Aplikace matematiky

Karel Chobot

Maticově vztahy mezi silovou a deformační metodou

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 6, 443–454

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102923`

MATICOVÉ VZTAHY MEZI SILOVOU A DEFORMAČNÍ METODOU

KAREL CHOBOT

(Došlo dne 18. prosince 1963.)

Použijeme-li k vyjádření metody silové a metody deformační maticového počtu, lze základní vztahy obou stežejních metod pro výpočet rámcových konstrukcí nejen snadno a přehledně odvodit, ale maticové vyjádření dává i možnost odvození dalších vztahů mezi těmito metodami a sestavit rovnice, společné oběma metodám.

Vyjádření různých problémů stavební mechaniky v maticové formě má řadu výhod. Symbolický zápis umožnuje rychlejší a přehlednější orientaci v různých problémech. Navíc symbolické vyjádření umožňuje snáze provádět různé operace a dospět k závěrům, jejichž obecné odvození v obvyklé formě by působilo řadu nesnází. Nejpodstatnější výhodou je však to, že maticové formulace problémů mechaniky představují již přímý podklad pro výpočet na samočinných počítačích. V následujícím si ukážeme maticovou formulaci metody silové a závěry plynoucí z tohoto vyjádření pro vztahy mezi silovou a deformační metodou. Práce navazuje na článek K. Chobota „*Použití maticového počtu ve stavebné mechanice*", Sborník FIS 24, SPN 1961, str. 125.

Uvažujme obecnou rovinnou rámovou konstrukci o n styčnících a m prutech, která je s-krát staticky neurčitá a jejichž r koncových průřezů prutů je vetknuto do podpor; pruty jsou buď přímé nebo zakřivené, obecného průřezu. Předpokládáme styčné zatížení {v každém styčníku třemi složkami – momentem (kladný ve smyslu pohybu ručiček hodinových), vodorovnou (kladná vpravo) a svislou silou (kladná dolů)} a vazby jen pevné. Tyto předpoklady nejsou na újmu obecnosti. Vliv normálných sil budeme uvažovat, vliv posouvajících sil zanedbáme. Znaménkový systém zavedeme podle deformační metody.

Za uvedených předpokladů vyjádříme přetvárnou práci konstrukce v maticové formě rovnicí

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\mathbf{S}^T \mathbf{C}\,\mathbf{S}\,, \tag{1}$$

kde $\mathbf{S}$ je sloupcová matice momentů v koncových průřezech jednotlivých prutů a normálných sil (případně sil působících ve spojnici koncových bodů zakřivených prutů). Je typu ($3m$. 1), $\mathbf{C}$ je čtvercová matice typu ($3m$. $3m$) obsahující prutové konstanty. (Všechny matice řadíme podle předem zvoleného číslování prvků.) Každý prut je popsán obecně 9 hodnotami, tj. submaticí $\mathbf{C}_i$ typu (3 . 3).

Pruty přímé: Pruty zakřivené:

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \omega_{abi}, & -\varepsilon_i, & 0 \\ -\varepsilon_i, & \omega_{bai}, & 0 \\ 0, & 0, & \nu_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \delta_{11i}, & -\delta_{12i}, & \delta_{13i} \\ -\delta_{21i}, & \delta_{22i}, & -\delta_{23i} \\ \delta_{31i}, & -\delta_{32i}, & \delta_{33i} \end{bmatrix}$$

Prvky submatic jsou koeficienty běžně známé z řešení konstrukcí silovou metodou.

