Oldřich Vašíček

Jedna speciální čekací disciplína v systému hromadné obsluhy

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 1, 59–71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102934

JEDNA SPECIÁLNÍ ČEKACÍ DISCIPLÍNA V SYSTÉMU HROMADNÉ OBSLUHY

Oldřich Vašíček

(Došlo dne 4. března 1964.)

Článek se zabývá otázkou rozložení čekací doby pro systém se zvláštní čekací disciplínou. Výraz pro Laplace-Stieltjesovu transformaci distribuční funkce čekací doby je podán ve tvaru nekonečného řetězového zlomku, který je spočtěn v několika speciálních případech. Je ukázáno, že variance čekací doby nepřevýší varianci při obsluze v obráceném pořadí.

A. FORMULACE ÚLOHY

Zabývejme se systémem hromadné obsluhy typu $M/M/c$ (tzn. s Poissonovým vstupem, exponenciálním rozložením obsluhovací doby a c obsluhujícími), kde je tento způsob výběru do obsluhy: nově příchozí zákazníci tvoří jedinou čekací linku. Každý zákazník se postaví po svém příchodu s danou pravděpodobností na určité místo v této frontě, a to buď na jejím konci, nebo před některé již dříve přišlé zákazníky (tento jev nazývejme předběhnutím). Jakmile zaujme jednou své místo, již nepřechází a čeká tak dlouho, dokud není obsloužen.

Mějme dánu nekonečnou posloupnost čísel $r_1, r_2, \ldots$, kde $0 \leqq r_k \leqq 1$, $k = 1, 2, \ldots$, $\sum_{k=1}^{\infty} r_k \leqq 1$. Označme $R_k = \sum_{i=1}^{k} r_i$, $0 \leqq R_1 \leqq \ldots \leqq 1$. Nechť pro každou délku $l > 0$ fronty se nově příchozí zákazník postaví na k-té místo ve frontě s pravděpodobností r_k, $1 \leqq k \leqq l$, a s pravděpodobností $1 - \sum_{i=1}^{l} r_i = 1 - R_l$ na konec, tj. na $(l + 1)$-vé místo.

Tato čekací disciplína zahrnuje zřejmě jako zvláštní případy řádný čekací režim, kdy se každý zákazník postaví na konec fronty, a obsluhu v obráceném pořadí, kdy je nejdříve obsloužen zákazník naposled přišlý. V prvním případě stačí položit $r_1 = r_2 = \ldots = 0$, v druhém je $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$.

Nechť parametr vstupního Poissonova proudu je λ a parametr rozložení obsluhovací doby je μ, přičemž intenzita provozu $\varrho \equiv \lambda/c\mu < 1$.

Popsaný systém se liší od obvyklého systému s čekáním pouze čekací disciplínou. Oba systémy mají tedy společné všechny charakteristiky, které nesouvisí s pořadím obsluhy, jako zejména rozložení délky fronty, rozložení provozní doby, výstupní proud apod. Budeme se tudíž zajímat pouze o rozložení čekací doby γ, přičemž užijeme výsledků, známých pro systém M/M/c (viz např. [1]).

B. EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ

Vzhledem k exponenciálnímu rozložení doby obsluhy a mezipříchodových intervalů je proces popisující systém markovský; stojí-li tedy určitý zákazník v okamžiku t_0 na k-tém místě fronty, nezávisí jeho čekací doba γ_k, počítaná od tohoto okamžiku, na délce jeho čekání před časem t_0. Přitom doba γ_k nezávisí ani na délce fronty, neboť doba čekání zvolené jednotky je určena pouze obsluhovací dobou zákazníků, stojících před ní nebo předběhnuvších, přičemž předbíhání k-tého zákazníka nezávisí na délce fronty.

Označme $q_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ pravděpodobnost, že určitý pevně zvolený zákazník bude v okamžiku t na k-tém místě ve frontě, a $q_0(t)$ pravděpodobnost, že tento zákazník je v čase t již v obsluze nebo skončil obsluhu. Uvážíme-li možné přechody během intervalu $(t, t + \tau)$, můžeme psát pro $q_k(t)$ rovnice

$$
\begin{aligned}
q_0(t + \tau) &= q_0(t) + c\mu\tau\, q_1(t)\,(1 - \lambda R_1 \tau) + o(\tau)\,,\\
q_1(t + \tau) &= (1 - c\mu\tau)\,(1 - \lambda R_1 \tau)\, q_1(t) + c\mu\, \tau(1 - \lambda R_2 \tau)\, q_2(t) + o(\tau)\,,\\
q_k(t + \tau) &= \lambda R_{k-1}\, \tau(1 - c\mu\tau)\, q_{k-1}(t) + (1 - c\mu\tau)\,(1 - \lambda R_k \tau)\, q_k(t) +\\
&\quad + c\mu\, \tau(1 - \lambda R_{k+1} \tau)\, q_{k+1}(t) + o(\tau)\,, \quad k > 1\,.
\end{aligned}
$$

Po úpravách dostáváme pro $\tau \to 0$ soustavu diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad q_0'(t) &= c\mu\, q_1(t)\,,\\
q_1'(t) &= -\,(\lambda R_1 + c\mu)\, q_1(t) + c\mu\, q_2(t)\,,\\
q_k'(t) &= \lambda R_{k-1}\, q_{k-1}(t) - (\lambda R_k + c\mu)\, q_k(t) + c\mu\, q_{k+1}(t)\,, \quad k > 1\,.
\end{aligned}
$$

K těmto rovnicím přistupuje ještě zřejmá normovací podmínka

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) = 1\,,$$

platná pro všechna t.

