператор, аппроксимирующий $L_\alpha u = \partial^2 u/\partial x_\alpha^2$. Рассмотрим многомерные схемы

$$(11) \qquad y = y^\vee + \tau \Lambda y^\vee, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \quad \text{(явная схема)},$$

$$(12) \qquad y - \tau \Lambda y = y^\vee, \qquad \text{(неявная схема)}.$$

Обе схемы имеют один и тот же порядок точности $O(\tau + h^2)$. Пусть Q_p – число арифметических действий для определения y на слое, то-есть во всех узлах ω_h, q_p – число действий на один узел, $q_p = Q_p/N_p$, где $N_p = 1/h^p$ – число узлов сетки ω_h. Для явной схемы $Q_p = O(N_p)$, $q_p = O(1)$, то-есть число действий на узел не зависит от сетки. Для неявной схемы $y = (E - \tau\Lambda)^{-1}\, y^\vee$ и отыскание y сводится к обращению многомерного оператора $E - \tau\Lambda$, что требует не менее чем $Q_p = O(1/h^{3p-2})$ действий и $q_p = O(1/h^{2(p-1)}) = O(N_p^{2-2/p})$ зависит от сетки очень сильно. С другой стороны, неявная схема устойчива при любых τ и h, а явная устойчива лишь при условии

$$(13) \qquad \frac{\tau}{h^2} \leqq \frac{1}{2p}\,.$$

Возникает естественное стремление найти разностные схемы, сочетающие в себе лучшие свойства явной (экономичность, $q_p = O(1)$) и неявной (безусловная устойчивость) схем. Такие схемы мы будем называть экономичными.

Для некоторых уравнений математической физики предложен ряд экономичных схем переменных направлений или схем расщепления (Писмен и Рекфорд [9], Рекфорд и Дуглас [10], Яненко [11]–[13], Дьяконов [14], [15] и др.). Однако эти схемы применялись лишь для пространственных областей простейшего типа и довольно узкого класса уравнений.

Большой практический и теоретический интерес представляют экономичные разностные схемы, достаточно простые и возможно более универсальные, то-есть пригодные для широкого класса уравнений. Так, например, в случае параболических уравнений мы требуем, чтобы экономичные схемы были пригодны для произвольной пространственной области, для уравнений с разрывными коэффициентами, для квазилинейных уравнений, для систем уравнений, на произвольных последовательностях неравномерных сеток и не менялись при переходе от p к $p-1$ и от p к $p+1$, p — число измерений.

3. Оказывается, что универсальные экономичные схемы можно построить, используя лишь самое общее свойство дифференциального уравнения $\partial u/\partial t + Au = f$ — возможность представления оператора A в виде суммы операторов A_α более простой структуры (свойство аддитивности). Пусть, например, дано уравнение

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{m} L_\alpha u - f = 0\,, \quad 0 < t \leqq T\,. \tag{14}$$

Представим в виде суммы $f = \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha$ и положим $Pu = \sum_{\alpha=1}^{m} P_\alpha u$, где

$$P_\alpha u = \frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha\,.$$

На сетке ω_τ будем последовательно решать m уравнений

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha\,, \quad t \in (t^j_{\alpha-1}, t^j_\alpha)\,, \quad t^j_\alpha = t^j_{\alpha-1} + \frac{1}{m}\tau\,, \quad t^j_0 = t_j\,, \quad \alpha = 1, \ldots, m\,. \tag{15}$$

Если $L = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha$ — эллиптический оператор, не содержащий смешанной производной, а

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

то (15) есть одномерное параболическое уравнение. Для него нами ранее была развита теория однородных разностных схем [5]–[8]. Разностная схема для многомерного уравнения (14) представляет собой совокупность неявных однородных разностных схем для одномерных уравнений теплопроводности номеров $\alpha = 1, 2, \ldots, m$. Эту схему в [16] мы назвали локально-одномерной схемой. Она однородна по пространству и циклически однородна по времени с периодом p. Одномерные схемы являются простейшим конструктивным элементом, ,,блоком" многомерной схемы.

Одномерные схемы, как способ аппроксимации (расщепления [11] или приближенной факторизации [12]) многомерной двухслойной схемы для задачи (9)–(10) ($f = 0$, $k_\alpha = 1$, G – параллелепипед), были впервые использованы Яненко [11]. Общий принцип моделирования многомерных задач при помощи одномерных задач был предложен в [16]; он позволил построить локально-одномерные схемы для параболических и гиперболических уравнений и систем ([16] – [20]), удовлетворяющих поставленным в конце п. 2 требованиям.

4. Пусть G – область изменения $x = (x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_p)$, Γ – её граница, ω_h – разностная сетка на области G, $\gamma_h \subset \Gamma$ – граница ω_h. Рассмотрим параболическое уравнение в $Q_T = (G + \Gamma) \times [0 \leqq t \leqq T]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + f(x, t), \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad k_\alpha \geqq c_1 > 0, \tag{16}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Обозначим Λ_α – однородную трехточечную разностную схему для L_α, φ_α – аппроксимацию для f_α и введем промежуточные значения $y_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \ldots, p - 1$, полагая $y_{(0)} = y^\nu = y^j = y(x, t_j)$, $y_{(m)} = y = y^{j+1}$, $x \in \omega_h$. Значение $y_{(\alpha)}$ определяется из неявного разностного уравнения

$$y_{\bar{t}_\alpha} = \frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha y_{(\alpha)} + \varphi_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{17}$$