Zvolíme libovolnou základní soustavu staticky určitou. O typu základní soustavy není třeba uvažovat, protože zavedením skupinových neznámých lze převádět vztahy platné pro jednotlivé typy základních soustav navzájem. Zavedeme staticky neurčité veličiny $X_1 \div X_s$. Obecně uvažujeme v každém z n styčníků 3 složky styčného zatížení, tedy $3n$ složek styčných břemen. Položme postupně všechna $X_j = 1$ a všechna $P_k = 1$. Určíme-li na základní soustavě staticky určité průběhy momentů a normálných sil postupně pro všechny jedničkové zatěžovací stavy, lze vyjádřit momenty v koncových bodech prutů i normálné síly (síly ve spojnicích koncových bodů u zakřivených prutů) jako funkci X_j a P_k. V maticovém tvaru pak tyto rovnice zapíšeme ve formě

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{X} + \mathbf{S}_p \mathbf{P} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

kde

$\mathbf{S}_1$ – je obdélníková matice hodnot „jedničkových" koncových momentů a normálných sil na všech prutech od $X_j = 1$ typu ($3m$. s);

$\mathbf{X}$ – je sloupcová matice všech staticky neurčitých veličin X_j typu (s . 1);

$\mathbf{S}_p$ – je obdélníková matice hodnot „jedničkových" koncových momentů a normálných sil na všech prutech od všech $P_k = 1$ typu ($3m$. $3n$);

$\mathbf{P}$ – je sloupcová matice všech složek styčných břemen typu ($3n$. 1).

Určíme ještě

$$\mathbf{S}^T = [\mathbf{X}^T, \mathbf{P}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} \tag{2a}$$

a dosadíme do výrazu (1) pro přetvárnou práci.

Pak

$$2\Pi = [\mathbf{X}^T, \mathbf{P}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} [\mathbf{C}] [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Přetvárnou práci máme vyjádřenu jako funkci staticky neurčitých veličin a styčníkových břemen. Budeme-li považovat všechna X_j a P_k za proměnné, je vztah (3) kvadratickou formou a můžeme jej derivovat podle všech X_j a P_k. Derivace přetvárné práce podle sil a momentů jsou rovny posunům a pootočením ve směrech působících veličin. Nenastanou-li popuštění podpor (některá z X_j mohou být i složkami vnějších reakcí) budou derivace podle všech X_j rovny nule. Každé složce styčného břemene odpovídá složka přetvoření styčníků (co do směru i smyslu), zatím neznámá. Sloupcovou matici všech složek přetvoření volných styčníků značme $\mathbf{\Phi}$; je typu $(3n \,.\, 1)$. Derivaci provedeme podle pravidel o derivaci kvadratické formy. S ohledem na výše uvedenou úvahu vyjde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} [\mathbf{C}] [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

kde $\mathbf{0}$ je sloupcová nulová matice o s řádcích. Roznásobením určíme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \mathbf{C} \mathbf{S}_1, & \mathbf{S}_1^T \mathbf{C} \mathbf{S}_p \\ \mathbf{S}_p^T \mathbf{C} \mathbf{S}_1, & \mathbf{S}_p^T \mathbf{C} \mathbf{S}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}. \tag{4a}$$

Matice, složená ze součinů matic je vzhledem k typům jednotlivých matic typu $(s + 3n) \,.\, (s + 3n)$, tedy matice čtvercová a jak plyne z vlastností členů, souměrná.

Označme jednotlivé součiny symboly

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}_1^T \mathbf{C} \mathbf{S}_1\,, \quad \mathbf{G} = \mathbf{S}_1^T \mathbf{C} \mathbf{S}_p\,,$$
$$\mathbf{G}^T = \mathbf{S}_p^T \mathbf{C} \mathbf{S}_1\,, \quad \mathbf{H} = \mathbf{S}_p^T \mathbf{C} \mathbf{S}_p\,,$$

a tedy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}, & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T, & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}. \tag{4b}$$

Na vztah (4b) se můžeme dívat jako na maticovou rovnici, jejíž matice jsou rozděleny na pole.

Matice $\mathbf{F}$ je čtvercová, typu $(s \,.\, s)$, je identická s maticí podmínečných rovnic silové metody. Rozepíšeme-li vztah (4b) do dvou maticových rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\,\mathbf{X} + \mathbf{G}\,\mathbf{P} &= \mathbf{0}\,, \\ \mathbf{G}^T \mathbf{X} + \mathbf{H}\,\mathbf{P} &= \mathbf{\Phi}\,, \end{aligned} \tag{4c}$$

představuje prvá rovnice maticový zápis podmínečných rovnic metody silové, přičemž součin $\mathbf{G}\,\mathbf{P}$ představuje sloupcovou matici koeficientů δ_{jp}, jak plyne z postupu sestavení matic. Druhou rovnici můžeme zatím pokládat za výraz pro výpočet složek deformací jednotlivých styčníků.