Označme v_k, $k = 1, 2, \ldots$ pravděpodobnost, že nově přišlý zákazník se postaví na k-té místo (ať již předběhne či nikoli) a uvažujme soustavu (1) za počátečních podmínek $q_0(0) = 1 - \Pi$, $q_k(0) = v_k$ pro $k > 0$, kde Π je pravděpodobnost čekání. Potom $q_0(t)$ značí pravděpodobnost, že zákazník, který přišel do systému v čase $t = 0$, je v okamžiku t již v obsluze, tj. že jeho čekací doba γ je menší než t; máme tedy

$$\mathbf{P}\{\gamma < t\} = q_0(t)\,.$$

Soustava (1) spolu s normovací podmínkou je po formální stránce speciálním případem rovnic procesu množení a úmrtí (birth and death process) s absorpčním stavem. V našem případě máme $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = \lambda R_n$ pro $n > 0$, $\mu_n = c\mu$. Lze tedy užít výsledků teorie těchto rovnic.

G. E. H. Reuter dokázal ve své práci [3], že existuje právě jedno řešení rovnic procesu množení a úmrtí, jakmile řada

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \ldots + \frac{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2}{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_2 \lambda_1} \right)$$

diverguje. Dosadíme-li do tohoto výrazu naše hodnoty, je

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c\mu} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{1}{R_n} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{1}{R_n R_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\varrho^n} \frac{1}{R_n R_{n-1} \ldots R_1} \right) \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{c\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} + \ldots + \frac{1}{\varrho^n} \right) = \infty .$$

Má tedy soustava (1), a tudíž i naše úloha, jediné řešení. Podle [2] lze potom toto řešení nalézt jako limitu pro $N \to \infty$ řešení konečné soustavy

$$\begin{aligned}
q_0'(t) &= c\mu\, q_1(t) , \\
q_1'(t) &= -(\lambda R_1 + c\mu)\, q_1(t) + c\mu\, q_2(t) , \\
q_k'(t) &= \lambda R_{k-1}\, q_{k-1}(t) - (\lambda R_k + c\mu)\, q_k(t) + c\mu\, q_{k+1}(t) , \quad 1 < k < N , \\
q_N'(t) &= \lambda R_{N-1}\, q_{N-1}(t) - (\lambda R_N + c\mu)\, q_N(t) .
\end{aligned}$$

C. ROVNICE PRO DISTRIBUČNÍ FUNKCI ČEKACÍ DOBY

Ve zmíněné práci W. Ledermanna a G. E. H. Reutra [2] je podána obecná metoda řešení nekonečné soustavy rovnic množení a úmrtí pomocí spektrálních funkcí. Zde odvodíme poněkud jiný způsob, vhodnější pro některé úvahy našeho případu.

Nechť $w_k(t) = \mathbf{P}\{\gamma_k < t\}$ je pravděpodobnost, že čekací doba zákazníka, který se postavil po příchodu na k-té místo, je menší než t. Vyšetřujeme-li změnu čekací doby během intervalu $(t, t + \tau)$, dospějeme k rovnicím

$$\begin{aligned}
w_1(t) = {} & c\mu\, \tau(1 - R_1 \lambda \tau)\, \epsilon(t - \tau) + [1 - \lambda\tau + (1 - R_1)\, \lambda\tau] \times \\
& \times (1 - c\mu\tau)\, w_1(t - \tau) + (1 - c\mu\tau)\, \lambda R_1 \tau\, w_2(t - \tau) + o(\tau) , \\
w_k(t) = {} & c\mu\, \tau(1 - R_k \lambda \tau)\, w_{k-1}(t - \tau) + [1 - \lambda\tau + (1 - R_k)\, \lambda\tau] \times \\
& \times (1 - c\mu\tau)\, w_k(t - \tau) + (1 - c\mu\tau)\, \lambda R_k \tau\, w_{k+1}(t - \tau) + o(\tau) , \\
& k > 1 .
\end{aligned}$$

(Užíváme označení $\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad t > 0 \\ 0 & \text{pro} \quad t \leqq 0 \end{cases}$).