которое пишется во всех узлах $x \in \omega_h$ и аппроксимирует уравнение (15). Из (17) находим

$$y_{(\alpha)} = (E - \tau\Lambda_\alpha)^{-1}(y_{(\alpha-1)} + \tau\varphi_\alpha). \tag{18}$$

Граничные условия для $y_{(\alpha)}$ задаются на части γ_h^α границы γ_h; здесь γ_h^α множество всех точек $x \in \gamma_h$ пересечения с Γ всех прямых $\mathscr{L}_\alpha$, проходящих через узлы $x \in \omega_h$ параллельно оси координат ox_α. Так, например, если G параллелепипед $G_0 = \{0 \leqq x_\alpha \leqq l_\alpha\}$, то γ_h^α есть множество узлов сетки $\omega_h + \gamma_h$, для которых $x_\alpha = 0$ или $x_\alpha = l_\alpha$. При таком построении сетки $\omega_h = \omega_h^{(2)}$ [17] граничные условия на Γ удовлетворяются точно, однако, в силу произвольности области G сетка ω_h вблизи границы всегда неравномерна. Можно получить равномерную сетку $\omega_h = \omega_h^{(1)}$ [16], если граничные значения для $y_{(\alpha)}$ на сетке задавать при помощи линейной интерполяции по направлению ox_α. В обоих случаях для $y_{(\alpha)}$ мы получаем одномерные трехточечные задачи, решаемые по известным формулам прогонки (формулам обращения трехдиагональной матрицы). Это требует $q_p = O(1)$ операций на один узел сетки ω_h. Перебирая все $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, то-есть меняя направления, определим значение $y = y_{(m)}$ на новом временном слое $t = t_{j+1}$, затратив $Q_p = N_p q_p = O(N_p)$ действий. Предложенный алгоритм является экономичным. Так как мы используем в качестве „блоков" одномерные неявные схемы, то локально-одномерная схема абсолютно устойчива и для нее справедлив принцип максимума. Несмотря на то, что каждое отдельное уравнение (17) не аппроксимирует исходного уравнения (16) (погрешность аппроксимации $\psi_\alpha = \Lambda_\alpha u + \varphi_\alpha - \delta_{\alpha,1} u_{\bar{t}} = O(1)$), совокупность всех схем (17) аппроксимирует уравнение (16). Под погрешностью аппроксимации локально-одномерной схемы понимаем сумму

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{m} \psi_\alpha . \tag{19}$$

Локально-одномерная схема в случае равномерной сетки $\omega_h^{(1)}$ и граничных условий со сносом равномерно сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0 = \max_{\omega_h} |y^{j+1} - u^{j+1}| = O(|h|^2 + \tau)\,, \quad |h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2\,, \tag{20}$$

если выполнены условия, при которых $\Psi = O(|h|^2 + \tau)$ (h_α – шаг по направлению x_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, u – решение задачи (16) и y – решение задачи (18)).

В случае произвольных неравномерных сеток эта оценка справедлива в норме $L^2(\omega_h)$, а равномерная оценка несколько ухудшается появлением в правой части (20) множителя вида $\ln 1/H_*$, где H_* – наименьший объем ячейки сетки.

В отношении области G конструктивно используется лишь одно предположение: пересечение прямой, параллельной оси ox_α ($\alpha = 1, \ldots, p$), проходящей через любую точку $x \in G$, состоит из конечного числа интервалов.

Рассмотрим еще один пример экономичной схемы.

5. Рассмотрим пример построения экономичной схемы для параболической системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f\,, \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x, t)\, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < t \leqq T \tag{21}$$

с граничными условиями первого рода при $x = 0$, $x = 1$ и начальным условием при $t = 0$. Здесь $u = u(x, t) = (u^1, \ldots, u^n)$, $f = f(x, t) = (f^1, \ldots, f^n)$ – векторы, $K = (k_{is})$ – матрица $n \times n$,

$$\sum_{i,s=1}^{n} k_{is}(x, t)\, \xi_i \xi_s \geqq c_1 \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2\,, \quad c_1 = \text{const} > 0\,. \tag{22}$$

Матрицу (k_{is}) представим в виде суммы двух треугольных матриц $K = K^- + K^+$, $K^- = (k_{is}^-)$, $K^+ = (k_{is}^+)$, $k_{is}^- = k_{is}$, $k_{is}^+ = 0$ при $s < i$, $k_{is}^- = 0$, $k_{is}^+ = k_{is}$ при $s > i$, $k_{ii}^- + k_{ii}^+ = k_{ii}$, а L соответственно в виде суммы двух

„треугольных“ операторов $L = L^- + L^+$. Если $K = (k_{is})$ симметрична, то естественно предположить, что $k_{ii}^- = k_{ii}^+ = \frac{1}{2}k_{ii}$.

Уравнение (21) перепишем в виде

$$(23) \qquad Pu = \sum_{\alpha=1}^{2} P_\alpha u = 0\,, \quad P_\alpha u = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha\,,$$

где $L_1 = L^-$, $L_2 = L^+$. Пусть Λ_α трехточечная однородная схема для L_α. По аналогии с предыдущим пунктом для решения уравнений $P_\alpha u = 0$ используем неявные схемы

$$(24) \qquad y_{\bar{t}_\alpha} = \Lambda_\alpha y_{(\alpha)} + \varphi_\alpha\,, \quad \alpha = 1, 2\,.$$

Если K^- и K^+ положительно-определенные матрицы, то схема (24) сходится и абсолютно устойчива. Эта схема экономична, так как $q_p = O(n^2)$ на узел, то-есть для определения y затрачивается того же пордяка число действий, что и для явной схемы. В самом деле, чтобы найти вектор $y = y_{(2)}$ по известному вектору $y^\vee$ надо обратить последовательно треугольно-трехточечные операторы $E - \tau\Lambda_1$ и $E + \tau\Lambda_2$. Это сводится к $2n$ – кратному применению формул одномерной прогонки, а для вычисления при этом правых частей требуется $O(n^2/h)$ операций, что и дает оценку $q_p = O(n^2)$.