O matici $\mathbf{F}$ lze přímo – na základě fyzikálního významu – prohlásit, že je regulární (samozřejmě při správném postupu předcházejícím a správném výběru veličin X_j) a má hodnost rovnou číslu $h_F = s$. Lze však též uvažovat takto. Matice $\mathbf{C}$ je čtvercová, symetrická matice hodnosti $h_c = 3m$, jak plyne z její definice. Matice $\mathbf{S}_1$ je typu

$(3m\,.\,s)$ a její hodnost h_s nebude menší než s $(3m > s)$. Matice představuje soupis hodnot momentů v koncových bodech všech prutů a normálných sil od zatížení všemi $X_j = 1$. Tyto veličiny můžeme nazývat složkami staticky neurčité veličiny a jsou ve vzájemném pevném poměru. Stačí hodnota kterékoli složky k určení všech ostatních. Tedy v každém sloupci je jen jedna nezávislá hodnota – odpovídá např. zvolené veličině X_j. Zvolíme-li např. za staticky neurčité s hodnot momentů v koncových bodech prutů a normálných sil (neb z jiné volby na takovouto přejdeme), pak v s příslušných řádcích budou postupně jednotky vždy jen v jednom z s sloupců. Ostatní $(3m - s)$ řádky budou lineárními kombinacemi těchto s řádků. To znamená, že matice $\mathbf{S}_1$ bude mít vždy hodnost $h_s = s$. Tutéž hodnost má i matice $\mathbf{S}_1^T$. Jak plyne z vět o hodnosti součinu matic, je pak $h_F = s$. Matice $\mathbf{F}$ je regulární, a existuje proto matice inversní $\mathbf{F}^{-1}$. Matice $\mathbf{H}$ je taktéž čtvercová, typu $(3n\,.\,3n)$. Pro tuto matici lze provést stejnou úvahu, jakou jsme provedli o matici $\mathbf{F}$. Není to však nutné. Pro inversi matice, rozdělené na pole stačí, aby alespoň jedna ze čtvercových submatic (v našem případě $\mathbf{F}$ nebo $\mathbf{H}$) byla nesingulární. Z fyzikálního významu rovnice (4b) však plyne přímo, že pro konstrukce stabilní, které nebudou blízké výjimkovým případům, je celá matice regulární hodnosti $h = (s + 3n)$.

Určeme tedy matici inversní k matici z rovnice (4b) podle pravidel o výpočtu inversní matice k matici rozdělené na pole. Prvky inversní matice označme $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^T$, $\mathbf{W}$ (inversní matice k symetrické je matice symetrická). Musí platit

(5)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}, & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T, & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{I}$ je matic jednotková.

Vzhledem k regulárnosti matice $\mathbf{F}$ plyne z rovnice (5)

(6)
$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (\mathbf{H} - \mathbf{G}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G})^{-1}, \\ \mathbf{U} &= -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{W}, \\ \mathbf{U}^T &= -\mathbf{W} \mathbf{G}^T \mathbf{F}^{-1}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G} \, (-\mathbf{W} \mathbf{G}^T \mathbf{F}^{-1}). \end{aligned}$$

Násobme zleva rovnici (4b) maticí inversní a zapišme

(7)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Rozepišme rovnici (4) do tvaru dvou rovnic

(7a)
$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{T}\ \mathbf{0} + \mathbf{U}\ \mathbf{\Phi}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{U}^T \mathbf{0} + \mathbf{W}\ \mathbf{\Phi}. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}\,\boldsymbol{\Phi}\,. \tag{7b}$$

Tato rovnice je ovšem identická s rovnicí, kterou bychom zapsali systém rovnic při řešení uvažované konstrukce deformační metodou a musí tedy platit

$$\mathbf{W} = (\mathbf{H} - \mathbf{G}^T\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{G})^{-1} = \mathbf{D}\,,$$

kde **D** je matice podmínečných rovnic z řešení konstrukce deformační metodou.