Po úpravách dostáváme pro $\tau \to 0$ soustavu

$$(2) \qquad \begin{aligned} w_1'(t) &= c\mu \in(t) - [c\mu + \lambda R_1]\, w_1(t) + \lambda R_1\, w_2(t)\,, \\ w_k'(t) &= c\mu\, w_{k-1}(t) - [c\mu + \lambda R_k]\, w_k(t) + \lambda R_k\, w_{k+1}(t)\,, \quad k > 1\,. \end{aligned}$$

Použijme na tuto soustavu Laplace-Stieltjesovu transformaci a pišme $\varrho R_k = \varrho_k$

$$(3) \qquad \begin{aligned} \psi_1(s)\left(1 + \varrho_1 + \frac{s}{c\mu}\right) - \varrho_1\, \psi_2(s) &= 1\,, \\ -\, \psi_{k-1}(s) + \psi_k(s)\left(1 + \varrho_k + \frac{s}{c\mu}\right) - \varrho_k\, \psi_{k+1}(s) &= 0\,, \quad k < 1\,. \end{aligned}$$

Zde $\psi_k(s)$ je Laplace-Stieltjesova transformace funkce $w_k(t)$

$$\psi_k(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \mathrm{d}w_k(t)\,.$$

Distribuční funkce celkové čekací doby γ je pak

$$(4) \qquad w(t) = \mathbf{P}\{\gamma < t\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, f_k(t)\,,$$

kde $f_k(t)$ je pravděpodobnost, že nově příchozí bude čekat méně než t, nalezl-li systém ve stavu k. Výrazy pro pravděpodobnosti stavů p_k lze nalézt v [1].

Snadno nahlédneme, že je

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \in(t)\,, \quad 0 \leqq k < c\,, \\ f_c(t) &= w_1(t)\,, \\ f_k(t) &= \sum_{i=1}^{k-c} r_i\, w_i(t) + (1 - R_{k-c})\, w_{k-c+1}(t)\,, \quad k > c\,. \end{aligned}$$

Po dosazení do (4) máme

$$\begin{aligned} w(t) &= (1 - \Pi) \in(t) + p_c\, w_1(t) + \\ &+ p_c \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \Big[\sum_{i=1}^{k} r_i\, w_i(t) + (1 - R_k)\, w_{k+1}(t)\Big]\,. \end{aligned}$$

Laplace-Stieltjesova transformace čekací doby je pak

$$(5) \qquad \begin{aligned} \psi(s) &= 1 - \Pi + p_c\, \psi_1(s) + \\ &+ p_c \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \Big[\sum_{i=1}^{k} r_i\, \psi_i(s) + (1 - R_k)\, \psi_{k+1}(s)\Big]\,. \end{aligned}$$

Sečteme-li prvních k rovnic soustavy (3), dostaneme

$$\psi_k(s) - \varrho_k\, \psi_{k+1}(s) + \varrho \sum_{i=1}^{k} r_i\, \psi_i(s) + \frac{s}{c\mu} \sum_{i=1}^{k} \psi_i(s) = 1\,,$$

neboli

$$\varrho[\sum_{i=1}^{k} r_i \psi_i(s) - R_k \psi_{k+1}(s)] = 1 - \psi_k(s) - \frac{s}{c\mu} \sum_{i=1}^{k} \psi_i(s) .$$

Po dosazení do (5)

$$\psi(s) = 1 - \Pi + p_c \psi_1(s) + p_c \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^{k-1} \Big[1 - \psi_k(s) + \varrho \psi_{k+1}(s) - - \frac{s}{c\mu} \sum_{i=1}^{k} \psi_i(s) \Big] = 1 - \Pi \frac{s}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \psi_k(s) . \tag{6}$$

Pro střední hodnotu odtud máme

$$\mathbf{E}\gamma = - \psi'(0) = \frac{1}{\lambda} \Pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \psi_k(0) = \frac{1}{c\mu - \lambda} \Pi ,$$

což je, jak bylo lze očekávat, stejná hodnota jako při řádné čekací disciplíně.

Pro druhý moment je obdobně

$$\mathbf{E}\gamma^2 = \psi''(0) = - \frac{2}{\lambda} \Pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \psi_k'(0) = \frac{2}{\lambda} \Pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \mathbf{E}\gamma_k . \tag{7}$$

Zde označujeme (v souhlase s předešlým) $\mathbf{E}\gamma_k$ střední hodnotu doby čekání zákazníka, postavivšího se po příchodu na k-té místo ve frontě.

D. OMEZENÍ PRO HODNOTU VARIANCE ČEKACÍ DOBY

Pro varianci čekací doby odvodíme nyní zajímavou nerovnost.

V následujících úvahách, které předpokládají nenulovou délku fronty, můžeme zaměnit náš obsluhovací systém jedinou obsluhovací linkou s exponenciálním rozložením obsluhovací doby o parametru $c\mu$; skutečně, pravděpodobnost, že se za čas t neuvolní ani jedna linka, jsou-li v okamžiku t_1 všechny obsazeny, je

$$(e^{-\mu t})^c = e^{-c\mu t} .$$

Tato pravděpodobnost přitom nezáleží na době, po kterou jsou již obsluhující linky obsazeny před časem t_1.