Заметим, что в случае $m = 2$ для уравнений (21) можно предложить ряд других схем, являющихся обобщением схем [9] и [11], например

$$(25) \qquad \begin{aligned} y_{\bar{t}_1} &= \tfrac{1}{2}(\Lambda_1 y_{(1)} + \Lambda_2 y^\vee) + \tfrac{1}{2}\varphi\,, \quad (\varphi_\alpha = \tfrac{1}{2}\varphi,\ \alpha = 1, 2)\,, \\ y_{\bar{t}_2} &= \tfrac{1}{2}(\Lambda_1 y_{(1)} + \Lambda_2 y) + \tfrac{1}{2}\varphi\,, \end{aligned}$$

$$(26) \qquad y_{\bar{t}_\alpha} = 0{,}5\,\Lambda_\alpha(y_{(\alpha)} + y_{(\alpha-1)})\,, \quad \alpha = 1, 2\,, \quad y_{(0)} = y^\vee\,.$$

Для схемы (25) в случае системы (21) нами получены оценки для скорости сходимости $O(\tau + h^2)$ и $O([\tau^2/\sqrt{h}] + h^2)$, а для схемы (26) – $O(\tau + h^2)$.

При построении экономичных схем (17) и (24) мы пользовались одним и тем же принципом аддитивности, выбирая операторы L_α так, чтобы получающиеся простые задачи были экономичными.

В § 3 мы рассмотрим такие аддитивные схемы для абстрактного параболического уравнения.

§ 3. АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ

1. Пусть H – линейное пространство со скалярным произведением $(u, v)_*$ и нормой $\|u\|_* = \sqrt{(u, u)_*}$, где $u, v \in H$, $A(t)$ – оператор, зависящий от параметра $t \in [0, T]$ и имеющий область определения в H и область значений в H.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + A(t)\,u = f(t)\,, \quad 0 < t \leqq T\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{27}$$

где неизвестная функция $u(t)$ и заданная функция $f(t)$ определены на отрезке $0 \leqq t \leqq T$ и принимают значения из пространства H, а $u_0 \in H$. В случае смешанной задачи для параболического уравнения граничное условие включается в требование принадлежности $u = u(t)$ к области определения оператора $A(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что задача (27) имеет единственное решение $u = u(t) \in H$, $0 \leqq t \leqq T$.

Предположим, что $A(t)$ имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(t) = A(t)\,, \tag{27'}$$

где $A_\alpha(t)$ операторы, имеющие одинаковые с $A(t)$ область определения и область значений.

2. Рассмотрим линейное конечномерное пространство $\tilde{H}_N$ со скалярным произведением $(y, v)_N$ и нормой $\|y\|_N = \sqrt{(y, y)_N}$. Примером $\tilde{H}_N$ является пространство $\tilde{H}^*$ сеточных функций, определённых на сетке ω_h в области G p-мерного пространства $x = (x_1, \ldots, x_p)$.

Предположим, что существует линейный оператор, проектирующий H на $\tilde{H}_N : P_N u = u_N \in \tilde{H}_N$, если $u \in H$. Последовательность пространств $\{\tilde{H}_N\}$ замкнем по норме, полагая

$$\lim_{N \to \infty} \|P_N u\|_N = \|u\|_* \quad \text{где} \quad u \in H\,.$$

Рассмотрим операторы $B_\alpha = B_\alpha^N(t)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, зависящие от параметра $t \in [0, T]$ с областью определения $\tilde{H}_N$ и множеством значений $\tilde{H}_N$ для каждого t. Будем предполагать, что

1) $B_\alpha^N(t)$ дистрибутивный оператор,

2) $B_\alpha^N(t)$ неотрицателен для всех $t \in [0, T]$:

$$(B_\alpha^N(t)\, v, v) \geqq 0 \text{ для любого элемента } v \in \tilde{H}_N\,. \tag{28}$$

Введем на отрезке $0 \leqq t \leqq T$ сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ i = 0, 1, \ldots\}$.

Рассмотрим задачу

$$y_{\bar{t}_\alpha} + B_\alpha(t^*)\, y_{(\alpha)} = \varphi_\alpha(t^*)\,, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m\,, \quad t \in \omega_\tau\,, \quad y(0) = P_N u_0\,, \tag{29}$$

где $\varphi_\alpha(t) \in \tilde{H}_N$, $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$, например, $t^* = t_{j+1}$, $y_{(0)} = y^\vee = y^j$, $y_m = y = y^{j+1}$, $y_{\bar{t}_\alpha} = (y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)})/\tau$.

Оператор $E + \tau B_\alpha$, очевидно, имеет обратный оператор $(E + \tau B_\alpha)^{-1}$ с областью определения $\tilde{H}_N$, причем $\|(E + \tau B_\alpha)^{-1}\| \leqq 1$ при любом $\tau > 0$ и $t \in [0, T]$. Поэтому задача (29) разрешима

$$(29') \qquad y_{(\alpha)} = (E + \tau B_\alpha)^{-1} (y_{(\alpha-1)} + \tau \varphi_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Значение $y^\vee = y_{(0)}$ известно. По формуле (29′) последовательно определим $y_{(1)}, \dots, y_{(m)} = y$.