Z rovnice (7b) plyne

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{W}^{-1}\,\mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{P} = (\mathbf{H} - \mathbf{G}^T\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{G})\,\mathbf{P}\,. \tag{7c}$$

Dosazením do prvé z rovnic (7a), která představuje závislost hodnot X_j na složkách deformací styčníků jde

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Phi} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{W}\boldsymbol{\Phi} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{P} \tag{7d}$$

$$\mathbf{X} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}\,.$$

Součin **GP** představuje opět sloupcovou matici typu $(s\,.\,3n)\,.\,(3n\,.\,1) = (s\,.\,1)$, jejíž prvky jsou koeficienty δ_{jp} z řešení silovou metodou $\mathbf{GP} = \boldsymbol{\delta}_{1p}$ a tedy i $\mathbf{G} = \mathbf{S}_1^T\mathbf{C}\mathbf{S}_p$. Výsledné hodnoty statických veličin, momentů v koncových bodech prutů a normálných sil vypočteme z rovnice (2)

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1\mathbf{X} + \mathbf{S}_p\mathbf{P} = \mathbf{S}_1(-\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})\,\mathbf{P} + \mathbf{S}_p\mathbf{P}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{S}_p - \mathbf{S}_1\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})\,\mathbf{P}\,.$$

Všechny součiny matic jsou definovány, jak plyne z typů jednotlivých matic.

Uvedené vztahy lze určit i z rovnice (4c)

$$\mathbf{F}\,\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{P} = \mathbf{0}\,,$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{X} + \mathbf{H}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}\,.$$

Z prvé rovnice jde

$$\mathbf{F}\mathbf{X} = -\mathbf{G}\mathbf{P}$$

a

$$\mathbf{X} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}\,.$$

Dosazením do druhé rovnice vyjde

$$\mathbf{G}^T(-\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}) + \mathbf{H}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}\,,$$

$$(\mathbf{H} - \mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}\,,$$

a tedy

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}\,.$$

Při této formě výpočtu určíme z jednoho systému rovnic hodnoty staticky neurčitých veličin i složek deformací styčníků. Inversí pouze submatice **F** získáme i inversní matici $\mathbf{D}^{-1}$ případně i matici **D** a předcházející rovnice určují tedy souvislost rovnic metody silové a deformační. Z rovnice (7) plyne i vztah

$$\mathbf{FU} = -\mathbf{GD},$$

který má však význam jen kontrolní.

Zatím jsme předpokládali, že nenastává popuštění podpor. Uvažujme nyní, že r koncových bodů prutů obecné konstrukce je vetknuto do opěr, tj. že je $3r$ složek vnějších reakcí a nastanou popuštění všech podpor. Každá vnější reakce má tři složky – moment, svislou a vodorovnou sílu. Popuštění každé podpory určeme třemi složkami. Pootočením, svislým a vodorovným posunem. Jejich kladný smysl zaveďme shodně s kladným smyslem složek reakcí. Nastane-li u konstrukce popuštění podpor, pak derivace přetvárné práce podle staticky neurčitých veličin je rovna virtuálné práci vnějších sil a reakcí při jedničkovém stavu zatížení, odpovídajícím veličině, podle níž derivujeme. Tato věta se dá rozšířit i na síly P – složky styčného zatížení – v našem vyjádření přetvárné práce.