Nechť v některém okamžiku t_0 přijde jistý zákazník a postaví se na k-té místo ve frontě. Označme γ_k jeho dobu čekání a předpokládejme, že za tuto dobu ho předběhne n po něm přišlých jednotek. Pak lze pro γ_k psát

$$\gamma_k = T_0 + \sum_{i=1}^{k-1} T_i + \sum_{i=1}^{n} T_i' , \tag{8}$$

kde T_i, $i > 0$ je doba obsluhy zákazníka, stojícího v čase t_0 na i-tém místě ve frontě, T_0 je doba obsluhy zákazníka, který je již obsluhován (náhodná proměnná T_0 má stejné exponenciální rozložení jako T_i, $i > 0$) a posléze T'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou doby obsluhy předběhnuvších jednotek.

Počet předběhnuvších zákazníků n není větší než počet d zákazníků vůbec přišlých za čas γ_k,

$$0 \leqq n \leqq d\,. \tag{9}$$

Přejdeme-li ve formuli (8) ke střední hodnotě, dostaneme

$$\mathbf{E}\gamma_k = k\,.\,\frac{1}{c\mu} + \frac{1}{c\mu}\,\mathbf{E}n\,.$$

Z (9) je

$$0 \leqq \mathbf{E}n \leqq \mathbf{E}d\,,$$

přičemž

$$\mathbf{E}d = \lambda\mathbf{E}\gamma_k\,.$$

Po dosazení

$$k\,.\,\frac{1}{c\mu} \leqq \mathbf{E}\gamma_k \leqq k\,.\,\frac{1}{c\mu} + \varrho\mathbf{E}\gamma_k\,,$$

neboli

$$k\,.\,\frac{1}{c\mu} \leqq \mathbf{E}\gamma_k \leqq k\,.\,\frac{1}{c\mu}\,.\,\frac{1}{1-\varrho}\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Přitom je zřejmo, že veličiny na krajích nerovnosti (10) vyjadřují střední hodnoty γ_k pro řádnou čekací disciplínu (nikdo nepředbíhá), resp. inversní čekací disciplínu (všichni příchozí předběhnou).

Vynásobme nerovnost (10) ϱ^k a sečtěme podle k od jedné do nekonečna.

$$\frac{1}{c\mu}\sum_{k=1}^{\infty} k\varrho^k \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\varrho^k\mathbf{E}\gamma_k \leqq \frac{1}{1-\varrho}\cdot\frac{1}{c\mu}\sum_{k=1}^{\infty} k\varrho^k\,,$$

tj.

$$\frac{1}{c\mu}\cdot\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2} \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\varrho^k\mathbf{E}\gamma_k \leqq \frac{\varrho}{(1-\varrho)^3}\cdot\frac{1}{c\mu}\,.$$

Ze vztahu (7) pak je

$$\frac{2}{(c\mu-\lambda)^2}\,\Pi \leqq \mathbf{E}\gamma^2 \leqq \frac{1}{1-\varrho}\,\frac{2}{(c\mu-\lambda)^2}\,\Pi$$

a

$$\frac{1}{(c\mu-\lambda)^2}\,(2\Pi - \Pi^2) \leqq \mathbf{D}\gamma \leqq \frac{1}{(c\mu-\lambda)^2}\left(\frac{2}{1-\varrho}\,\Pi - \Pi^2\right).$$

Výrazy, vyskytující se v této nerovnosti, jsou variance řádného a inversního čekacího režimu; označíme-li po řadě $\mathbf{D}\gamma'$, $\mathbf{D}\gamma''$ variance při obou těchto disciplínách, máme

$$\mathbf{D}\gamma' \leqq \mathbf{D}\gamma \leqq \mathbf{D}\gamma''\,. \tag{11}$$

E. ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC PRO DISTRIBUČNÍ FUNKCI ČEKACÍ DOBY

Přistupme nyní k řešení soustavy (3).

Řešení nekonečné soustavy (2) lze obdržet limitním přechodem pro $N \to \infty$ z řešení konečné soustavy

$$w_1'(t) = c\mu\, \epsilon(t) - (c\mu + \lambda R_1)\, w_1(t) + \lambda R_1\, w_2(t)\,,$$
$$w_k'(t) = c\mu\, w_{k-1}(t) - (c\mu + \lambda R_k)\, w_k(t) + \lambda R_k\, w_{k+1}(t)\,, \quad 1 < k < N\,,$$
$$w_N'(t) = c\mu\, w_{N-1}(t) - (c\mu + \lambda R_N)\, w_N(t)\,.$$