3. Теорема 1. *Задача* (29) *поставлена корректно и для её решения справедлива оценка*

$$(30) \qquad \|y(t)\| \leqq \|y(0)\| + T \max_{\omega_\tau} \|\varphi\|, \quad t \in \omega_\tau,$$

где

$$\|y\| = \|y\|_N, \quad t = t_{j+1}, \quad \|\varphi\| = \sum_{\alpha=1}^{m} \|\varphi_\alpha\|_N.$$

Доказательство проводится методом энергетических неравенств.

Чтобы выяснить условия, при которых задача (29) аппроксимирует задачу (27), оценим разность

$$z_{(\alpha)} = y_{(\alpha)} - P_N u, \quad z_{(\alpha)} \in \tilde{H}_N,$$

которая является решением задачи

$$(31) \qquad z_{\bar{t}_\alpha} + B_\alpha z_{(\alpha)} = -\psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad t \in \omega_\tau, \quad z(0) = 0,$$

где $\psi_\alpha = B_\alpha P_N u - \varphi_\alpha + \delta_{\alpha,1} P_N u_{\bar{t}}$ — погрешность аппроксимации. Прибавляя и вычитая выражение

$$(32) \qquad \psi_\alpha^\circ = P_N(A_\alpha u - f_\alpha) - \delta_{\alpha,1} P_N \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \quad \delta_{\alpha,1} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 1, \\ 1, & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $f_\alpha \in H$, $\sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha = f$, будем иметь $\psi_\alpha = \psi_\alpha^\circ + \psi_\alpha^*$ (ср. [16]). Из (32) и (27) видно, что

$$(33) \qquad \sum_{\alpha=1}^{m} \psi_\alpha^\circ = 0,$$

$$(34) \qquad \psi_\alpha^* = \{(B_\alpha P_N u - \varphi_\alpha) - P_N(A_\alpha u - f_\alpha)\} + \delta_{\alpha,1} P_N \left(u_{\bar{t}} - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right).$$

Вопрос о связи задач (27) и (29) решается путем изучения задачи (31).

Лемма 1. *Для решения задачи* (31) *с правыми частями* $\psi_\alpha = \psi_\alpha^\circ$, *удовлетворяющими условию* (33), *справедлива оценка*

$$(35) \qquad \|z(t)\| \leqq \sqrt{(mT)} \sqrt{\tau} \max_{\omega_\tau} \|\psi^\circ\|, \quad t \in \omega_\tau, \quad \|\psi^\circ\| = \sum_{\alpha=1}^{m} \|\psi_\alpha^\circ\|.$$

Теорема 2. *Для решения задачи* (27) *справедлива оценка*

$$\|z(t)\| \leqq \max_{\omega_\tau}\left(\sqrt{(mT)}\sqrt{\tau}\,\|\psi^\circ\| + T\|\psi^*\|\right). \tag{36}$$

Теорема 3. *Пусть для всех* $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ *выполнены условия аппроксимации*

$$\left\|P_N\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t+\Theta) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right)\right\| = \varrho_1(|\Theta|), \quad \|\psi_\alpha^\circ\| \leqq C_0, \tag{37}$$

$$\|(B_\alpha P_N u - \varphi_\alpha) - P_N(A_\alpha u - f_\alpha)\| = \varrho_2(h_N), \tag{38}$$

где $\varrho_k(\xi) \to 0$ $(k = 1, 2)$ *при* $\xi \to 0$, h_N *и* c_0 *положительные числа,* $h_N \to 0$ *при* $N \to \infty$, c_0 *не зависит от* τ *и* N. *Тогда решение задачи* (29) *сходится к решению задачи* (27)

$$\|y - P_N u\| = \varrho_1(\tau) + \varrho_2(h_N) + O(\sqrt{\tau}), \quad t \in \omega_\tau. \tag{39}$$

Теоремы 2 и 3 следуют из теоремы 1 и леммы 1.

Следствие. *Если* $\varrho_1(\tau) = O(\tau^\gamma)$, $\varrho_2(h_N) = O(h_N^k)$, *то*

$$\|y - P_N u\| = O(\tau^{\gamma'} + h_N^k), \quad \gamma' = \min(\gamma, \tfrac{1}{2}). \tag{40}$$

4. Приведём примеры применения этой общей теории.

Рассмотрим задачу (9)–(10) для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами из § 2 для области $G = G_0 = (0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p)$. В этом случае $\tilde{H}_N$ есть пространство сеточных функций, заданных на сетке

$$\omega_h = \{x_i = (i_1 h_1, \ldots, i_p h_p) \in G_0,\ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1,\ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, p\},$$

$$N = \prod_{\alpha=1}^{p} (N_\alpha - 1)$$

— число узлов, скалярное произведение $(y, v) = \sum_{\omega_h} y_i v_i h_1 \ldots h_p$. Пусть $\tilde{\omega}_h$ — множество узлов, отстоящих от границ $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ на расстоянии, большем h_α, а ω_h^* — множество всех остальных (пограничных) узлов сетки. Оператор B_α^N определен так: $B_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = -\Lambda_\alpha y$ при $x \in \tilde{\omega}_h$,

$$B_\alpha y = -\frac{1}{h_\alpha}\left(y_{x_\alpha} - \frac{1}{h_\alpha} y\right) \quad \text{при} \quad x_\alpha = h_\alpha, \tag{41}$$

$$B_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha}\left(y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{1}{h_\alpha} y\right) \quad \text{при} \quad x_\alpha = l_\alpha - h_\alpha.$$

Функция φ_α в соответствии с этим равна $\varphi_\alpha = f_\alpha$ при $x \in \tilde{\omega}_h$, $\varphi_\alpha = f_\alpha + (\mu_\alpha^- / h_\alpha^2)$ при $x_\alpha = h_\alpha$, $\varphi_\alpha = f_\alpha + (\mu_\alpha^+ / h_\alpha^2)$ при $x_\alpha = l_\alpha - h_\alpha$, где $\mu_\alpha^- = \mu|_{x_\alpha = 0}$, $\mu_\alpha^+ = \mu|_{x_\alpha = l_\alpha}$. Такое определение B_α предполагает, что y определена во внутренних узлах ω_h

и эквивалентно определению B_α для y, заданной во всех узлах $\omega_h + \gamma_h$ при условии, что $y = 0$ на границе γ_h (при $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, p$).