Stanovíme-li od všech stavů zatížení $X_j = 1$ a $P_k = 1$ složky vnějších reakcí na zvolené základní soustavě, lze zapsat pro každý zatěžovací stav hodnotu virtuálné práce. Pokud je některá z X_j složkou reakce, zahrnujeme ji do výrazu. Pro zatěžovací stav $X_j = 1$

$$L_{j\Delta} = R_{xj1}\,\Delta_1 + R_{xj2}\,\Delta_2 + \ldots + X_j\,\Delta_j + \ldots + R_{xj3r}\,\Delta_{3r}\,.$$

Pro zatěžovací stav $P_k = 1$

$$L_{k\Delta} = R_{pk1}\,\Delta_1 + R_{pk2}\,\Delta_2 + \ldots + R_{pk3r}\,\Delta_{3r} + P_1\Phi_1 + P_2\Phi_2 + \ldots + P_{3n}\Phi_{3n}\,.$$

Zapsané rovnice pro všechna X i P představují systém rovnic, který zapíšeme v maticové formě a to

(8) $$\mathbf{L}_\Delta = [\mathbf{L}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}\\ \boldsymbol{\Phi}\end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{L}_\Delta$ – je sloupcová matice hodnot všech virtuálných prací za jedničkových zatěžovacích stavů a je typu $(s + 3n)\,.\,(1)$;

L – je obdélníková matice hodnot reakcí od jedničkových stavů zatížení typu $(s + 3n)\,.\,(3r + 3n)$;

$\boldsymbol{\Delta}$ – je sloupcová matice všech složek popuštění podpor typu $(3r\,.\,1)$, o nichž předpokládáme, že jsou známé, seřazené podle zvoleného očíslování;

$\boldsymbol{\Phi}$ – jako dříve sloupcová matice všech složek přetvoření styčníků, typu $(3n\,.\,1)$.

Je tedy splněno $(s + 3n)\,.\,(1) = [(s + 3n)\,.\,(3r + 3n)]\,.\,[(3r + 3n)\,.\,(1)]$, a součin je definován.

Matici $\mathbf{L}$ lze rozdělit na 4 submatice

(9) $$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1, & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3, & \mathbf{L}_4 \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{L}_1$ je typu $(s \, . \, 3r)$ a obsahuje složky reakcí R_{xj} od všech $X_j = 1$. $\mathbf{L}_3$ je typu $(3n \, . \, 3r)$ a obsahuje složky reakcí R_{pk} od všech $P_k = 1$. Tyto obě matice mohou obsahovat prvky obecných hodnot.

$\mathbf{L}_2$ je typu $(s \, . \, 3n)$ a musí být nutně maticí nulovou. Při zatěžovacím stavu $X_j = 1$ žádné vnější síly nekonají práci na posunech Φ_i.

$\mathbf{L}_4$ je čtvercová matice typu $(3n \, . \, 3n)$ a je jedničkovou maticí. Na drahách Φ_i mohou konat práci pouze příslušné složky styčníkových břemen – v tomto případě jednotková břemena. Můžeme tedy psát

(10) $$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1, & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_3, & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Provedeme-li za uvedených předpokladů derivaci přetvárné práce a upravíme stejně jako dříve, dospějeme k rovnici, jejíž levá strana je shodná s rovnicí (4b), ale na pravé straně bude matice $\mathbf{L}_\Delta$.

Tedy

(11) $$\begin{bmatrix} \mathbf{F}, & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T, & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Součiny jsou definovány, neboť

$$[(s + 3n) \, . \, (s + 3n)] \, . \, [(s + 3n) \, . \, (1)] = [(s + 3n) \, . \, (3r + 3n)] \, .$$
$$. \, [(3r + 3n) \, . \, (1)]$$

Násobme rovnici (11) zleva inversní maticí k matici prvé a značme s ohledem na dříve uvedené vztahy

(12) $$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{D} \end{bmatrix} [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Po roznásobení s ohledem na rovnici (10) by další postup řešení byl obdobný jako v předešlém případě.

Sledujme dále, jaké vztahy budou platit mezi s staticky neurčitými veličinami a $3r$ složkami vnějších reakcí; některá z těchto složek může být samozřejmě i staticky neurčitou veličinou. Do úvahy vezměme i styčná břemena P_k.