Zobrazme tuto soustavu pomocí Laplace-Stieltjesovy transformace; dostaneme (po vynásobení $-(1/c\mu)$)

$$\psi_1(s)\left(1 + \varrho_1 + \frac{s}{c\mu}\right) - \varrho_1\, \psi_2(s) = 1\,, \tag{12}$$
$$-\psi_{k-1}(s) + \psi_k(s)\left(1 + \varrho_k + \frac{s}{c\mu}\right) - \varrho_k\, \psi_{k+1}(s) = 0\,, \quad 1 < k < N\,,$$
$$-\psi_{N-1}(s) + \psi_N(s)\left(1 + \varrho_N + \frac{s}{c\mu}\right) = 0\,.$$

Pišme v těchto rovnicích $\varphi_k(s) = [\psi_{k+1}(s)]/[\psi_k(s)]$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $\varphi_0(s) = \psi_1(s)$. Pak můžeme přepsat soustavu (12) na tvar

$$\varphi_k(s)\left[\left(1 + \varrho_{k+1} + \frac{s}{c\mu}\right) - \varrho_{k+1}\, \varphi_{k+1}(s)\right] = 1\,, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2\,,$$
$$\varphi_{N-1}(s)\left(1 + \varrho_N + \frac{s}{c\mu}\right) = 1\,.$$

To je soustava N algebraických rovnic pro N neznámých funkcí $\varphi_0(s), \varphi_1(s), \ldots, \varphi_{N-1}(s)$. Napišme výraz pro $\varphi_0(s) = \psi_1(s)$ ve tvaru konečného řetězového zlomku

$$\psi_1(s) = \varphi_0(s) = \frac{1\,|}{|\,1 + \varrho_1 + \dfrac{s}{c\mu}} - \frac{\varrho_1\,|}{|\,1 + \varrho_2 + \dfrac{s}{c\mu}} - \ldots - \frac{\varrho_{N-1}\,|}{|\,1 + \varrho_N + \dfrac{s}{c\mu}}$$

a značme $\psi_1(s) = \psi_1^{(N)}(s)$, abychom zdůraznili závislost na N. Potom funkce

$$\psi_1(s) = \lim_{N \to \infty} \psi_1^{(N)}(s) = \frac{1\,|}{|\,1 + \varrho_1 + \dfrac{s}{c\mu}} - \frac{\varrho_1\,|}{|\,1 + \varrho_2 + \dfrac{s}{c\mu}} - \frac{\varrho_2\,|}{|\,1 + \varrho_3 + \dfrac{s}{c\mu}} - \ldots \tag{13}$$

je řešením soustavy (3). Tím jsou dány i hodnoty $\psi_2(s), \psi_3(s), \ldots$ Distribuční funkce $w_k(t)$ lze pak nalézt numerickou inversí Laplace-Stieltjesovy transformace.

F. PŘÍKLADY

1. Řádný čekací režim. Zde je $r_1 = r_2 = \ldots = 0$. Z rovnic (3) pak máme

$$\psi_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{c\mu}},$$

$$\psi_k(s) = \frac{\psi_{k-1}(s)}{1 + \frac{s}{c\mu}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{s}{c\mu}}\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Pak

$$\psi(s) = 1 - \Pi \frac{s}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{1 + \frac{s}{c\mu}}\right)^k = 1 - \Pi \frac{s}{\lambda} \frac{\frac{\varrho}{1 + \frac{s}{c\mu}}}{1 - \frac{\varrho}{1 + \frac{s}{c\mu}}} = 1 - \Pi + \Pi \frac{c\mu - \lambda}{(c\mu - \lambda) + s}.$$

Odtud dostáváme pro distribuční funkci $w(t)$ čekací doby známý výraz

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leqq 0, \\ 1 - \Pi e^{-(c\mu - \lambda)t} & \text{pro } t > 0. \end{cases}$$

2. Inversní čekací režim. Pro tento případ je $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$ a tudíž $R_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Vztah (5) přejde na tvar

$$\psi(s) = 1 - \Pi + \Pi\, \psi_1(s).$$

Pro $\psi_1(s)$ dostaneme z řetězového zlomku (13) rovnici

$$\psi_1(s) = \frac{1}{1 + \varrho + \frac{s}{c\mu} - \varrho\, \psi_1(s)},$$

neboli

$$-\varrho\, \psi_1^2(s) + \left(1 + \varrho + \frac{s}{c\mu}\right) \psi_1(s) - 1 = 0.$$

Z obou kořenů této rovnice vyhovuje pouze

$$\psi_1(s) = \alpha_1(s) = \frac{\left(1 + \varrho + \frac{s}{c\mu}\right) - \sqrt{\left[\left(1 + \varrho + \frac{s}{c\mu}\right)^2 - 4\varrho\right]}}{2\varrho},$$

neboť $\alpha_2(s)$ se znaménkem + před odmocninou nesplňuje podmínku $\alpha(0) = 1$.