Разностная формула Грина [5] даёт $(B_\alpha y, y) = \|y_{\bar{x}_\alpha}\|^2 > 0$, то-есть условие (28) всегда выполнено.

В силу теоремы 3 полученная аддитивная схема сходится со скоростью $O(|h|^2 + \sqrt{\tau})$.

5. Параболическая система многомерных уравнений

$$(42)\qquad Au = -\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad \alpha = 1, \dots, p\,.$$

Вводя треугольные матрицы K_α^- и K_α^+, $K_\alpha = K_\alpha^- + K_\alpha^+$, получим $A = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha$, $m = 2p$, $A_\alpha = A_\alpha^-$ при $\alpha \leqq p$, $A_\alpha = A_{2p+1-\alpha}^+$ при $\alpha > p$. A_α^- и A_α^+ аппроксимируются трёхточечно-треугольными разностными операторами B_α^- и B_α^+ по аналогии с предыдущим пунктом. Так как для обращения $(E + \tau B_\alpha^{\mp})$ требуется n прогонок для каждой из одномерных задач, то $q_p = O(n^2)$ и аддитивная схема в этом случае экономична (см. [20]).

6. Чтобы получить алгоритмы для решения многомерных уравнений и систем со смешанными производными, рассмотрим случай, когда

$$(43)\qquad A(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(t)\,, \quad B(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} B_{\alpha\beta}(t)\,,$$

где $A_{\alpha\beta}(t)$ — операторы в H, а $B_{\alpha\beta}(t)$ — в $\tilde{H}_N$.

Предполагается, что 1) $B_{\alpha\beta}(t)$ дистрибутивные операторы, 2) $\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} (B_{\alpha\beta}(t)\,v, v) \geqq 0$ для любого $v \in \tilde{H}_N$.

Представим B в виде суммы двух треугольных операторов

$$(44)\qquad B = B^- + B^+\,, \quad B^- = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{\alpha} B_{\alpha\beta}^-\,, \quad B^+ = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=\alpha}^{m} B_{\alpha\beta}^+\,,$$

где $B_{\alpha\beta}^- = B_{\alpha\beta}$ при $\beta < \alpha$, $B_{\alpha\beta}^+ = B_{\alpha\beta}$ при $\beta > \alpha$, $B_{\alpha\alpha}^- + B_{\alpha\alpha}^+ = B_{\alpha\alpha}$.

Аддитивная схема для задачи (27) имеет вид

$$(45)\qquad y_{\bar{t}_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} B_{\alpha\beta}^-(t)\; y_{(\beta)} = \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha\,, \quad \alpha = 1, \dots, m,\; t \in \omega_\tau\,,$$

$$y_{\bar{t}_{\alpha'}} + \sum_{\beta=\alpha}^{m} B_{\alpha\beta'}(t)\, y_{(\beta')} = \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha\,, \quad \alpha' = 2m + 1 - \alpha\,, \quad \beta' = 2m + 1 - \beta\,,$$

$$y_{(2m)} = y = y^{j+1}\,, \quad \alpha = 1, \dots, m\,.$$

Задача разрешима, так как $(E + \tau B_\alpha^{\mp})$ существуют, если условие 2) выполнено для $B^{\mp}$. При $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$ имеем $B_{\alpha\alpha}^- = B_{\alpha\alpha}^+ = \frac{1}{2}B_{\alpha\alpha}$.

Для схемы (45) справедливы аналоги теорем 1—3.

Применение этой схемы для параболического уравнения со смешанными производными дано в [20].

7. По аналогии с (27) рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A(t)\,u = f(t)\,, \quad 0 < t \leqq T, \quad u(0) = u_0\,, \quad \frac{du_0}{dt}(0) = \bar{u}_0\,, \tag{46}$$

где $A(t) = \sum\limits_{\alpha=1}^{m}\left(A_\alpha(t) + A_\alpha^*(t)\right)$, A_α и A_α^* — сопряженные в смысле скалярного произведения $(u, v)_*$ операторы.