Každá složka vnější reakce je obecně funkcí jak X_j, tak P_k. Staticky neurčité veličiny neovlivňují samozřejmě nijak síly P_k.

Pišme

$$R_j = R_{x1j}X_1 + R_{x2j}X_2 + \ldots + R_{xsj}X_s + R_{p1j}P_1 + R_{p2j}P_2 + \ldots + R_{p3nj}P_{3n}$$

Těchto rovnic lze zapsat $3r$.

Doplňme vztah

$$P_k = 0 \, . \, X_1 + \ldots + 0 \, . \, X_s + 0 \, . \, P_1 + 0 \, . \, P_2 + \ldots + 1 \, . \, P_k + \ldots + 0 \, . \, P_{3n} \, .$$

Takovýchto rovnic bude $3n$ a celý systém všech rovnic obou typů bude $(3r + 3n)$, obecně o $(s + 3n)$ členech.

Zapišme jej ve formě

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

kde $\mathbf{R}$ je sloupcová matice všech složek vnějších reakcí a je typu $(3r \, . \, 1)$. (Číslování prvků bude shodné s číslováním odpovídajících složek matice $\mathbf{\Delta}$.)

Matici $\mathbf{M}$ rozdělme na pole

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1, & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3, & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix}.$$

Prvek $\mathbf{M}_1$ obsahuje všechny složky reakcí od $X_j = 1$ a je typu $(3r \, . \, 3s)$. $\mathbf{M}_2$ obsahuje všechny složky reakcí od $P_k = 1$ a je typu $(3r \, . \, 3n)$. Matice $\mathbf{M}_3$ typu $(3n \, . \, s)$ je nutně matice nulová (tak byla zavedena) a matice $\mathbf{M}_4$ typu $(3n \, . \, 3n)$ je diagonální jedničková matice.

Dosaďme do rovnice (13) vztah (12)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{D} \end{bmatrix} [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Součiny jsou definovány. $(3r + 3n) \, . \, (1) = [(3r + 3n) \, . \, (s + 3n)] \, . \, [(s + 3n) \, . \, . \, (s + 3n)] \, . \, [(s + 3n) \, . \, (3r + 3n)] \, . \, [(3r + 3n) \, . \, (1)]$.

Jak je patrno z naznačených rozepsaných rovnic a z významu, je $\mathbf{L}^T = \mathbf{M}$. Správnost plyne i z této úvahy. Rovnice (14) představuje závislost mezi vnějšími silami a reakcemi a popuštěními podpor a složkami deformací styčníků, tedy závislost mezi silami a posuny. Matice takového vztahu však musí být vzhledem k Betti-ho větě symetrická. Matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

je symetrická čtvercová, tedy matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{M}$ budou navzájem transponované. Můžeme tedy psát

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}, \tag{13a}$$

dále

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{L}_1^T, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{L}_2^T = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{L}_3^T, \quad \mathbf{M}_4 = \mathbf{L}_4^T = \mathbf{I}$$

a

(14a)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{D} \end{bmatrix} [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Tato rovnice představuje závislost mezi styčnými břemeny a reakcemi a popuštěními podpor a deformacemi styčníků. To znamená, budeme-li pohlížet na každou podporu jako na zvláštní styčník, na nějž působí styčná břemena R a na popuštění podpor jako na složky deformací těchto styčníků, pak rovnice (14a) vyjadřuje závislost mezi styčnými břemeny a složkami deformací styčníků. To je ovšem charakteristická vlastnost rovnic metody deformační. To znamená, že k rovnicím, které jsme vyvodili, vycházejíce z principů metody silové, mohli bychom pravděpodobně dospět též přímo z metody deformační. Ze jest to možné, ukážeme dále.