Pro inversní Laplace-Stieltjesovu transformaci tohoto výrazu máme

$$w_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \int_0^t \frac{1}{x} e^{-(c\mu+\lambda)x} I_1(2\sqrt{(c\mu\lambda)}\, x)\, dx\,,$$

kde $I_1(t)$ je modifikovaná Besselova funkce prvního druhu, prvního řádu.

Potom je

$$w(t) = 1 - \Pi + \Pi\, w_1(t)\,, \quad t > 0\,.$$

Výraz pro distribuční funkci čekací doby, event. pro její Laplace-Stieltjesovu transformaci, byl zatím odvozen pouze pro systémy s jedinou obsluhovací linkou (pro ně je $\Pi = \varrho$). Zde je tedy podána formule pro systém s obecným počtem obsluhujících.

3. Předbíhání na začátek fronty. Nechť nově přišlý zákazník se postaví s pravděpodobností ϑ na první místo ve frontě, a s pravděpodobností $1 - \vartheta$ na konec fronty. Pak je

$$r_1 = \vartheta\,, \quad r_2 = r_3 = \ldots = 0\,, \quad R_k = \vartheta\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

V tomto případě je z (5)

$$(14) \quad \psi(s) = 1 - \Pi + p_c \psi_1(s) + p_c \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \vartheta\, \psi_1(s) + p_c \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k (1 - \vartheta)\, \psi_{k+1}(s) =$$

$$= 1 - \Pi + \vartheta\Pi\, \psi_1(s) + (1 - \vartheta) \frac{1 - \varrho}{\varrho} \Pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k\, \psi_k(s)\,.$$

Ze vztahu (6) je

$$\Pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k\, \psi_k(s) = [1 - \psi(s)] \frac{\lambda}{s}\,.$$

Po dosazení této hodnoty do (14) dostáváme pro $\psi(s)$ rovnici

$$\psi(s) = 1 - \Pi + \vartheta\Pi\, \psi_1(s) + \frac{1 - \varrho}{\varrho} (1 - \vartheta) [1 - \psi(s)] \frac{\lambda}{s}\,,$$

odtud je

$$(15) \qquad \psi(s) = (1 - \Pi) \frac{s}{a + s} + \frac{a}{a + s} + \vartheta\Pi \frac{s}{a + s}\, \psi_1(s)\,,$$

kde

$$a = (c\mu - \lambda)(1 - \vartheta)\,.$$

Pro $\psi_1(s)$ plyne z (13) rovnice

$$(16) \qquad \psi_1(s) = \frac{1}{1 + \varrho\vartheta + \dfrac{s}{c\mu} - \varrho\vartheta\, \psi_1(s)}\,.$$

Obdobným způsobem jako v předešlém odstavci máme

$$\psi_1(s) = \frac{\left(1 + \varrho\vartheta + \frac{s}{c\mu}\right) - \sqrt{\left[\left(1 + \varrho\vartheta + \frac{s}{c\mu}\right)^2 - 4\varrho\vartheta\right]}}{2\varrho\vartheta}.$$

Pak

$$w(t) = 1 - \Pi e^{-at}\left[1 - \sqrt{\left(\frac{c\mu\vartheta}{\lambda}\right)}\int_0^t \frac{1}{x} e^{-(c\mu\vartheta+\lambda)x} I_1(2\sqrt{(c\mu\lambda\vartheta)}\, x)\, dx\right], \quad t > 0,$$

kde $I_1(t)$ je opět modifikovaná Besselova funkce prvního druhu, prvního řádu.

Snadno se přesvědčíme, že pro $\vartheta = 0$ a $\vartheta = 1$, kdy čekací disciplína přechází na případ řádného, resp. inversního režimu, nabývá výraz pro $w(t)$ příslušného tvaru.

Pro druhý moment dostaneme dvojnásobnou derivací (15) v bodě 0

$$\mathbf{E}\gamma^2 = \psi''(0) = \Pi\frac{2}{a^2} + 2\Pi\vartheta\frac{1}{a}\psi_1'(0) - \psi_1(0)\,\Pi\vartheta\frac{2}{a^2} = \frac{2\Pi}{a^2}\left[1 - \vartheta + a\vartheta\,\psi_1'(0)\right],$$

pokud $a \neq 0$, tj. $\vartheta \neq 1$. Přitom $\psi_1'(0)$ lze z rovnice (16) určit jako

$$\psi_1'(0) = -\frac{1}{1 - \varrho\vartheta}\cdot\frac{1}{c\mu}.$$

Potom je tedy

$$\mathbf{E}\gamma^2 = \frac{2\Pi}{a^2}\left[1 - \vartheta - a\vartheta\frac{1}{1 - \varrho\vartheta}\frac{1}{c\mu}\right] = \frac{2\Pi}{(c\mu - \lambda)^2}\cdot\frac{1}{1 - \varrho\vartheta}.$$

Tento vztah platí zřejmě i pro $\vartheta = 1$.