В $\tilde{H}_N$ рассматриваются дистрибутивные операторы B_α^N и B_α^{*N}:

$$\begin{aligned} &1)\ (B_\alpha^* y, v) = (B_\alpha v, y), \\ &2)\ (B_\alpha^* y, y) = (B_\alpha y, y) \geqq c_1\|y\|^2 \text{ для любых } y, v \in \tilde{H}_N, \\ &3)\ \left|\left((B_\alpha(t))_{\bar{t}}\, y, y\right)\right| \leqq c_2(\check{B}_\alpha y, y),\ c_1, c_2 = \text{const} > 0,\ \check{B}_\alpha = B_\alpha(t_j). \end{aligned} \tag{47}$$

Аддитивная схема имеет вид

$$\sigma_m y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} + B_\alpha(t)\, y_{(\alpha)} + B_\alpha^*(t)\, \check{y}_{(\alpha)} = \varphi_\alpha\,, \quad y(0) = P_N u_0\,, \tag{48}$$

где $y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/m}$, $\check{y}_{(\alpha)} = y^{j-1+\alpha/m}$, $\sigma_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 2, \\ 1{,}5 & \text{при } m = 3, \end{cases}$

$$y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \begin{cases} \left(y_{(\alpha)} - 2y_{(\alpha-1)} + \check{y}_{(\alpha)}\right)/\tau^2, \ \alpha = 1, 2, \ y_{(0)} = \check{y}, \ y_{(2)} = y, \ m = 2, \\ \left(y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)} y_{(\alpha-2)} + \check{y}_{(\alpha)}\right)/\tau^2, \ \alpha = 1, 2, 3, \ y_{(0)} = \check{y}_{(3)}, \ y_{(-1)} = \check{y}_{(2)}, \\ \qquad\qquad y_{(3)} = y, \ m = 3\,. \end{cases}$$

Методом энергетических неравенств доказывается, что эта схема устойчива и имеет по τ, по крайней мере первый порядок точности.

Аддитивная схема (48) использовалась для многомерных уравнений гиперболического типа второго порядка в [19] и для систем в [20].

§ 4. СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

1. Для областей специального типа (для параллелепипедов) и некоторого класса уравнений предложен ряд экономичных схем или схем переменных направлений (Писмен-Рекфорд [9], Рекфорд-Дуглас [10], Яненко ([11]–[13], Дьяконов [14], [15] и др.). Несмотря на различие в терминологии в вычислительных алгоритмах все эти схемы могут быть получены одним и тем же способом — методом расщепления.

Покажем это сначала на примере уравнения теплопроводности (9) с постоянными коэффициентами. В качестве исходной схемы возьмем многомерную схему с весами

$$y_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma y + (1 - \sigma)\, \check{y}) + \varphi\,, \quad y(0) = u_0(x)\,, \tag{49}$$

где $y_{\bar{t}} = (y - y^{\vee})/\tau$, $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha$, $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$. При $\sigma \neq 0$ эта схема не является экономичной. Перепишем её в виде

$$\left(E - \sigma\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha\right) y_{\bar{t}} = \Lambda y^{\vee} + \varphi\,.$$

Заменим стоящий слева оператор произведением одномерных операторов $\prod_{\alpha=1}^{p} (E - \sigma\tau\Lambda_\alpha)$ и рассмотрим схему

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (E - \sigma\tau\Lambda_\alpha)\, y_{\bar{t}} = \Lambda y^{\vee} + \tilde{\varphi}\,, \tag{50}$$

где $\tilde{\varphi}$ выбирается так, чтобы погрешности аппроксимации схем (49) и (50) во всех узлах любой сетки ω_h отличались на величину $O(\tau^2)$. Полученную схему (50) будем называть производящей схемой. Определение y из (50) сводится к последовательному обращению одномерных трёхточечных операторов $E - \sigma\tau\Lambda_\alpha$. Это можно сделать по-разному.

Рассмотрим для случая $p = 2$, $f = 0$ алгоритмы [9]–[15]:

1. Метод Писмена-Рекфорда [9], $p = 2$, $\sigma = 0{,}5$:

$$(E - 0{,}5\tau\Lambda_1)\, y_{(1)} = (E + 0{,}5\tau\Lambda_2)\, y^{\vee}\,, \tag{51}$$
$$(E - 0{,}5\tau\Lambda_2)\, y = (E + 0{,}5\tau\Lambda_1)\, y_{(1)}\,.$$

2. Метод Рекфорда-Дугласа [10], $p = 2$, $\sigma = 0{,}5$:

$$(E - 0{,}5\tau\Lambda_1)\, y_{(1)} = (E + 0{,}5\tau\Lambda_1 + \tau\Lambda_2)\, y^{\vee} + \tau\varphi\,, \tag{52}$$
$$(E - 0{,}5\tau\Lambda_2)\, y = y_{(1)} - 0{,}5\tau\Lambda_2 y^{\vee}\,.$$

3. Метод Яненко [11], $p = 2$, $\sigma = 0{,}5$:

$$(E - 0{,}5\tau\Lambda_1)\, y_{(1)} = (E + 0{,}5\tau\Lambda_1)\, y^{\vee}\,, \quad (E - 0{,}5\tau\Lambda_2)\, y = (E + 0{,}5\tau\Lambda_2)\, y_{(1)}. \tag{53}$$

4. Метод Дьяконова [14], $p = 2$, $\sigma = 0{,}5$:

$$(E - 0{,}5\tau\Lambda_1)\, y_{(1)} = (E + 0{,}5\tau\Lambda + \tfrac{1}{4}\tau\Lambda_1\Lambda_2)\, y^{\vee}\,, \quad (E - 0{,}5\tau\Lambda_2)\, y = y_{(1)}\,. \tag{54}$$

5. Метод [18], $p = 2$, $\sigma = 0{,}5$:

$$(E - 0{,}5\tau\Lambda_1)\, w_{(1)} = \Lambda y^{\vee}\,, \quad (E - 0{,}5\tau\Lambda_\alpha)\, w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}\,, \quad \alpha > 1\,, \tag{55}$$
$$y = y^{\vee} + \tau w_{(p)}\,.$$

Заметим, что из (55) следует алгоритм (52). В самом деле, заменяя $w_{(\alpha)} = (y_{(\alpha)} - y^{\vee})/\tau$, после очевидных преобразований, получим (52) при $p = 2$.