Vraťme se nyní k rovnici (11) a zapišme ji ve tvaru, jak jsme ji odvozovali

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} [\mathbf{C}] [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{C}$ je čtvercová, symetrická matice typu $(3m \,.\, 3m)$ a je regulární. Matice $[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p]$ je typu $(3m) \,.\, (s + 3n)$, jak již bylo řečeno. Pro obecnou rámovou konstrukci s tuhými vazbami – tj. konstrukce kterou předpokládáme – platí vztah

$$s = 3m - 3n\,,$$

tj.

$$3m = s + 3n\,,$$

a tedy matice je taktéž čtvercová. Z dříve provedeného rozboru matic $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_p$ vyplývá, že matice $[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p]$ bude mít hodnost $h = s + 3n$, a tedy že k ní bude existovat matice inversní. Proto můžeme psát

(15)
$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix} [\mathbf{C}] [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p] \right]^{-1} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p]^{-1} [\mathbf{C}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix}^{-1}$$

a

(16)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p]^{-1} [\mathbf{C}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix}^{-1} [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}$$

a

(17)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}^T] [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p]^{-1} [\mathbf{C}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix}^{-1} [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Označíme-li matici prutových konstant jednoho prutu používaných při řešení rámových konstrukcí deformační metodou $\bar{\mathbf{C}}_i$ (viz úvodem citovaný článek) platí pro pruty přímé i zakřivené vztah

$$[\bar{\mathbf{C}}_i]\,[\mathbf{C}_i] = [\mathbf{I}] \quad \text{a tedy} \quad \bar{\mathbf{C}}_i = \mathbf{C}_i^{-1}\,,$$

Lze tedy do výrazu (17) dosadit $\mathbf{C}^{-1} = \bar{\mathbf{C}}$.

Označme dále

$$[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_p]^{-1} = \mathbf{A}_x, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_p^T \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}_x^T\,,$$

a pišme

(18)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{A}_x \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A}_x^T \mathbf{L} \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Označme dále

$$\mathbf{L}^T \mathbf{A}_x = \mathbf{A}_\Delta\,, \quad \mathbf{A}_x^T \mathbf{L} = \mathbf{A}_\Delta^T\,.$$

Pak

(19)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_\Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A}_\Delta^T] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_\Delta] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Je to opět vztah mezi vnějšími silami a reakcemi a popuštěními podpor a složkami deformací styčníků. Je identický s rovnicí (14a). Porovnáme-li rovnici (19) s maticovou formou podmínečných rovnic z řešení konstrukcí deformační metodou z citovaného článku vidíme, že rovnici (19) budeme moci sestavit přímo rozšířeným způsobem maticové deformační metody.

Rozšíříme zapsání výminek rovnováhy i na podpory. Každý podporový průřez budeme považovat za další styčník, na který působí složky reakcí jako styčné zatížení a momenty a síly z příslušných prutů. Smysly reakcí i popuštění nutno volit shodně. Zapíšeme tedy $(3n + 3r)$ výminek rovnováhy a matice $\mathbf{A}_\Delta$ bude typu $[(3n + 3r)\,.\,(3m)]$. Matice $\mathbf{A}_x$ je typu $(s + 3n)\,.\,(s + 3n)$, matice $\mathbf{L}^T$ typu $(3m\,.\,3m) = (s + 3n)\,.\,(s + 3n)$. Tedy $\mathbf{A}_\Delta$ bude typu $(3r + 3n)\,.\,(s + 3n)\,.\,(s + 3n)\,.\,(s + 3n) = (3r + 3n)\,.\,(s + 3n) = (3r + 3n)\,.\,(3m)$, jak nám vyšlo i z úvahy.

Vidíme, že rovnice (19), ke které jsme došli postupem obvyklým v metodě silové, plyne též přímo z rozsířeného řešení konstrukce metodou deformační.

Vyjdeme-li naopak od rovnice (19), lze uvažovat takto: Vztah

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = [\mathbf{L}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad \text{neb} \quad \mathbf{R} = \mathbf{L}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{L}_3^T \mathbf{P}$$

je vlastně rovnicí pro výpočet složek vnějších reakcí ze styčného zatížení a staticky neurčitých veličin.