Variance je dána výrazem

$$\mathbf{D}\gamma = \frac{1}{(c\mu - \lambda)^2}\left(\frac{2\Pi}{1 - \varrho\vartheta} - \Pi^2\right).$$

Třetí moment určíme z formule

$$\mathbf{E}\gamma^3 = \frac{6\Pi}{(c\mu - \lambda)^3}\cdot\frac{1 - \varrho^2\vartheta}{(1 - \varrho\vartheta)^3}.$$

4. Předbíhání na konečný počet míst. Jestliže předpokládáme, že od určitého celého $K > 0$ počínaje je $r_k = 0$, lze $\psi(s)$ napsat ve tvaru konečného algebraického výrazu. Tento případ je přímým zobecněním předchozího odstavce. Nechť

$$0 \leqq R_1 \leqq \ldots \leqq R_K = R_{K+1} = \ldots = \beta \leqq 1.$$

Pak výraz (13) přepíšeme ve tvaru

(17)

$$\psi_1(s) = \frac{1|}{|1 + \varrho_1 + \frac{s}{c\mu}} - \frac{\varrho_1|}{|1 + \varrho_2 + \frac{s}{c\mu}} - \ldots - \frac{\varrho_{K-2}|}{|1 + \varrho_{K-1} + \frac{s}{c\mu} - \varrho_{K-1}X(s)},$$

kde

$$X(s) = \frac{1|}{|1 + \varrho\beta + \frac{s}{c\mu}} - \frac{\varrho\beta|}{|1 + \varrho\beta + \frac{s}{c\mu}} - \ldots$$

Odtud dostáváme pro $X(s)$ rovnici

$$X(s) = \frac{1}{1 + \varrho\beta + \frac{s}{c\mu} - \varrho\beta\, X(s)},$$

jejíž řešení

$$X(s) = \frac{\left(1 + \varrho\beta + \frac{s}{c\mu}\right) - \sqrt{\left[\left(1 + \varrho\beta + \frac{s}{c\mu}\right)^2 - 4\varrho\beta\right]}}{2\varrho\beta}$$

po dosazení do (17) dává hodnotu funkce $\psi_1(s)$.

Z prvních $K - 1$ rovnic soustavy (3) spočteme pak funkce $\psi_2(s), \ldots, \psi_K(s)$. Pro Laplace-Stieltjesovu transformaci distribuční funkce celkové doby čekání máme jednak ze vztahu (5)

$$\psi(s) = 1 - \Pi + \Pi(1 - \varrho) \sum_{k=1}^{K} \varrho^{k-1}(1 - R_{k-1})\, \psi_k(s) +$$
$$+ \Pi \sum_{k=1}^{K} \varrho^k r_k\, \psi_k(s) + \Pi(1 - \varrho)(1 - \beta) \sum_{k=K+1}^{\infty} \varrho^{k-1}\, \psi_k(s),$$

a ze vztahu (6)

$$\psi(s) = 1 - \Pi \frac{s}{\lambda} \sum_{k=1}^{K} \varrho^k\, \psi_k(s) - \Pi \frac{s}{\lambda} \sum_{k=K+1}^{\infty} \varrho^k\, \psi_k(s).$$

Vyloučíme-li z obou výrazů $\sum_{k=K+1}^{\infty} \varrho^k\, \psi_k(s)$, máme

$$\psi(s)\left[1 + (1 - \varrho)(1 - \beta)\frac{c\mu}{s}\right] = 1 - \Pi + (1 - \varrho)(1 - \beta)\frac{c\mu}{s} +$$
$$+ \Pi \sum_{k=1}^{K} \varrho^{k-1}\left[(1 - \varrho)\beta - R_{k-1} + \varrho R_k\right] \psi_k(s).$$

Inversí Laplace-Stieltjesovy transformace dostaneme odtud distribuční funkci $w(t)$.

5. Předbíhání s pravděpodobnostmi $r_k = [k(k + 1)]^{-1}$. Pro tento případ máme $\varrho_k = \varrho \, . \, k/(k + 1)$. Vynásobme k-tou rovnici soustavy (3) číslem $(k + 1)\, z^k$ a sečtěme. Zavedením funkce

$$G(z, s) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k\, \psi_k(s)$$

obdržíme diferenciální rovnici

$$\left[-z^2 + \left(1 + \varrho + \frac{s}{c\mu}\right)z - \varrho\right]\frac{\partial}{\partial z}G(z, s) + \tag{18}$$
$$+\left[-2z + \left(1 + \frac{s}{c\mu}\right) + \frac{\varrho}{z}\right]G(z, s) = 2z\,,$$

k níž přistupují okrajové podmínky

$$G(0, s) = 0\,, \quad G(z, 0) = \frac{z}{1 - z}\,.$$

V tomto značení je

$$\psi(s) = 1 - \Pi\frac{s}{\lambda}\,G(\varrho, s)\,. \tag{19}$$

Druhý moment čekací doby $\mathbf{E}\gamma^2$ lze z rovnic (18) a (19) určit jako

$$\mathbf{E}\gamma^2 = \frac{2\Pi}{(c\mu - \lambda)^2}\cdot\frac{1 - \varrho/2}{1 - \varrho} = \mathbf{E}\gamma'^2\cdot\frac{1 - \varrho/2}{1 - \varrho}\,,$$

kde $\mathbf{E}\gamma'^2$ je druhý moment doby čekání pro řádný režim.