Если исключить из (51)–(55) промежуточное значение $y_{(1)}$, то все алгоритмы приводят к одной и той же производящей схеме (50). Таким образом, во всех работах фактически рассматривается одна и та же производящая схема, а различие между ними лишь в вычислительных алгоритмах, то-есть, в способах решения получающихся алгебраических уравнений.

При этом, как замечено в [14], надо особое внимание обращать на граничные условия для промежуточных значений $y_{(1)}$. В [14] $y_{(1)}$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ определяются по формуле

$$y_{(1)} = A_2 \mu^{j+1}, \ y = \mu^{j+1} \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \ x_2 = l_2, \ A_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha .$$

В [18] $w_{(1)} = A_2 \mu_{\bar{t}}$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$, $w_{(2)} = \mu_{\bar{t}}$ при $x_2 = 0$, $x_2 = l_2$. Если на Γ_0 заданы стационанрные значения, не зависящие от t, то $\mu_{\bar{t}} = 0$ и все $w_{(\alpha)} = 0$ при $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$. Алгоритм (51) эквивалентен производящей схеме, если положить $y_{(1)} = 0{,}5(y + y^\vee) - \frac{1}{4}\tau^2 \Lambda_2 y_{\bar{t}}$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ и $y = \mu^{j+1}$, $y^\vee = \mu^j$ при $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Для алгоритма (52) надо положить $y_{(1)} = y - \frac{1}{2}\tau^2 \Lambda_2 y_{\bar{t}}$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ и $y = \mu^{j+1}$, $y^\vee = \mu^j$ при $x_\alpha = 0$, l_α, $\alpha = 1, 2$.

В [9], [10] вопрос о граничных условиях не обсуждается. Если брать граничные условия так: $y_{(1)} = 0{,}5(y + y^\vee)$ в [9], $y_{(1)} = y$ в [10], то можно показать, что эти алгоритмы сходятся со скоростью $O([\tau^2/\sqrt{h_1}] + |h|^2)$, а производящая схема имеет точность $O(\tau^2 + |h|^2)$.

2. Формулируем метод расщепления в операторной форме для задачи (27). Пусть выполнены условия (28) § 2.

Напишем исходную схему

$$y_{\bar{t}} + \sigma B^N(\bar{t}) + (1 - \sigma) B^N(\bar{t}) y^\vee = \varphi(\bar{t}), \quad y(0) = P_N u_0, \tag{56}$$
$$B^N(t) = \sum_{\alpha=1}^{m} B^N_\alpha(t), \quad \bar{t} = t_{j+0{,}5} = t_j + 0{,}5\tau, \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1$$

и соответствующую ей производящую схему

$$\prod_{\alpha=1}^{m} (E + \sigma\tau B_\alpha) y_{\bar{t}} = -By^\vee + \tilde{\varphi}, \quad y(0) = P_N u_0 . \tag{57}$$

Для решения полученного уравнения можно пользоваться одним из алгоритмов (51), (52), (54), (55):

$$\left.\begin{aligned} (E + 0{,}5\tau B_1) y_{(1)} &= (E - 0{,}5\tau B_2) y^\vee + 0{,}5\tau\varphi \\ (E + 0{,}5\tau B_2) y \quad &= (E - 0{,}5\tau B_1) y_{(1)} + 0{,}5\tau\varphi \end{aligned}\right\} \sigma = 0{,}5, \ m = 2, \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned} (E + \sigma\tau B_1) y_{(1)} &= (E - \tau(1 - \sigma) B_1 - \tau B_2) y^\vee + \tau\varphi \\ (E + \sigma\tau B_2) y \quad &= y_{(1)} - \sigma\tau B_2 y^\vee \end{aligned}\right\} m = 2, \tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned} (E + \sigma\tau B_1) y_{(1)} &= -\tau B y^\vee + \sum_{\alpha=1}^{p} (E + \sigma\tau B_\alpha) y^\vee + \tau\varphi \\ (E + \sigma\tau B_\alpha) y_{(\alpha)} &= y_{(\alpha-1)}, \ \alpha = 2, 3, \ldots, m, \ y_{(m)} = y \end{aligned}\right\}, \tag{60}$$

$$\left.\begin{aligned} &(E + \sigma\tau B_1) w_{(1)} = -By^\vee + \varphi, \ (E + \sigma\tau B_\alpha) w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \ \alpha > 1 \\ &y = y^\vee + \tau w_{(m)} \end{aligned}\right\}. \tag{61}$$

При операторной записи уравнений вопрос о граничных условиях для промежуточных значений $y_{(1)}, \ldots, y_{(m-1)}$ решается автоматически.

3. Перепишем производящую схему в виде

$$y_{\bar{t}} + B[\sigma y + (1 - \sigma)\, y^{\vee}] + \sigma^2 \tau^2 Q_m y_{\bar{t}} = \tilde{\varphi}\,,$$

где Q_m дистрибутивный оператор, равный

$$Q_2 = B_1 B_2\,, \quad Q_3 = B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3 + \sigma\tau B_1 B_2 B_3 \quad \text{и т. д.}$$

Для корректности и сходимости схем расщепления условий из § 2 п.п. 2, 3 недостаточно. Можно показать, что схема (57) корректна, если

(62) 1) B_α самосопряженный оператор $(B_\alpha v, y) = (v, B_\alpha y)$, $y, v \in \tilde{H}_N$;

(63) 2) $(B_\alpha y, y) \geqq c_1 \|y\|^2$, $c_1 = \mathrm{const} > 0$;

3) $B_\alpha(t)$ удовлетворяет по t условию Липшица в следующем смысле:

(64) $$|((B_\alpha(t))_{\bar{t}}\, y, y)| \leqq c_2(B_\alpha^{\vee} y, y)\,, \quad B_\alpha^{\vee} = B_\alpha(t_j)\,, \quad y \in \tilde{H}_N\,,$$

где $c_2 = \mathrm{const} > 0$ не зависит от τ и N;

4) оператор Q_m удовлетворяет условию

(65) $$\sigma^2 \tau^2 (Q_m y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) \geqq -(1 - \varepsilon)\, \|y_{\bar{t}}\|^2 - M\{(By, y) + (B^{\vee} y^{\vee}, y^{\vee})\}\, \tau\,,$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ не зависят от τ и N.