Matice $\mathbf{M} = \mathbf{L}^T$ je typu $(3r + 3n) \cdot (s + 3n)$. Jak vyplývá z významu symbolů, bude vždy $(3r + 3n) > (s + 3n)$ a lze tedy stanovit jednu z možných inversních matic zleva (pokud bude existovat)

$$^{-1}\mathbf{M} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T = (\mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L} = {}^{-1}(\mathbf{L}^T)$$

a můžeme určit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = {}^{-1}[\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

a tedy i

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = {}^{-1}[\mathbf{L}] \, [\mathbf{D}_\Delta] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}. \tag{20}$$

To znamená, že podle rovnice (20) lze pro zvolenou základní soustavu – po určení $^{-1}\mathbf{L}^T$ – vypočíst hodnoty všech X_j i v případě, že jsme $\mathbf{D}_\Delta$ sestavili přímo. Tento vztah je ekvivalentní s rovnicí (12), jak plyne dosazením za $\mathbf{D}_\Delta$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = {}^{-1}(\mathbf{L}^T) \, [\mathbf{L}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{D} \end{bmatrix} [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}, & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T, & \mathbf{D} \end{bmatrix} [\mathbf{L}] \begin{bmatrix} \Delta \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Vracíme se tímto způsobem od rovnic, sestavených podle způsobu deformační metody k rovnicím, plynoucím ze silové metody.

Literatura

[1] *Dašek:* Statika rámových konstrukcí. NČSAV 1959.
[2] Stroje na zpracování informací III. Sborník NČSAV 1955.
[3] *Chu Kia Wang:* Formulation of Sloup-Deflection Equations. PASCE 1958.
[4] *Frazer:* Základy maticového počtu. SNTL 1958.
[5] Смирнов: Устойчивость и колебания сооружений. СТЖI 1958.
[6] *Chobot:* Použití maticového počtu ve stavebné mechanice. Sborník FIS, SPN 1961.
[7] *Chobot:* Maticová forma metody rozdělování. Práce ČVUT, Ř. I-St., č. 2, SPN 1963.

Резюме

МАТРИЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ МЕТОДОМ СИЛ И МЕТОДОМ ДЕФОРМАЦИЙ

КАРЕЛ ХОБОТ (Karel Chobot)

Если мы выразим работу деформаций произвольной рамной конструкции в форме матриц как функцию статически неопределимых величин и узловых нагрузок и если мы найдем производную этого выражения по силам (нагруз-

кам) и моментам, то получим распространенную систему уравнений, удовлетворяющих общему порядку расчета рам способом сил.

Если мы составим обратную матрицу по отношению к матрице исходной методом разбивки матриц на клетки, тогда одна из клеток обратной матрицы является матрицей, составленной по условиям, необходимым для уравнений по методу деформаций. Если принять во внимание еще осадку опор и взаимоотношения между величинами внешних реакций и статически неопределимыми величинами, то получим систему уравнений, которая является общей как для метода деформаций, так для метода сил.

Zusammenfassung

MATRIXFORM DER BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER KRAFT- UND DER DEFORMATIONSMETHODE

KAREL CHOBOT

Drückt man die Formänderungsarbeit der allgemeinen Rahmenkonstruktion in Matrixform als Funktion der statisch unbestimmten Grössen und der Knotenpunktlasten aus, erhält man durch Derivation dieses Ausdruckes nach Kräften und Momenten das erweiterte System der Bedingungsgleichungen der Kraftmethode. Die Kehrmatrix der Matrix des angeführten Systems kann durch Verteilung dieser Matrix in Felder bestimmt werden. Eine der Untermatrizen der Kehrmatrix erweist sich dabei als Matrix der Bedingungsgleichungen der Deformationsmethode. Nimmt man noch die Stützensenkungen sowie die Beziehungen zwischen den Komponenten der Stützenreaktionen und den statisch unbestimmten Grössen in Betracht, gelangt man zum System vom Gleichungen, welches sowohl der Deformations- als auch der Kraftmethode gemeinsam ist.

Adresa autora: Ing. *Karel Chobot* C. Sc., Stavební fakulta ČVUT, Karlovo nám. 17, Praha 2.