Literatura

[1] *А. Я. Хинчин:* Математические методы теории массового обслуживания. Труды мат. института им. Стеклова, Москва 1955.

[2] *W. Ledermann & G. E. H. Reuter*: Spectral Theory for the Differential Equations of simple Birth and Death Process. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, vol. 246, 321–369, 1954.

[3] *G. E. H. Reuter*: Denumerable Markov Process and the Associated Contraction Semigroups on *l*. Acta Math., vol. 97–98, 1–46, 1957.

[4] *D. M. G. Wishart*: Queueing Systems in Which the Discipline Is „Last-Come, First-Served". Operations Research, vol. 8, no. 5, 591–599, 1960.

Резюме

ОДНА СПЕЦИАЛЬНАЯ ДИСЦИПЛИНА ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ОЛЬДРЖИХ ВАШИЧЕК (Oldřich Vašíček)

Автор занимается в статье системой массового обслуживания типа M/M/c со следующей дисциплиной ожидания: каждый потребитель станет сразу же после прихода на k-ое место в очереди с вероятностью r_k, $1 \leqq k \leqq l$, где l – – длина очереди, и с вероятностью $1 - \sum_{k=1}^{l} r_k$ на самый конец очереди. Здесь $r_1, r_2, \ldots$ – данная последовательность вероятностей, $\sum_{k=1}^{\infty} r_k \leqq 1$. Составлены

уравнения для функции распределения $w(t)$ выжидательного времени γ, и доказано существование и однозначность решения. Преобразование Лапласа-Стильтьеса $\psi(s)$ функции $w(t)$ дано соотношением (5), или же (6), где $\psi_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots$ суть преобразования Лапласа-Стильтьеса выжидательного времени k-ого покупателя в очереди, $\varrho = \lambda/c\mu$ – интенсивность работы, Π – вероятность ожидания. Для $\psi_k(s)$ справедлива система (3). Отсюда было получено выражение (13) для $\psi_1(s)$. Функция $w(t)$ была исследована в следующих частных случаях: 1. $r_1 = r_2 = \ldots = 0$; 2. $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$; 3. $r_1 = \vartheta$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$. Были получены некоторые результаты и в случае, когда $r_k = 0$ при $k > K$, и в случае $r_k = [k(k+1)]^{-1}$. Для вариантности $\mathrm{D}\,\gamma$ выжидательного времени было доказано, что справедливо неравенство (11), где γ', γ'' означают соответственно время ожидания при обслуживании в порядке приходов или в обратном порядке.

Summary

ON A SPECIAL QUEUE DISCIPLINE

OLDŘICH VAŠÍČEK

This article deals with the M/M/c queueing system with the following queue discipline: if an arriving customer finds a queue of length $l > 0$, he occupies the k-th rank in the queue with probability r_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, and the $(k+1)$-st one with probability $1 - \sum_{k=1}^{l} r_k$, where $r_1, r_2, r_3, \ldots$ is a given sequence of nonnegative numbers, $\sum_{k=1}^{\infty} r_k \leqq 1$. Thereafter, no changes occur in the queue.

Let λ be the parameter of the arrival process and μ the parameter of the service time distribution, so that $\varrho = \lambda/c\mu$ is the traffic intensity. The differential equations for the distribution function $w(t)$ of the waiting time γ are set up, and the existence and unicity of their solution established. The Laplace-Stieltjes transform $\psi(s)$ of $w(t)$ satisfies (5) and (6), where $\psi_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots$, is the Laplace-Stieltjes transform of the waiting time distribution of the customer actually k-th in the queue, and Π is the probability of having to wait at all. The $\psi_k(s)$ satisfy (3). Hence the expression (13) is deduced, yielding a continuous fraction for $\psi_1(s)$. The explicit solution $w(t)$ has been obtained in the following special cases: 1) $r_1 = r_2 = \ldots = 0$ (first-come-first-served system); 2) $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$ (last-come-first-served system); 3) $r_1 = \vartheta$, $r_2 = r_3 = \ldots = 0$, $0 < \vartheta < 1$. Some results are given concerning the cases where $r_k = 0$ for $k > K$, and $r_k = [k(k+1)]^{-1}$.

It is also shown that the variance $\mathbf{D}\gamma$ of the waiting time satisfies inequality (11), where γ' and γ'' are waiting times for the same system but with the normal and inverse queue disciplines, respectively.

Adresa autora: *Oldřich Vašíček*, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.