Если выполнены все эти условия и условия аппроксимации

(66) $$\|(BP_N u - \varphi) - P_N(Au - f)\| = \varrho(h_N)\,, \quad \left\| P_N\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t + \Theta) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right)\right\| = \varrho_2(|\Theta|)\,,$$

$$\|Q_m u_{\bar{t}}\| = O(1),$$

то справедлива оценка

$$\|y - P_N u\| = \varrho_1(\tau) + \varrho_2(h_N) + O(\tau^2)\,.$$

В [14] рассмотрены схемы расщепления для параболических уравнений с переменными коэффициентами, в [8] построены схемы повышенного порядка точности. Схемы расщепления позволяют получить точность $O(\tau^2 + |h|^2)$, однако, при более сильных требованиях гладкости, чем для исходной схемы.

Представляет интерес изучение вопросов о равномерной сходимости схем расщепления, а также о применимости схем такого типа для случая разрывных коэффициентов, для квазилинейных уравнений, для областей более сложного типа, чем области, составленные из параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям, и т. д., то-есть в тех случаях, когда аддитивные схемы применимы.

Мы не имеем возможности остановиться на других примерах применения аддитивных схем и схем расщепления для уравнения гиперболического типа и систем, например, для системы уравнений теории упругости.

Схемы расщепления, как известно, широко применяются в качестве итерационной процедуры для решения уравнения Лапласа и являются наиболее экономичными по сравнению с другими итерационными схемами. Здесь необходимо продолжить исследование вопроса об оптимизации выбора итерационных параметров.

Следует отметить, что имеются схемы расщепления для уравнений параболического типа со смешанными производными [14] и для систем таких уравнений. Даже в случае постоянных коэффициентов при числе измерений $p > 2$ для корректности этих схем, помимо условия параболичности, коэффициенты уравнения должны удовлетворять дополнительному ограничению [15]. Представляет интерес выяснение вопроса о возможности снятия этого ограничения.

Нам представляется также целесообразным изучение экономичных разностных схем на косоугольных сетках. Так, например, для параболического уравнения со смешанными производными в случае постоянных коэффициентов путем линейного преобразования можно избавиться от смешанных производных

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} K_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sum_{\alpha=1}^{p} L'_\alpha u\,, \quad L'_\alpha u = b_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial (x'_\alpha)^2}\,,$$

где $\partial u/\partial x'_\alpha$ – производная по некоторому косому направлению. Вводя косые (параллелограммные сетки) и пользуясь принципом аддитивности, получим экономичную локально-одномерную схему, равномерно сходящуюся со скоростью $O(\tau + |h|^2)$ и пригодную для произвольной области. Между тем, построение аддитивных схем *на прямоугольной сетке* для уравнений со смешанными производными вызывает большие трудности в случае произвольной области.

Цитированная литература

[1] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (ЖВММФ), 1961, № 1, 5–63.

[2] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, ЖВММФ, 1962, 2, № 5, 812–832.

[3] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, ЖВММФ, 1963, 3, № 1, 99–108.

[4] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, ЖВММФ, 1961, № 5, 784–805.

[5] *А. А. Самарский*, ЖВММФ, 1963, 3, № 2, 266–298.

[6] *А. А. Самарский, И. В. Фрязинов*, ЖВММФ, 1961, 1, № 5, 806–824.

[7] *А. А. Самарский*, ЖВММФ, 1961, 1, № 6, 979–1000.

[8] *А. А. Самарский*, ЖВММФ, 1964, 4, № 3, 580–585.

[9] *D. W. Peaceman, H. H. Rachford,* J. Industr. Math. Soc., 1955, 3, № 1, 28—41.
[10] *J. Douglas, H. H. Rachford,* Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 421—439.
[11] *Н. Н. Яненко,* Докл. АН СССР, 1959, 125, № 6, 1207—1210.
[12] *Н. Н. Яненко,* Изв. высш. учебн. завед. Сер. матем., 1961, 4 (23), 148—157.
[13] *Н. Н. Яненко,* ЖВММФ, 1962, 2, № 5, 933—938.
[14] *Г. Е. Дьяконов,* ЖВММФ, 1962, 2, № 4, 549—568.
[15] *Г. Е. Дьяконов,* ЖВММФ, 1964, 4, № 2, 278—291.
[16] *А. А. Самарский,* ЖВММФ, 1962, 2, № 5, 549—565.
[17] *А. А. Самарский,* ЖВММФ, 1963, 3, № 2, 431—466.
[18] *А. А. Самарский,* ЖВММФ, 1963, 3, №5, 812—840.
[19] *А. А. Самарский,* ЖВММФ, 1964, 4, № 4, 638—648.
[20] *А. А. Самарский,* ЖВММФ, 1964, 4, № 4, 753—759.

Проф. *А. А. Самарский,* Московский государственный универсистет, кафедра вычислительной математики механико-математического факультета, Москва, СССР.